ს. თოფურია, ვ. ხოჭოლავა,
ნ. მაჭარაშვილი, გ. აბესაძე, ზ. მეტრეველი

მათემატიკა

პირველი ნაწილი

(თეორია და ამოცანათა კრებული)

რეკომენდებულია სტუ-ს
სარედაქციო-საგამომცემლო საბჭოს
მიერ დამხმარე სახელმძღვანელოდ
უმაღლეს სასწავლებლებში შემსვლელთათვის

პროფესორ **ს. თოფურიას** რედაქციით

მეხუთე გადამუშავებული გამოცემა

თბილისი
2009

წიგნი განკუთვნილია უმაღლეს სასწავლებლებში შემსვლელთათვის, ხოლო როგორც დამხმარე სახელმძღვანელო, დიდად სასარგებლო იქნება საშუალო სკოლებისათვის.

წიგნში მოცემული მასალის საფუძვლიანი შესწავლა უზრუნველყოფს მოსწავლე ახალგაზრდობის მათემატიკურ მომზადებას იმ დონეზე, რომელიც მოეთხოვება უმაღლეს სასწავლებლებში შემსვლელს.

წიგნი გამოადგება აგრეთვე ყველას, ვინც მათემატიკის სასკოლო კურსითაა დაინტერესებული.

რეცენზენტები: 1. საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოსი,
პროფ. **ი. კიღურაძე**
2. პროფესორი **ვ. პაატაშვილი**

კომპიუტერული უზრუნველყოფა: **ც. ცანავა**
ე. ზარიძე

ISBN 978-9941-14-170-6 (ორივე ნაწილი)
ISBN 978-9941-14-171-3 (პირველი ნაწილი)

მეოთხე გამოცემის წინასიტყვაობა

წიგნის “ალგებრა და ანალიზის საწყისების” წინა სამი გამოცემა საქართველოს განათლების სამინისტროს მიერ დამტკიცებული იყო სახელმძღვანელოდ უმაღლესი სასწავლებ-ლების მოსამზადებელი განყოფილების მსმენელებისა და აბიტურიენტებისათვის. იგი მთლიანად მოიცავს უმაღლეს სასწავლებლებში მისაღები გამოცდების პროგრამით გათვალის-წინებულ მასალას. შედგება ის ორი განყოფილებისაგან. პირველ განყოფილებაში გადმოცემულია თეორიული მასალა, რომლის აგების დროს შეძლებისდაგვარად გათვალისწინებულია საკითხების გადმოცემის ლოგიკური თანმიმდევრობა. ამასთან, საშუალო სკოლის სახელმძღვანელოებისაგან განსხვავებით, ყოველი კონკრეტული საკითხის შესაბამისი მასალა თავმოყრილია ერთად. თეორიული მასალის განმტკიცების მიზნით, იქ, სადაც საჭიროდ მივიჩნიეთ, გარჩეულია მაგალითები.

მეორე განყოფილება ამოცანათა კრებულია, რომელიც შეიცავს თეორიული მასალის შესაბამის მრავალ ამოცანასა და სავარჯიშოს. ისინი დალაგებულია თემების მიხედვით, მათი ტიპებისა და სირთულის გათვალისწინებით. ყოველი თემის ბოლოს მოცემულია სავარჯიშოთა საერთო განყოფილება. მაგალითებისა და ამოცანების ასეთი დალაგება მოსწავლეს გაუადვილებს სკოლაში შესწავლილი მასალის გამეორებას და შეძენილი ცოდნის გაღრმავებას.

მეოთხე გამოცემა მთლიანად გადამუშავებულია და არსებითად შევსებულია, გასწორებულია შემჩნეული უზუსტო-ბანი.

ავტორები მადლობას უხდიან ყველას, ვინც მოგვაწოდა შენიშვნები შემჩნეულ ხარვეზებზე.

ავტორები სიამოვნებით მიიღებენ მკითხველთა ყველა საქმიან შენიშვნას, რომლებიც გათვალისწინებული იქნება წიგნის შემდგომ გამოცემაში.

წიგნი რომ სასარგებლო იყოს ყველასათვის, ვინც მათემატიკის სასკოლო კურსითაა დაინტერესებული, მასში შეტანილი ზოგიერთი ამოცანა და მაგალითი საშუალოზე უფრო მაღალი სირთულისაა.

მეხუთე გამოცემის წინასიტყვაობა

მეხუთე გამოცემაში ამოღებულია ის საკითხები, რომლებიც არ არის საშუალო სკოლისა და მისაღები გამოცდების ამჟამად მოქმედ პროგრამებში. დამატებულია ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის ელემენტები (თეორია და ამოცანები). გასწორებულია შემჩნეული უზუსტობანი.

ავტორები მადლობას უხდიან ყველას, ვინც მოგვაწოდა შენიშვნები შემჩნეულ ხარვეზებზე.

შესავალი

პირველადი ცნებები. აქსიომა და თეორემა. განვსაზღვროთ რაიმე ცნება ნიშნავს–გადმოვცეთ მისი შინაარსი სხვა, უფრო მარტივი, ადრე შემოღებული ცნებების საშუალებით. აქედან გამომდინარე, თუ რაიმე ცნება შემოღებულია ადრე განსაზღვრული ცნებების საშუალებით, მაშინ ისმის კითხვა: როგორ განისაზღვროს პირველი მათგანი. ამრიგად, უნდა გამოიყოს ისეთი ცნებები, რომლებსაც მივიღებთ ძირითად, პირველად ცნებებად და მათზე დაყრდნობით განისაზღვროს ყველა სხვა ცნება. ასეთებია სიმრავლის, წერტილის, მანძილის და ა.შ. ცნებები.

დავამტკიცოთ რაიმე წინადადება (დებულება) ნიშნავს ვაჩვენოთ რომ მისი ჭეშმარიტება გამომდინარეობს ადრე ცნობილი წინადადებებიდან (დებულებებიდან). აქედან გამომდინარე, თუ რაიმე წინადადება დამტკიცებულია ადრე ცნობილი წინადადებების საშუალებით, მაშინ ისმის კითხვა: როგორ დავამტკიცოთ პირველი მათგანი. ამრიგად, უნდა გამოიყოს ისეთი წინადადებები, რომლებსაც მივიღებთ დაუმტკიცებლად და მათზე დაყრდნობით დამტკიცდეს ყველა სხვა წინადადება.

წინადადებას, რომელიც დაუმტკიცებლად მიიღება, აქსიომა ეწოდება.

წინადადებას, რომლის ჭეშმარირება მტკიცდება, თეორემა ეწოდება.

თეორემების დამტკიცების დროს გამოიყენება ცნებები, აქსიომები და ადრე დამტკიცებული თეორემები.

მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი. მათემატიკის ერთ-ერთ ძირითად აქსიომას წარმოადგენს ე.წ. მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი, რომელიც გამოიყენება ნატურალურ რიცხვებზე დამოკიდებულ დებულებათა დასამტკიცებლად. ეს პრინციპი შემდეგში მდგომარეობს:

თუ ნატურალურ n რიცხვზე დამოკიდებული წინადადება მართებულია რაიმე $n = n_1$, საწყისი მნიშვნელობისათვის, და იმ დაშვებიდან, რომ იგი მართებულია n=k-სათვის (სადაც $k \geq n_1$ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია) გამომდინარეობს, რომ წინადადება მართებულია აგრეთვე n=k+1-სათვის, მაშინ წინადადება მართებულია ნებისმიერი $n \geq n_1$ ნატურალური რიცხვისათვის.

მაგალითი. მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით დავამტკიცოთ, რომ 4^n-1 იყოფა 3-ზე, ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის.

ამოხსნა. როცა $n=1$, მაშინ ცხადია $4^1-1=3$ იყოფა 3-ზე.

დავუშვათ, რომ 4^k-1 იყოფა 3-ზე, სადაც k ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, და დავამტკიცოთ, რომ $4^{k+1}-1$ აგრეთვე იყოფა 3-ზე. მართლაც

$$4^{k+1}-1=4\cdot4^k-1=4\cdot4^k-4+3=4(4^k-1)+3,$$

საიდანაც დაშვების თანახმად ცხადია, რომ $4^{k+1}-1$ იყოფა 3-ზე.

ამრიგად, მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის თანახმად წინადადება დამტკიცებულია.

აუცილებელი და საკმარისი პირობები. მათემატიკური მსჯელობა წარმოადგენს ერთიმეორიდან გამომდინარე გამონათქვამების ერთობლიობას. თუ გვაქვს ორი A და B გამონათქვამი და A-დან გამომდინარეობს B, ამ ფაქტს სიმბოლურად ასე ჩაწერენ: $A\Rightarrow B$. თვით $\Rightarrow$ სიმბოლოს ლოგიკური გამომდინარეობის სიმბოლოს უწოდებენ.

თუ $A\Rightarrow B$, მაშინ A-ს ეწოდება B-ს საკმარისი პირობა, B-ს კი–A-ს აუცილებელი პირობა.

მაგალითად, პირობა "n რიცხვი იყოფა 10-ზე" არის საკმარისი პირობა იმისა, რომ n რიცხვი გაიყოს 5-ზე, მაგრამ არ არის აუცილებელი. ამავე დროს პირობა "n რიცხვი იყოფა 5-ზე" არის აუცილებელი პირობა იმისა, რომ n რიცხვი გაიყოს 10-ზე, მაგრამ არ არის საკმარისი.

თუ $A\Rightarrow B$ და $B\Rightarrow A$, მაშინ ამბობენ, რომ B არის A-ს აუცილებელი და საკმარისი პირობა (აგრეთვე, A არის B-ს აუცილებელი და საკმარისი პირობა) და ამ ფაქტს სიმბოლურად ასე ჩაწერენ: $A\Leftrightarrow B$. თვით $\Leftrightarrow$ სიმბოლოს ლოგიკური ტოლფასობის სიმბოლოს უწოდებენ.

მაგალითად, იმისათვის, რომ რიცხვი უნაშთოდ გაიყოს 10-ზე, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ეს რიცხვი ბოლოვდებოდეს ნულით.

სიმრავლე, სიმრავლის ელემენტი. ქვესიმრავლე, სიმრავლეთა გაერთიანება და თანაკვეთა. სიმრავლის ცნება პირველადი ცნებაა და ამიტომ იგი არ განისაზღვრება. სიმრავლეზე წარმოდგენას გვაძლევს რაიმე ნიშნის მიხედვით გაერთიანებულ ობიექტთა ერთობლიობა. მაგალითად, შეიძლება ვილაპარაკოთ საქართველოს უმაღლეს სასწავლებელთა სიმრავლეზე, მზის სისტემის პლანეტათა სიმრავლეზე, ქართული ანბანის ასოების სიმრავლეზე და ა. შ.

ობიექტებს, რომელთაგანაც შედგება სიმრავლე, ამ სიმრავლის ელემენტები ეწოდება.

სიმრავლეებს აღნიშნავენ ლათინური ანბანის ასოებით: *A, B, C, D,…*, ხოლო მის ელემენტებს პატარა ასოებით: *a, b, c, d,…*.

იმ ფაქტს, რომ *a* წარმოადგენს *A* სიმრავლის ელემენტს, სიმბოლურად ასე ჩაწერენ: $a \in A$ (იკითხება "*a* ეკუთვნის *A*-ს"), ხოლო თუ *a* არ წარმოადგენს *A*-ს ელემენტს, მაშინ წერენ: $a \notin A$ (იკითხება "*a* არ ეკუთვნის *A*-ს").

სიმრავლე მოცემულია, თუ ნებისმიერ ობიექტზე შეიძლება ითქვას წარმოადგენს თუ არა იგი ამ სიმრავლის ელემენტს.

სიმრავლე, რომლის ელემენტებია *a, b, c,…* აღინიშნება ასე: $\{a,\ b,\ c,\dots\}$, ხოლო სიმრავლის ყველა იმ *x* ელემენტთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ რაიმე *P* პირობას ასე: $\{x|\ P\}$. მაგალითად, ყველა იმ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც ნაკლებია 1000-ზე ასე აღინიშნება: $\{x|\ x \in N, x < 1000\}$.

სიმრავლეს, რომელიც არცერთ ელემენტს არ შეიცავს ცარიელი სიმრავლე ეწოდება და **Ø** სიმბოლოთი აღინიშნება. მაგალითად, მზეზე მცხოვრებ ადამიანთა სიმრავლე და $x^2+1=0$ განტოლების ნამდვილ ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელი სიმრავლეებია.

A სიმრავლეს ეწოდება *B* სიმრავლის ქვესიმრავლე, თუ *A* სიმრავლის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის *B* სიმრავლეს და წერენ $A \subset B$ (იკითხება: "*A* ქვესიმრავლეა *B* –სი"). თუ *A* სიმრავლე არ არის *B* სიმრავლის ქვესიმრავლე, მაშინ წერენ $A \not\subset B$.

მაგალითად, თუ *A* წარმოადგენს პარალელოგრამთა სიმრავლეს, ხოლო *B*-ოთხკუთხედების სიმრავლეს, მაშინ $A \subset B$.

მიღებულია, რომ ცარიელი სიმრავლე ნებისმიერი *A* სიმრავლის ქვესიმრავლეა, ე. ი. $\varnothing \subset A$.

ცხადია, რომ ნებისმიერი *A* სიმრავლე თავისი თავის ქვესიმრავლეს წარმოადგენს, ე. ი. $A \subset A$.

თუ *A* სიმრავლე *B* სიმრავლის ქვესიმრავლეა, ხოლო *B*-ში არსებობს ერთი ელემენტი მაინც, რომელიც *A*-ს არ ეკუთვნის, მაშინ *A*-ს ეწოდება *B*-ს საკუთრივი ქვესიმრავლე.

მაგალითად, თუ $A = \{1,2,3\}$, ხოლო $B = \{1,2,3,5\}$, მაშინ *A* არის *B*-ს საკუთრივი ქვესიმრავლე.

თუ $A \subset B$ და $B \subset A$, მაშინ *A* და *B* სიმრავლეებს ტოლი ეწოდება და წერენ *A*=*B*.

ორი A და B სიმრავლის ყველა იმ ელემენტთა სიმრავლეს, რომლებიც მოცემული სიმრავლეებიდან ერთ-ერთს მაინც ეკუთვნის, A და B სიმრავლეების გაერთიანება ეწოდება და $A \bigcup B$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ორი A და B სიმრავლის ყველა იმ ელემენტთა სიმრავლეს, რომლებიც ერთდროულად ორივე მოცემულ სიმრავლეს ეკუთვნიან, A და B სიმრავლეების თანაკვეთა ეწოდება და $A \bigcap B$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ორ A და B სიმრავლეს ურთიერთარაგადამკვეთი (თანაუკვეთი) ეწოდება, თუ მათი თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა.

A და B სიმრავლეთა სხვაობა ეწოდება A სიმრავლის ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც B სიმრავლეს არ ეკუთვნიან და $A \setminus B$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

მაგალითად, თუ $A=\{1,2,3,4,5\}$, ხოლო $B=\{1,3,5,7\}$, მაშინ $A \bigcup B=\{1,2,3,4,5,7\}$, $A \bigcap B=\{1,3,5\}$, $A \setminus B=\{2,4\}$ და $B \setminus A=\{7\}$.

ადვილია ჩვენება, რომ მოქმედებებს სიმრავლეებზე გააჩნიათ შემდეგი თვისებები:

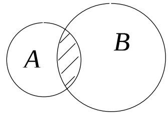
1. $A \bigcup B = B \bigcup A$, $A \bigcap B = B \bigcap A$ (გადანაცვლებადობა),
2. $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$, $A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$ (ჯუფდებადობა),
3. $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$ (დისტრიბუციულობა).

A სიმრავლეში ელემენტების რაოდენობა $n(A)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. მაგალითად $A=\{1;3;5;7\}$ სიმრავლისათვის $n(A)=4$.

სიმრავლეებს შორის დამოკიდებულების თვალსაჩინოდ წარმოდგენის მიზნით გამოიყენება ე. წ. ვენის დიაგრამები – სიმრავლეებს რაიმე წრის საშუალებით გამოვსახავთ.

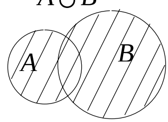
ვთქვათ A და B არაცარიელი სიმრავლეებია. თუ $A \not\subset B$, $B \not\subset A$ და $A \bigcap B \neq \varnothing$, მაშინ წრეებით გამოსახული A და B სიმრავლეების თანაკვეთა ამ წრეების საერთო ნაწილია, რომელიც ნახაზზე დაშტრიხულია.

$A \cap B$



ამ სიმრავლეთა გაერთიანებაა დაშტრიხული სიმრავლე.

$A \bigcup B$



ადვილია შემოწმება (ვენის დიაგრამებიდან ეს ნათლად ჩანს), თუ A და B ნებისმიერი ორი სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$n(A \bigcup B) = n(A) + n(B) - n(A \bigcap B).$$

ასევე, თუ A, B და C სასრული სიმრავლეებია, მაშინ

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+$$
$$+n(A\cap B\cap C).$$

მაგალითი. კლასში 20 მოსწავლე ფეხბურთითაა გატაცებული, 15 – ჩოგბურთით და 8 ერთდროულად ორივეთი. რამდენი მოსწავლეა კლასში, თუ ყოველი მოსწავლე სპორტის ამ სახეობებიდან ერთით მაინც არის გატაცებული?

ამოხსნა. ვთქვათ A არის სიმრავლე იმ მოსწავლეებისა, რომლებიც ფეხბურთით არიან გატაცებული, ხოლო B – რომლებიც ჩოგბურთით არიან გატაცებული. პირობით $n(A\cap B)=8$. ზემოთმოყვანილი ფორმულის ძალით

$$n(A\cup B)=20+15\text{-}8=27.$$

ამრიგად, კლასში არის 27 მოსწავლე.

შესაბამისობა. ეკვივალენტური სიმრავლეები. ვთქვათ, მოცემულია A და B სიმრავლეები და წესი, რომლის საშუალებითაც A სიმრავლის ყოველ a ელემენტს შეესაბამება B სიმრავლის ერთადერთი b ელემენტი. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ მოცემულია შესაბამისობა A სიმრავლისა B სიმრავლეში. b-ს უწოდებენ a ელემენტის შესაბამისს.

A და B სიმრავლეებს შორის შესაბამისობას ეწოდება ურთიერთცალსახა, თუ A სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება ერთადერთი ელემენტი B სიმრავლიდან და B სიმრავლის ყოველი ელემენტი შეესაბამება A სიმრავლის ერთადერთ ელემენტს. ე. ი. ასეთი შესაბამისობა შექცევადია.

A და B სიმრავლეებს ეწოდება ეკვივალენტური, თუ მათ შორის შეიძლება დამყარდეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა და წერენ: $A \sim B$.

მაგალითად, ნატურალურ რიცხვთა $\{1,2,3,\ldots\}$ და ლუწ ნატურალურ რიცხვთა $\{2,4,6,\ldots\}$ სიმრავლეები ეკვივალენტურია, რადგან მათ შორის შეიძლება დამყარდეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა შემდეგნაირად: ყოველ n ნატურალურ რიცხვს შევუსაბამოთ $2n$ ლუწი რიცხვი.

A სიმრავლეს ეწოდება სასრული, თუ იგი არის ცარიელი ან არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი n, რომ $A\sim\{1,2,3,\ldots,n\}$. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ A სიმრავლის ელემენტთა რიცხვი არის n. ცარიელ სიმრავლეში ელემენტთა რიცხვი მიღებულია ნულის ტოლად.

ცხადია, რომ ორი სასრული სიმრავლე ერთმანეთის ეკვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი ელემენტების რიცხვი ერთმანეთის ტოლია.

სიმრავლეს ეწოდება უსასრულო, თუ იგი სასრული არ არის. მაგალითად, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა. როგორც ზემოთ ვნახეთ, ის თავისი საკუთრივი ლუწ რიცხვთა ქვესიმრავლის ეკვივალენტურია. შევნიშნოთ, რომ ამ თვისებით ხასიათდება ნებისმიერი უსასრულო სიმრავლე, ხოლო სასრულ სიმრავლეებს ეს თვისება არ გააჩნიათ.

§1. ნატურალური რიცხვები და თვლის სისტემები

I. ნატურალური რიცხვები. ნატურალური რიცხვის ცნება არის მათემატიკის უმარტივესი, პირველადი ცნება და არ განისაზღვრება სხვა, უფრო მარტივი ცნებების საშუალებით.

ნატურალური რიცხვები თვლის შედეგად მიღებული რიცხვებია. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე N ასოთი აღინიშნება, ე.ი.

$$N=\{1,2,3,\ldots\}$$

ყოველი ნატურალური რიცხვი შეიძლება განვიხილოთ როგორც გარკვეული, არაცარიელი, სასრული სიმრავლის რაოდენობრივი მახასიათებელი. მაგალითად, სიტყვა “ია”-ში ასოების სიმრავლის რაოდენობრივი მახასიათებელია რიცხვი “2”.

ისევე როგორც ყოველი არაცარიელი სასრული სიმრავლე ხასიათდება გარკვეული ნატურალური რიცხვით, ცარიელი სიმრავლეც ხასიათდება რიცხვით “0”.

ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლისა და $\{0\}$-ის გაერთიანებას არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება და Z_0-ით აღინიშნება:

$$Z_0=\{0,1,2,3,\ldots\}.$$

ცხადია, $N\subset Z_0$.

როგორც ნატურალურ, ასევე არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლეს გააჩნია უმცირესი ელემენტი, ხოლო უდიდესი–არ გააჩნია. N სიმრავლის უმცირესი ელემენტია 1, Z_0 სიმრავლისა კი–0.

ზრდის მიხედვით დალაგებული ნატურალური რიცხვები ქმნიან ე. წ. ნატურალურ რიცხვთა რიგს.

გავეცნოთ ხუთ ძირითად მოქმედებას არაუარყოფით მთელ რიცხვებზე: შეკრებას, გამოკლებას, გამრავლებას, გაყოფას და ახარისხებას.

1. შეკრება. m და n ნატურალური რიცხვების ჯამი ეწოდება რიცხვს, რომელიც ნატურალურ რიცხვთა რიგში m-დან n ერთეულით მარჯვნივ მდებარეობს და $m+n$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ჯამის პოვნის ოპერაციას შეკრება ეწოდება. შევნიშნოთ, რომ $m+n=n+m$.

მაგალითად, 2+3 არის რიცხვი, რომელიც ნატურალურ რიცხვთა 1,2,3,4,5,6,7,… რიგში 2-დან 3 ერთეულით მარჯვნივ მდებარეობს, ასეთი კი არის რიცხვი 5, ე. ი. 2+3=5.

ამავე დროს ვიგულისხმოთ, რომ ნებისმიერი $m \in Z_0$ რიცხვისათვის $m+0=0+m=m$. ცხადია, რომ თუ $m, n \in Z_0$, მაშინ $m+n \in Z_0$.

იმისათვის, რომ შევკრიბოთ რამდენიმე ნატურალური რიცხვი, საჭიროა ჯერ შევკრიბოთ პირველი ორი რიცხვი, მიღებულ ჯამს დავუმატოთ შემდეგი რიცხვი და ა. შ.

2. გამოკლება. m და n $(m \geq n)$ არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სხვაობა ეწოდება ისეთ x რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $n+x=m$ და $m-n$ სიმბოლოთი აღინიშნება. m-ს ეწოდება საკლები, n-ს კი მაკლები. სხვაობის პოვნის ოპერაციას გამოკლება ეწოდება.

3. გამრავლება. m და n ნატურალურ რიცხვთა ნამრავლი ეწოდება ისეთ n შესაკრებთა ჯამს, რომელთაგან თითოეული m-ის ტოლია და $m \times n$, $m \cdot n$, mn სიმბოლოთი აღინიშნება. ე. ი.

$$m \cdot n = \underbrace{m+m+\cdots+m}_{n-\text{ჯერ}}.$$

შევნიშნოთ, რომ $mn=nm$.

შევთანხმდეთ, რომ ნებისმიერი $m \in Z_0$ რიცხვისათვის $m \cdot 0 = 0 \cdot m = 0$.

ცხადია, რომ თუ $m,n \in Z_0$, მაშინ $m \cdot n \in Z_0$. ამავე დროს $m \cdot n = 0$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $m=0$ ან $n=0$.

იმისათვის, რომ გადავამრავლოთ რამდენიმე ნატურალური რიცხვი, საჭიროა ჯერ გადავამრავლოთ პირველი ორი რიცხვი, მიღებული ნამრავლი გავამრავლოთ შემდეგ რიცხვზე და ა. შ.

4. გაყოფა. $m \in Z_0$ და $n \in N$ რიცხვების განაყოფი ეწოდება ისეთ x რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $nx = m$ და $m:n$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

0-ზე გაყოფა არ განისაზღვრება.

ცხადია, რომ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში ნებისმიერი m და n რიცხვების განაყოფი ყოველთვის არ არსებობს.

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $m \in Z_0$ და $n \in N$ რიცხვებისათვის მოიძებნება $p,k \in Z_0$ რიცხვები, რომელთათვისაც $m=np+k$, სადაც $0 \le k < n$.

თუ $k=0$, ამბობენ, რომ m იყოფა n-ზე უნაშთოდ, ხოლო თუ $k \ne 0$, მაშინ m იყოფა n-ზე ნაშთით k.

5. ახარისხება. m რიცხვის n-ური ხარისხი, სადაც $m \in Z_0$, $n \in N$, $n \ne 1$ ეწოდება n თანამამრავლთა ნამრავლს, რომელთაგან თითოეული m-ის ტოლია და m^n სიმბოლოთი აღინიშნება, ე. ი.

$$m^n = \underbrace{m \cdot m \ldots m}_{n-ჯერ}, \quad n \ge 2.$$

m-ს ხარისხის ფუძე ეწოდება, n-ს კი—ხარისხის მაჩვენებელი. მიღებულია, რომ $m^1 = m$ და თუ $m \ne 0$, $m^0 = 1$.

0^0 არ განისაზღვრება.

შეკრებას და გამოკლებას I საფეხურის მოქმედებები ეწოდება, გამრავლებას და გაყოფას II საფეხურისა, ხოლო ახარისხებას III საფეხურის მოქმედება. თუ შესასრულებელია რამდენიმე მოქმედება, პირველ რიგში სრულდება უფრო მაღალი საფეხურის მოქმედება. ერთი და იმავე საფეხურის მოქმედებები სრულდება მიმდევრობით მარცხნიდან მარჯვნივ. მაგალითად,

$$7 - 6 : 3 + 5 \cdot 4^2 = 7 - 6 : 3 + 5 \cdot 16 =$$
$$= 7 - 2 + 80 = 85.$$

იმის აღსანიშნავად, რომ მოქმედებათა შესრულების რიგი დარღვეულია, გამოიყენება ფრჩხილები. ამ შემთხვევაში პირველ რიგში სრულდება ფრჩხილებში მოთავსებული მოქმედებანი. მაგალითად:

$$(3 + 5) : 2 = 8 : 2 = 4.$$

II. თვლის სისტემები. რადგან ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა, ამიტომ შეუძლებელია ყოველი მათგანისათვის განსხვავებული სიმბოლოს შერჩევა. პრაქტიკულად უფრო მოსახერხებელია ნატურალურ რიცხვთა ჩაწერის ეგრეთ წოდებული პოზიციური სისტემები. ეს სისტემები გულისხმობენ სასრული რაოდენობის სიმბოლოთა მეშვეობით ჩაიწეროს ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი, სიმბოლოთა ურთიერთმდებარეობის (პოზიციის) გათვალისწინებით. იმისდა მიხედვით, თუ რამდენ ძირითად სიმბოლოს ავირჩევთ, გვექნება რიცხვის ჩაწერის „ორობითი“; „რვაობითი“; „ათობითი“ და ა.შ. სისტემები ყველაზე უფრო გავრცელებულია ათობითი სისტემა, სადაც გამოიყენება Z_0 სიმრავლის ათი ელემენტი: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, რომელთაც ციფრები ეწოდება. მაგალითად, რიცხვი 7256 შედგება ოთხი ციფრისაგან,

რომლებიც თავისი მდებარეობის (პოზიციის) მიხედვით მიუთითებენ, რომ რიცხვი შედგება 6 ერთეულის, 5 ათეულის, 2 ასეულის და 7 ათასეულისაგან, ე.ი. რიცხვი 7256 გაშლილი ფორმით ასე წარმოიდგინება

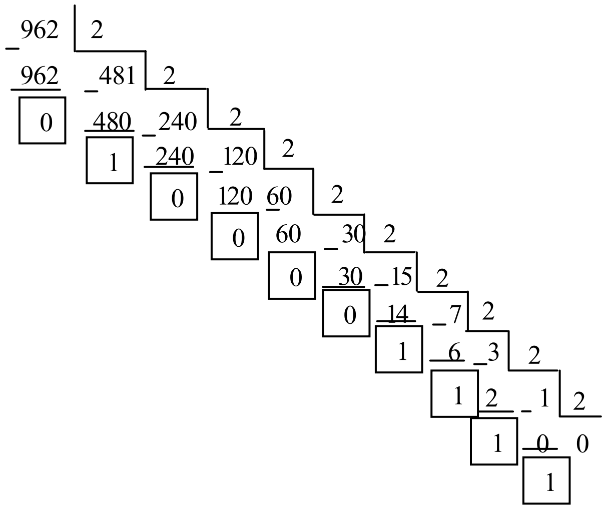
$$7256 = 7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6$$

ათობითი სისტემის გარდა ძირითადად ხმარებაშია აგრეთვე „ორობითი“ და „რვაობითი“ სისტემები. ორობითი სისტემის შემოღება დაკავშირებულია ელექტრონულ-გამომთვლელი მანქანის ელემენტების ორ მდგრად მდგომარეობასთან – სადენი ან ატარებს დენს, ან არ ატარებს, რაც მხოლოდ ორი ძირითადი სიმბოლოს გამოყენების საშუალებას იძლევა. ამ სისტემაში ნებისმიერი რიცხვის ჩასაწერად გამოიყენება Z_0 სიმრავლის ორი ელემენტი: 0 და 1. მაგალითად, სისტემის ფუძე „ორი“ გამოისახება როგორც „10“. ამ რიცხვისათვის ერთის მიმატებით მიიღება 11. ე.ი. რიცხვი 3-ის ორობითი ჩანაწერი; კიდევ ერთი ერთეულის დამატებით მივიღებთ რიცხვს, რომლის ორობით სისტემაში ჩასაწერად საჭიროა ახალი თანრიგის დამატება, რის შედეგადაც მივიღებთ 100-ს, რიცხვი 4-ის ორობით ჩანაწერს და ა.შ. ნატურალურ რიცხვთა პირველი 15 ელემენტის ორობითი ჩანაწე-რი მოყვანილია შემდეგ ცხრილში*:

$1_{10} = 1_2$	$5_{10} = 101_2$	$9_{10} = 1001_2$	$13_{10} = 1101_2$
$2_{10} = 10_2$	$6_{10} = 110_2$	$10_{10} = 1010_2$	$14_{10} = 1110_2$
$3_{10} = 11_2$	$7_{10} = 111_2$	$11_{10} = 1011_2$	$15_{10} = 1111_2$
$4_{10} = 100_2$	$8_{10} = 1000_2$	$12_{10} = 1100_2$	

რიცხვის ათობითი სისტემიდან ორობითში გადაყვანის ალგორითმი სრულდება ფუძეზე – 2-ზე, მიმდევრობით გაყოფის გზით. მაგალითად 962-სთვის გვაქვს:

* ინდექსი მიუთითებს სისტემის ფუძეს.



გაყოფის შედეგად მიღებული 0,1,0,0,0,0,1,1,1,1 ნაშთების მიმდევრობა, აღებული შებრუნებული რიგით, გვაძლევს ორობით სისტემაში რიცხვ 962-ის გამოსახულებას, ე.ი.

$$962_{10} = 1111000010_2.$$

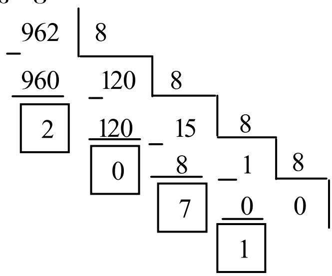
აღნიშნული რიცხვი გაშლილი ფორმით შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$1\cdot 2^9+1\cdot 2^8+1\cdot 2^7+1\cdot 2^6+0\cdot 2^5+0\cdot 2^4+0\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+0\cdot 2^0.$$

როგორც აქედან ჩანს რიცხვის ორობითი ჩანაწერი შეიცავს ციფრთა გაცილებით მეტ რაოდენობას, ვიდრე ათობითი, რაც რიცხვის ზრდასთან ერთად უფრო შესამჩნევი ხდება. მაგალითად, ადვილია შემოწმება, რომ

$$3851_{10} = 111100001011_2.$$

სავსებით ანალოგიურად, რიცხვის ათობით სისტემიდან რვაობითში გადასაყვანად, სადაც გამოიყენება Z_0 სიმრავლის 8 ელემენტი: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, მივმართავთ ახალ ფუძეზე – 8-ზე მიმდევრობით გაყოფას:



ე. ი. $962_{10} = 1702_8$.

როგორც უკვე აღინიშნა, ელექტრონულ-გამომთვლელ მანქანა-ში რიცხვები ჩაიწერება ორობითი სისტემით, თუმცა მანქანაში ჩასაშვებად გამზადებული საწყისი მონაცემები ყოველთვის ათობით სისტემაშია მოცემული. მათი ორობით სისტემაში გადასაყვანად უფრო მოსახერხებელია ისინი ჯერ რვაობით სისტემაში ჩავწეროთ, შემდეგ კი თითოეული ციფრი შევცვალოთ ზემოთ მოყვანილი ცხრილის მეშვეობით ორობითი ჩანაწერით, ამასთან უნდა ვიგულისხმოთ, რომ თითოეულ ციფრს სამი თანრიგი (ტრიადა) შეესაბამება, გარდა შესაძლებელია უკიდურესი მარცხენა ციფრისა, თუ იგი ოთხზე ნაკლებია.

მაგალითად: რადგან $2_{10}=010_2$; $0_{10}=000_2$; $7_{10}=111_2$; $1_{10}=1_2$, ამიტომ $962_{10} =1702_8=1.111.000.010_2$.

ძველი ფუძიდან ახალ ფუძეზე გადასვლის ოპერაციას „კოდირე-ბა“ ეწოდება, ხოლო შებრუნებულ ოპერაციას – „დეკოდირება“. დეკოდირების ოპერაცია სრულდება შემდეგნაირად:

$1111000\ 010_2 = 1\cdot2^9 + 1\cdot2^8 + 1\cdot2^7 + 1\cdot2^6 + 0\cdot2^5 + 0\cdot2^4 + 0\cdot2^3 + 0\cdot2^2 +$
$+1\cdot2^1 + 0\cdot2^0 = 512+256+128+64+0+0+0+0+2+0=962_{10}$.

ან რვაობითი სისტემის გამოყენებით შეიძლება მისი შესრულება უფრო სწრაფად:

$1\cdot111\cdot000\cdot010_2 = 1702_8 = 1\cdot8^3 + 7\cdot8^2 + 0\cdot8^1 + 2\cdot8^0 = 512+448+2=962_{10}$

შემდგომში ვისარგებლებთ მხოლოდ ათობით სისტემაში ჩაწერილი რიცხვებით.

§2. გაყოფადობის ნიშნები

0, 2, 4, 6 და 8 ციფრებს ლუწი ეწოდება, ხოლო ციფრებს 1, 3, 5 , 7 და 9–კენტი.

2-ზე გაყოფადობის ნიშანი. 2-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვი, რომელიც ლუწი ციფრით ბოლოვდება.

$m\in Z_0$ რიცხვს, რომელიც 2-ზე იყოფა, ლუწი რიცხვი ეწოდება. ყოველი ლუწი რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს $m=2k$ სახით, სადაც $k\in Z_0$.

$n\in Z_0$ რიცხვს, რომელიც 2-ზე არ იყოფა, კენტი რიცხვი ეწოდება. ყოველი კენტი n რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს $n=2k+1$ სახით, სადაც $k\in Z_0$.

3-ზე გაყოფადობის ნიშანი. 3-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვი, რომლის ციფრთა ჯამი იყოფა 3-ზე.

მაგალითად, 1956 იყოფა 3-ზე, რადგან 1+9+5+6=21 იყოფა 3-ზე.

4-ზე გაყოფადობის ნიშანი. იმისათვის, რომ რიცხვი, რომელიც შეიცავს არანაკლებ სამ ციფრს, გაიყოს 4-ზე, საჭიროა, რომ ბოლო ორი ციფრით შედგენილი ორნიშნა რიცხვი იყოფოდეს 4-ზე.

მაგალითად, 25436 იყოფა 4-ზე, რადგან 36 იყოფა 4-ზე, აგრეთვე 1700 იყოფა 4-ზე, რადგან იგი ორი ნულით ბოლოვდება.

5-ზე გაყოფადობის ნიშანი. ხუთზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვი, რომელიც ბოლოვდება 0-ით ან 5-ით.

6-ზე გაყოფადობის ნიშანი. 6-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვი, რომელიც ლუწია და იყოფა 3-ზე.

მაგალითად, 216 იყოფა 6-ზე, რადგან იგი ლუწია და 2+1+6=9 იყოფა 3-ზე.

9-ზე გაყოფადობის ნიშანი. 9-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვი, რომლის ციფრთა ჯამი იყოფა 9-ზე.

მაგალითად, 1791 იყოფა 9-ზე, რადგან 1+7+9+1=18 იყოფა 9-ზე.

10-ზე გაყოფადობის ნიშანი. 10-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვი, რომელიც 0-ით ბოლოვდება.

11-ზე გაყოფადობის ნიშანი. 11-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვი, რომლის კენტ ადგილებზე მდგომ ციფრთა ჯამი უდრის ლუწ ადგილებზე მდგომ ციფრთა ჯამს, ან განსხვავდება რიცხვით, რომელიც იყოფა 11-ზე.

მაგალითად, 1562 იყოფა 11-ზე, რადგან 1+6=5+2. აგრეთვე 19272506 იყოფა 11-ზე, რადგან 1+2+2+0=5, 9+7+5+6=27 და 27-5=22 იყოფა 11-ზე.

§3. მარტივი და შედგენილი რიცხვები. უდიდესი საერთო გამყოფი. უმცირესი საერთო ჯერადი

განსაზღვრება. n ნატურალური რიცხვის გამყოფი ეწოდება ისეთ m ნატურალურ რიცხვს, რომელზედაც n იყოფა უნაშთოდ.

ცხადია, რომ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვის გამყოფთა სიმრავლე სასრულია. მაგალითად, 12-ის გამყოფთა სიმრავლეა {1, 2, 3, 4, 6, 12}.

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი უნაშთოდ იყოფა 1-ზე და თავის თავზე. ამრიგად, 1-ისაგან განსხვავებულ ყოველ ნატურალურ რიცხვს ორი გამყოფი მაინც აქვს.

განსაზღვრება. ნატურალურ რიცხვს ეწოდება მარტივი, თუ მას მხოლოდ ორი გამყოფი აქვს, ხოლო–შედგენილი, თუ მისი გამყოფთა რიცხვი ორზე მეტია.

მაგალითად, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19–მარტივი რიცხვებია, ხოლო 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15–შედგენილი. რიცხვი 1 არც მარტივია და არც შედგენილი. მტკიცდება, რომ როგორც მარტივ რიცხვთა სიმრავლე, ისე შედგენილ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა.

ვიტყვით, რომ რიცხვი დაშლილია მარტივ მამრავლებად, თუ იგი წარმოდგენილია მარტივ რიცხვთა ნამრავლის სახით.

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი შედგენილი რიცხვი იშლება მარტივ მამრავლებად და ეს დაშლა ერთადერთია.

შედგენილი რიცხვის მარტივ მამრავლებად დასაშლელად საჭიროა გავყოთ ეს რიცხვი უმცირეს მარტივ გამყოფზე, მიღებულ განაყოფს მოვექცეთ ანალოგიურად და ა. შ., ვიდრე განაყოფში არ მივიღებთ 1-ს. მაგალითად, 420:2=210, 210:2=105, 105:3=35, 35:5=7, 7:7=1. მარტივ მამრავლებად დაშლის ალგორითმი მოსახერხებელია ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$\begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

სადაც ვერტიკალური ხაზის მარჯვნივ გვაქვს საძიებელი მარტივი მამრავლები. ამრიგად, დაშლას ექნება სახე:

$$420=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$$

განსაზღვრება. რამდენიმე ნატურალური რიცხვის საერთო გამყოფი ეწოდება რიცხვს, რომელიც თითოეული მათგანის გამყოფს წარმოადგენს.

მაგალითად, 18-ის, 24-ისა და 36-ის საერთო გამყოფებია: 1, 2, 3 და 6.

განსაზღვრება. $m,n,\ldots,k$ ნატურალური რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი ეწოდება მათ საერთო გამყოფებს შორის უდიდესს და $D(m,n,\ldots,k)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

განსახილველი რიცხვების საერთო გამყოფთა სიმრავლე წარმოადგენს მათ გამყოფთა სიმრავლეების თანაკვეთას; ეს სიმრავლე სასრულია და მისი უდიდესი ელემენტი არის ამ რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი.

მაგალითად, $D(18, 24, 36)=6$.

უდიდესი საერთო გამყოფის მოსაძებნად საჭიროა ეს რიცხვები დავშალოთ მარტივ მამრავლებად, ამოვწეროთ მათი საერთო მამრავლები და გადავამრავლოთ. მაგალითად,

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

ე. ი. $24=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3$ და $36=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$, ამიტომ $D(24,36)=2\cdot 2\cdot 3=12$. რადგან 24-ისა და 36-ის გაშლაში რიცხვი 2 საერთო მამრავლად შედის 2-ჯერ, ხოლო 3 ერთხელ.

განსაზღვრება. ორ ნატურალურ რიცხვს ეწოდება ურთიერთმარტივი, თუ მათი უდიდესი საერთო გამყოფი 1-ის ტოლია.

ასე მაგალითად, რადგან $D(18,25)=1$, ამიტომ 18 და 25 ურთიერთმარტივი რიცხვებია.

განსაზღვრება. n ნატურალური რიცხვის ჯერადი ეწოდება ისეთ m ნატურალურ რიცხვს, რომელიც n-ზე იყოფა უნაშთოდ.

ნებისმიერი ნატურალური რიცხვის ჯერადთა სიმრავლე უსასრულოა, მის უმცირეს ელემენტს წარმოადგენს თვით ეს რიცხვი, ხოლო უდიდესი ელემენტი არ გააჩნია. მაგალითად, 12-ის ჯერადთა სიმრავლეა $\{12,24,36,48,\ldots\}$.

განსაზღვრება. რამდენიმე ნატურალური რიცხვის საერთო ჯერადი ეწოდება რიცხვს, რომელიც თითოეული მათგანის ჯერადს წარმოადგენს.

მაგალითად, 18-ის, 24-ისა და 36-ის საერთო ჯერადებია: 72, 144, 216,…

განსაზღვრება. $m,n,\ldots,k$ ნატურალური რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადი ეწოდება მათ საერთო ჯერადთა შორის უმცირესს და $K(m,n,\ldots,k)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

განსახილველი რიცხვების საერთო ჯერადთა სიმრავლე წარმოადგენს მათ ჯერადთა სიმრავლეების თანაკვეთას. ეს სიმრავლე უსასრულოა, მაგრამ არსებობს მისი უმცირესი ელემენტი და იგი ამ რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადის ტოლია. მაგალითად, $K(18, 24, 36)=72$.

რამდენიმე რიცხვის უმცირესი საერთო ჯერადის მოსაძებნად საჭიროა ეს რიცხვები დავშალოთ მარტივ მამრავლებად, ამოვწეროთ ერთ-ერთი მათგანის ყველა მამრავლი და მივუწეროთ მათ მეორე რიცხვის ის მამრავლები, რომლებიც აკლია ამოწერილ მამრავლებს, შემდეგ მივუწეროთ მესამე

რიცხვის ის მამრავლები, რომლებიც აკლია უკვე ამოწერილ მამრავლებს და ა. შ. მოცემული რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადი უდრის ყველა ამოწერილ მამრავლთა ნამრავლს.

მაგალითად, $24=2\cdot2\cdot2\cdot3$, $36=2\cdot2\cdot3\cdot3$, ამიტომ $K(24, 36)=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3=72$, რადგან 24-ის $2\cdot2\cdot2\cdot3$ გაშლას აკლია ერთი 3-იანი 36-ის გაშლიდან.

შევნიშნოთ, რომ, თუ $m,n\in N$, მაშინ

$$D(m,n)\cdot K(m,n)=mn$$

§4. მთელი რიცხვები

ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლეში ყოველთვის შესაძლებელია შეკრების ოპერაციის შესრულება, ე. ი. ნებისმიერი ორი ნატურალური რიცხვის ჯამი კვლავ ნატურალური რიცხვია. რაც შეეხება გამოკლებას, ეს ოპერაცია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში ყოველთვის არ სრულდება. მაგალითად, არ არსებობს ნატურალური რიცხვი, რომელიც $2-5$ ოპერაციის შედეგია.

გამოკლების ოპერაცია რომ ყოველთვის შესაძლებელი იყოს, შემოვიღოთ ე. წ. მთელი უარყოფითი რიცხვები–ნატურალური რიცხვები აღებული “–” ნიშნით. ამრიგად, -1, -2, -3,… მთელი უარყოფითი რიცხვებია. n და $-n$ რიცხვებს მოპირდაპირე რიცხვები ეწოდება. ე. ი. 1 და -1, 2 და -2, 3 და -3 და ა. შ. მოპირდაპირე რიცხვებია. მიღებულია, რომ თუ $m\in N$, მაშინ $-(-m)=m$.

განსაზღვრება. ნატურალურ რიცხვებს, მათ მოპირდაპირე რიცხვებს და ნულს მთელი რიცხვები ეწოდება.

მთელ რიცხვთა სიმრავლე Z ასოთი აღინიშნება. ცხადია, რომ $N\subset Z$. ჩავთვალოთ, რომ ნებისმიერი არაუარყოფითი მთელი რიცხვი მეტია ნებისმიერ მთელ უარყოფით რიცხვზე, ხოლო $-m>-n$ ($m,n\in N$), თუ $m<n$. მაგალითად, 3>-5, 0>-2, -3>-7.

შემოვიღოთ ძირითადი მოქმედებები მთელ რიცხვებზე.

1. შეკრება. თუ ორივე შესაკრები არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, მათი ჯამი განსაზღვრულია §1-ში. თუ შესაკრები რიცხვებიდან ერთი მაინც უარყოფითია, მაშინ შეკრების ოპერაცია განისაზღვრება შემდეგნაირად:

ა) $(-m)+(-n)=-(m+n)$;

ბ) $(-m)+0=0+(-m)=-m$;

გ) $m+(-n)=-n+m=\begin{cases} m-n, \text{ როცა } m>n; \\ -(n-m), \text{ როცა } m<n; \\ 0, \text{ როცა } m=n, \end{cases}$

სადაც $m,n\in N$.

მაგალითად, (-7)+(-3)=-(7+3)=-10; 4+(-9)=-(9-4)=-5.

იმისათვის, რომ შევკრიბოთ რამდენიმე მთელი რიცხვი, საჭიროა ჯერ შევკრიბოთ პირველი ორი რიცხვი, მიღებულ ჯამს დავუმატოთ შემდეგი რიცხვი და ა. შ.

2. გამოკლება. a და b მთელი რიცხვების სხვაობა ეწოდება ისეთ x რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $b+x=a$ და $a-b$ სიმბოლოთი აღინიშნება. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $a-b=a+(-b)$; საიდანაც ცხადია, რომ მთელ რიცხვთა სიმრავლეში გამოკლების ოპერაცია ყოველთვის სრულდება.

მაგალითად, 2-5=2+(-5)=-(5-2)=-3.

3. გამრავლება. არაუარყოფით მთელ რიცხვთა გამრავლება განსაზღვრულია §1-ში. თუ გადასამრავლებელი რიცხვებიდან ერთი მაინც უარყოფითია, მაშინ გამრავლების ოპერაცია განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

ა) $(-m)n=m(-n)=-(mn)$;

ბ) $(-m)(-n)=mn$;

გ) $(-m)\cdot 0=0\cdot(-m)=0$,

სადაც $m,n\in N$.

მაგალითად, $(-3)\cdot 2=-(3\cdot 2)=-6$; $(-4)(-5)=4\cdot 5=20$.

იმისათვის, რომ გადავამრავლოთ რამდენიმე მთელი რიცხვი, საჭიროა ჯერ გადავამრავლოთ პირველი ორი რიცხვი, მიღებული ნამრავლი გავამრავლოთ შემდეგ რიცხვზე და ა. შ.

4. გაყოფა. a და $b\neq 0$ მთელი რიცხვების განაყოფი (ფარდობა) ეწოდება ისეთ x რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $b\cdot x=a$ და $a{:}b$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

0-ზე გაყოფა არ განისაზღვრება.

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ თუ $m,n\in N$, მაშინ:

ა) $(-m):n=m:(-n)=-(m:n)$;

ბ) $(-m):(-n)=m:n$;

გ) $0:(-m)=0$.

მაგალითად, $(-12):3=-(12:3)=-4$; $10:(-2)=-(10:2)=-5$; $(-21):(-7)=21:7=3$.

§5. ჩვეულებრივი წილადები. რაციონალური რიცხვები

ნატურალურ რიცხვთა N სიმარვლეში ყოველთვის შესაძლებელია გამრავლების ოპერაციის შესრულება. ე. ი. ნებისმიერი ორი ნატურალური რიცხვის ნამრავლი კვლავ ნატურალური რიცხვია. რაც შეეხება გაყოფას–ეს ოპერაცია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში ყოველთვიოს არ სრულდება. მაგალითად, არ არსებობს ნატურალური რიცხვი, რომელიც 3:7 ოპერაციის შედეგია.

გაყოფის ოპერაცია რომ ყოველთვის შესაძლებელი იყოს, შემოვიღოთ ე. წ. წილადი რიცხვები. რიცხვი, რომელიც წარმოადგენს რიცხვი 1-ის n-ურ ნაწილს $(n \in N, n \neq 1)$ აღინიშნება $\frac{1}{n}$ სიმბოლოთი. თუ ასეთი ნაწილი აღებულია m-ჯერ, მაშინ მიღებული რიცხვი აღინიშნება $\frac{m}{n}$ სიმბოლოთი. მიღებულია, რომ ნებისმიერი $m \in N$ რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს $\frac{m}{1}$ სახითაც. $\frac{m}{n}$ სახის რიცხვს, სადაც $m, n \in N$, წილადი რიცხვი ეწოდება. m-ს წილადის მრიცხველი ეწოდება, ხოლო n-ს მნიშვნელი. თუ $m < n$, წილადს წესიერი ეწოდება, ხოლო თუ $m \geq n$–არაწესიერი.

მაგალითად, $\frac{2}{5}$ წესიერი წილადია, ხოლო $\frac{17}{3}$, $\frac{15}{5}$ და $\frac{6}{6}$ არაწესიერი.

თუ არაწესიერი წილადის მრიცხველი უნაშთოდ იყოფა მნიშვნელზე, მაშინ წილადი ნატურალურ რიცხვს წარმოადგენს. მაგალითად, $\frac{15}{5}=3$, $\frac{6}{6}=1$.

თუ არაწესიერი წილადის მრიცხველი უნაშთოდ არ იყოფა მნიშვნელზე, მაშინ იგი შეიძლება წარმოვადგინოთ ე. წ. შერეული წილადის სახით, რომელიც შედგება მთელი და წილადი ნაწილისაგან. მთელი ნაწილი წარმოადგენს მრიცხველის მნიშვნელზე გაყოფის შედეგად მიღებულ განაყოფს, წილადი ნაწილის მრიცხველია ნაშთი, ხოლო მნიშვნელი უცვლელია. მაგალითად, $\frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$.

იმისათვის, რომ შერეული წილადი გადავაქციოთ არაწესიერ წილადად, საჭიროა მთელი გავამრავლოთ მნიშვნელზე,

დავუმატოთ მრიცხველი და დავწეროთ მრიცხველად, ხოლო მნიშვნელი უცვლელად დავტოვოთ. მაგალითად,

$$3\frac{4}{7}=\frac{3\cdot 7+4}{7}=\frac{25}{7}.$$

$\frac{m}{n}$ და $\frac{n}{m}$ წილადებს ეწოდება ურთიერთშებრუნებული.

ამბობენ, რომ $\frac{m}{n}$ და $\frac{p}{q}$ წილადები ტოლია, თუ $mq=pn$.

მაგალითად, $\frac{4}{6}=\frac{6}{9}$, რადგან $4\cdot 9=6\cdot 6$. აქედან გამომდინარეობს წილადის ძირითადი თვისება: თუ წილადის მრიცხველსა და მნიშვნელს გავამრავლებთ ან გავყოფთ ნულისაგან განსხვავებულ ერთსა და იმავე რიცხვზე, ამით წილადის სიდიდე არ შეიცვლება. მაგალითად,

$$\frac{9}{12}=\frac{9\cdot 2}{12\cdot 2}=\frac{18}{24};\quad \frac{9}{12}=\frac{9:3}{12:3}=\frac{3}{4}.$$

წილადების შედარება. ტოლმნიშვნელიან წილადებს შორის ის არის მეტი, რომლის მრიცხველიც მეტია, ხოლო ტოლმრიცხველიან წილადებს შორის ის, რომლის მნიშვნელიც ნაკლებია. მაგალითად,

$$\frac{4}{9}<\frac{7}{9};\ \frac{10}{17}<\frac{10}{13}.$$

საზოგადოდ, წილადები რომ შევადაროთ, საჭიროა წილადის ძირითად თვისებაზე დაყრდნობით ისინი ჯერ გავაერთმნიშვნელიანოთ. გაერთმნიშვნელიანებისათვის საჭიროა მოვძებნოთ მნიშვნელების უმცირესი საერთო ჯერადი, რომელიც მივიღოთ საერთო მნიშვნელად; თითოეული წილადისათვის ვიპოვოთ ე. წ. დამატებითი მამრავლი, რომელიც მიიღება საერთო მნიშვნელის გაყოფით ამ წილადის მნიშვნელზე და მრიცხველები გავამრავლოთ შესაბამის დამატებით მამრავლებზე. მაგალითად, შევადაროთ $\frac{4}{15}$ და $\frac{5}{18}$; $K(15,\ 18)=90$. პირველი წილადის დამატებითი მამრავლია $90:15=6$, ხოლო მეორის–$90:18=5$, ამიტომ $\frac{4}{15}=\frac{4\cdot 6}{90}=\frac{24}{90}$ და $\frac{5}{18}=\frac{5\cdot 5}{90}=\frac{25}{90}$. რადგან $\frac{24}{90}<\frac{25}{90}$, ამიტომ $\frac{4}{15}<\frac{5}{18}$.

მოქმედებანი წილადებზე. ტოლმნიშვნელიანი წილადები რომ შევკრიბოთ, საჭიროა შევკრიბოთ მათი მრიცხველები და

დავწეროთ მრიცხველად, ხოლო მნიშვნელი უცვლელად დავტოვოთ. სხვადასხვამნიშვნელიანი წილადები რომ შევკრიბოთ, საჭიროა ისინი ჯერ გავაერთმნიშვნელიანოთ და შემდეგ შევკრიბოთ. მაგალითად,

$$\frac{4}{13}+\frac{7}{13}=\frac{4+7}{13}=\frac{11}{13};$$

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{12}=\frac{3\cdot 3+5\cdot 2}{24}=\frac{19}{24}.$$

შერეული წილადები რომ შევკრიბოთ, საჭიროა ცალ-ცალკე შევკრიბოთ მათი მთელი და წილადი ნაწილები. მაგალითად,

$$2\frac{3}{8}+5\frac{1}{4}=7\frac{3+2}{8}=7\frac{5}{8};$$

$$3\frac{7}{12}+1\frac{5}{6}=4\frac{7+10}{12}=4\frac{17}{12}=5\frac{5}{12}.$$

ტოლმნიშვნელიანი წილადები რომ გამოვაკლოთ, საჭიროა გამოვაკლოთ მათი მრიცხველები და დავწეროთ მრიცხველად, ხოლო მნიშვნელი უცვლელად დავტოვოთ. სხვადასხვამნიშვნელიანი წილადები რომ გამოვაკლოთ, საჭიროა ისინი ჯერ გავაერთმნიშვნელიანოთ და შემდეგ გამოვაკლოთ. მაგალითად,

$$\frac{8}{11}-\frac{3}{11}=\frac{8-3}{11}=\frac{5}{11};$$

$$\frac{7}{12}-\frac{2}{9}=\frac{7\cdot 3-2\cdot 4}{36}=\frac{13}{36}.$$

შევნიშნოთ, რომ წილად რიცხვთა სიმრავლეში გამოკლების ოპერაცია ყოველთვის არ სრულდება. იმისათვის, რომ გამოკლება ყოველთვის შესაძლებელი იყოს, შემოვიღოთ ე. წ. უარყოფითი წილადი რიცხვები. უარყოფითი წილადი წარმოადგენს "–" ნიშნით აღებულ ჩვეულებრივ წილადს, ე. ი. $-\frac{m}{n}$ სახის რიცხვს, სადაც $m,n\in N$. მიღებულია, რომ $\frac{-m}{n}=\frac{m}{-n}=-\frac{m}{n}$.

მაგალითად, $\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$ წარმოადგენს უარყოფით წილადს. მართლაც:

$$\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=\frac{1\cdot 3-5\cdot 2}{12}=\frac{3-10}{12}=\frac{-7}{12}=-\frac{7}{12}.$$

შერეული წილადები რომ გამოვაკლოთ, საჭიროა ცალ-ცალკე გამოვაკლოთ მათი მთელი და წილადი ნაწილები. თუ მაკლების წილადი ნაწილი მეტია საკლების წილად ნაწილზე, მაშინ საკლების ერთი ერთეული უნდა ვაქციოთ არაწესიერ წილადად. მაგალითად,

$$3\frac{1}{2}-2\frac{3}{7}=1\frac{7-6}{14}=1\frac{1}{14};$$

$$5\frac{2}{5}-2\frac{7}{10}=3\frac{4}{10}-\frac{7}{10}=2\frac{14-7}{10}=2\frac{7}{10}.$$

წილადები რომ გადავამრავლოთ, საჭიროა მათი მრიცხველების ნამრავლი დავწეროთ მრიცხველად, ხოლო მნიშვნელების ნამრავლი მნიშვნელად. მაგალითად,

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3\cdot 4}{7\cdot 5}=\frac{12}{35}.$$

შერეული წილადები რომ გადავამრავლოთ, საჭიროა ისინი ჯერ გადავაქციოთ არაწესიერ წილადებად და შემდეგ გადავამრავლოთ. მაგალითად,

$$3\frac{5}{7}\cdot 2\frac{2}{13}=\frac{26}{7}\cdot\frac{28}{13}=\frac{26\cdot 28}{7\cdot 13}=8.$$

წილადი რომ წილადზე გავყოთ, საჭიროა პირველი წილადი გავამრავლოთ მეორის შებრუნებულზე. მაგალითად,

$$\frac{4}{11}:\frac{5}{6}=\frac{4}{11}\cdot\frac{6}{5}=\frac{24}{55}.$$

შერეული წილადები რომ გავყოთ, საჭიროა ისინი ჯერ გადავაქციოთ არაწესიერ წილადებად და შემდეგ გავყოთ. მაგალითად,

$$1\frac{3}{8}:2\frac{1}{5}=\frac{11}{8}:\frac{11}{5}=\frac{11}{8}\cdot\frac{5}{11}=\frac{5}{8}.$$

შევნიშნოთ, რომ წილადებზე მოქმედებანი იმ შემთხვევაში, როდესაც ერთი წილადი მაინც უარყოფითია, შეიძლება შეიცვალოს მოქმედებებით დადებით წილადებზე, ისევე, როგორც მთელ რიცხვებზე მოქმედებანი შეიძლება შეიცვალოს მოქმედებებით ნატურალურ რიცხვებზე. მაგალითად,

$$-\frac{4}{9}-\frac{2}{9}=-\left(\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\right)=-\frac{6}{9}=-\frac{2}{3};$$

$$\frac{3}{7}-\left(-\frac{1}{7}\right)=\frac{3}{7}+\frac{1}{7}=\frac{4}{7};$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{7}\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3}{7};$$

$$\frac{5}{9}:\left(-\frac{2}{3}\right)=-\left(\frac{5}{9}:\frac{2}{3}\right)=-\frac{5}{6}.$$

განსაზღვრება. $\frac{m}{n}$ სახის რიცხვებს, სადაც $m\in Z$ და $n\in N$, რაციონალური რიცხვები ეწოდება.

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე Q ასოთი აღინიშნება. ცხადია, რომ $Z\subset Q$.

§6. ათწილადები

განსაზღვრება. წილადს, რომლის მნიშვნელია 10^n, სადაც $n\in N$, ათწილადი ეწოდება.

მაგალითად, $\frac{361}{100}$, $\frac{7}{1000}$, $-\frac{105}{10}$ ათწილადებია, რადგან $100=10^2$, $1000=10^3$ და $10=10^1$.

ათწილადს ჩვეულებრივ მნიშვნელის გარეშე გამოსახავენ. წერენ მხოლოდ მრიცხველს და მარჯვნიდან მძიმით გამოყოფენ იმდენ ციფრს, რამდენი ნულიცაა მნიშვნელში; ამასთან, ზოგჯერ საჭირო ხდება წინ ნულების ჩაწერა. მაგალითად,

$$\frac{361}{100}=3{,}61;\quad \frac{7}{1000}=0{,}007;\quad -\frac{105}{10}=-10{,}5.$$

ათწილადში მძიმის მარჯვნივ მდგომ ციფრებს ათწილადი ნიშნები ეწოდება.

წილადის ძირითადი თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ ათწილადის სიდიდე არ შეიცვლება, თუ მას მარჯვნივ მივუწერთ ერთ ან რამდენიმე ნულს. მაგალითად, 12,7=12,70=12,7000.

თუ ათწილადში მძიმეს გადავიტანთ ერთი ათწილადი ნიშნით მარჯვნივ, ათწილადი გაიზრდება 10-ჯერ, ხოლო მძიმის ერთი ათწილადი ნიშნით მარცხნივ გადატანით ათწილადი 10-ჯერ შემცირდება.

მოქმედებანი ათწილადებზე. ათწილადების შეკრება-გამოკლება სრულდება მთელ რიცხვებზე მოქმედებების მსგავსად, ე. ი. სრულდება შესაბამისი თანრიგების შეკრება-გამოკლება.

მაგალითად,

$$
\begin{array}{r}
521{,}069 \\
+\quad 19{,}25 \\
\hline
540{,}319
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
162{,}17 \\
-\quad 93{,}308 \\
\hline
68{,}862
\end{array}
$$

ათწილადი რომ ათწილადზე გავამრავლოთ, საჭიროა გადავამრავლოთ ისინი, როგორც მთელი რიცხვები, ისე რომ მძიმეს ყურადღება არ მივაქციოთ და მიღებულ ნამრავლში მარჯვნიდან მძიმით გამოვყოთ იმდენი ციფრი, რამდენი ათწილადი ნიშანიცაა ორივე თანამამრავლში ერთად.

მაგალითად,

$$
\begin{array}{r}
15{,}42 \\
\times\quad 3{,}6 \\
\hline
9252 \\
+\ 4626 \\
\hline
55{,}512
\end{array}
$$

ათწილადი რომ გავყოთ მთელზე, საჭიროა ჯერ ათწილადის მთელი ნაწილი გავყოთ მთელზე რაც მოგვცემს განაყოფის მთელ ნაწილს (იგი შეიძლება ნულიც აღმოჩნდეს), შემდეგ ვწერთ მძიმეს, ნაშთს მივუწერთ პირველ ათწილად ნიშანს, მიღებულ რიცხვს ვყოფთ გამყოფზე, რაც მოგვცემს განაყოფის პირველ ათწილად ნიშანს და ყოველი შემდეგი ათწილადი ნიშნის მისაღებად ვიქცევით ანალოგიურად.

მაგალითად,

$$
\begin{array}{l}
-\,64{,}08 : 9 = 7{,}12 \\
\ \ 63 \\
\hline
\ \ -\,10 \\
\quad\ \ \ 9 \\
\hline
\quad -\,18 \\
\qquad 18 \\
\hline
\qquad\ \ 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
-\,1{,}08 : 8 = 0{,}135 \\
\quad 8 \\
\hline
-\,28 \\
\quad 24 \\
\hline
\ -\,40 \\
\quad\ \ 40 \\
\hline
\qquad 0
\end{array}
$$

ათწილადი რომ გავყოთ ათწილადზე, საჭიროა გამყოფში მძიმე უკუვაგდოთ, ხოლო გასაყოფში იგი გადავიტანოთ მარჯვნივ იმდენი ათწილადი ნიშნით, რამდენი ათწილადი ნიშანიც იყო გამყოფში (შესაძლებელია გასაყოფში მარჯვნივ დაგვჭირდეს ნულების მიწერა) და შემდეგ შევასრულოთ გაყოფა.

მაგალითად,

$$47{,}36 : 3{,}2 = 473{,}6 : 32 = 14{,}8 \qquad\qquad 20{,}8 : 3{,}25 = 2080 : 325 = 6{,}4$$

$$\begin{array}{r} -\underline{32} \\ -153 \\ \underline{128} \\ -256 \\ \underline{256} \\ 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} -\underline{1950} \\ -1300 \\ \underline{1300} \\ 0 \end{array}$$

ათწილადის გადაქცევა ჩვეულებრივ წილადად. ათწილადი რომ გადავაქციოთ ჩვეულებრივ წილადად, საჭიროა მძიმე უკუვაგდოთ და მიღებული რიცხვი დავწეროთ მრიცხველად, ხოლო მნიშვნელად ავიღოთ რიცხვი გამოსახული 1-ით და მარჯვნივ მიწერილი იმდენი ნულით, რამდენი ათწილადი ნიშანიც იყო ათწილადში.

მაგალითად,

$$1{,}25 = \frac{125}{100} = 1\frac{25}{100} = 1\frac{1}{4}; \quad 0{,}019 = \frac{19}{1000}.$$

ჩვეულებრივი წილადის გადაქცევა ათწილადად. იმისათვის, რომ ჩვეულებრივი წილადი გადავაქციოთ ათწილადად, საჭიროა მრიცხველი გავყოთ მნიშვნელზე.

შევნიშნოთ, რომ გაყოფის პროცესი ზოგჯერ შეიძლება უსასრულოდ გაგრძელდეს. მაგალითად, $\frac{7}{9} = 0{,}777\ldots$, $3\frac{6}{11} = 3{,}545454\ldots$, $4\frac{5}{12} = 4{,}4166\ldots$.

ამრიგად, გაყოფის შედეგად შეიძლება მივიღოთ ათწილადი, რომლის ათწილად ნიშანთა რაოდენობა რაგინდ დიდია. ასეთ ათწილადს უსასრულო ათწილადი ეწოდება. როგორც ზემოთ მოყვანილი მაგალითებიდან ჩანს, უსასრულო ათწილადში შეიძლება მეორდებოდეს ერთი ან რამდენიმე ათწილადი ნიშანი.

განსაზღვრება. უსასრულო ათწილადს, რომლის ერთი ან რამდენიმე ციფრი დაწყებული გარკვეული ადგილიდან, უცვლელად მეორდება ერთი და იმავე მიმდევრობით, პერიოდული ათწილადი ეწოდება, ხოლო ციფრს ან ციფრთა ერთობლიობას, რომელიც მეორდება–პერიოდი.

უსასრულო პერიოდული ათწილადის ჩაწერისას, ხშირად პერიოდს ფრჩხილებში სვამენ. მაგალითად, 0,777... =0,(7); 3,545454...=3,(54); 4,41666...=4,41(6). თუ პერიოდულ ათწილადში პერიოდი იწყება უშუალოდ მძიმის შემდეგ, მაშინ ათწილადს

წმინდა პერიოდული ეწოდება, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში–შერეული პერიოდული.

უსასრულო პერიოდული ათწილადის გადაქცევა ჩვეულებრივ წილადად. ყოველი უსასრულო პერიოდული ათწილადი შეიძლება გადავაქციოთ ჩვეულებრივ წილადად.

წმინდა პერიოდული ათწილადი ჩვეულებრივ წილადად რომ გადავაქციოთ, საჭიროა პერიოდი დავწეროთ მრიცხველად, ხოლო მნიშვნელად ავიღოთ იმდენი ცხრიანით გამოსახული რიცხვი, რამდენი ციფრიცაა პერიოდში. მაგალითად,

$$3,(45) = 3\frac{45}{99} = 3\frac{5}{11}.$$

შერეული პერიოდული ათწილადი რომ გადავაქციოთ ჩვეულებრივ წილადად, საჭიროა რიცხვს მძიმიდან პერიოდის ბოლომდე, გამოვაკლოთ რიცხვი მძიმიდან პერიოდამდე და მიღებული სხვაობა დავწეროთ მრიცხველად, ხოლო მნიშვნელად ავიღოთ რიცხვი, რომელიც გამოსახულია იმდენი ცხრიანით, რამდენი ციფრიცაა პერიოდში და მარჯვნივ მიწერილი იმდენი ნულით, რამდენი ციფრიცაა მძიმიდან პერიოდამდე.

მაგალითად,

$$6{,}2(54) = 6\frac{254-2}{990} = 6\frac{252}{990} = 6\frac{14}{55}.$$

ამრიგად, ყოველი უსასრულო პერიოდული ათწილადი შეიძლება გადავაქციოთ ჩვეულებრივ წილადად. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ყოველი ჩვეულებრივი წილადი გადაიქცევა ან სასრულ ათწილადად ან უსასრულო პერიოდულ ათწილადად.

კერძოდ:

ა) თუ უკვეცი წილადის მნიშვნელს არ გააჩნია 2-ისა და 5-ისაგან განსხვავებული მარტივი მამრავლი, მაშინ წილადი გადაიქცევა სასრულ ათწილადად;

ბ) თუ უკვეცი წილადის მნიშვნელის მარტივ მამრავლებად დაშლა არ შეიცავს 2-სა და 5-ს, მაშინ წილადი გადაიქცევა წმინდა პერიოდულ ათწილადად;

გ) თუ უკვეცი წილადის მნიშვნელის დაშლა სხვა მამრავლებთან ერთად შეიცავს თანამამრავლად 2-ს ან 5-ს, მაშინ წილადი გადაიქცევა შერეულ პერიოდულ ათწილადად.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ყოველი სასრული ათწილადი შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც უსასრულო პერიოდული, პერიოდით ნული ან პერიოდით 9, შეიძლება დავასკვნათ, რომ ნებისმიერი წილადი გამოისახება უსასრულო პერიოდული ათწილადის საშუალებით.

ამრიგად, რაციონალური რიცხვი შემდეგნაირადაც შეიძლება განისაზღვროს: უსასრულო პერიოდულ ათწილადს რაციონალური რიცხვი ეწოდება.

§7. ირაციონალური რიცხვები. ნამდვილი რიცხვები

ზოგიერთი სიდიდეების გასაზომად საკმარისი არ არის რაციონალური რიცხვები. კერძოდ, არსებობენ მონაკვეთები, რომელთა სიგრძე რაციონალური რიცხვით არ გამოისახება. ასეთია მაგალითად, იმ კვადრატის დიაგონალი, რომლის გვერდის სიგრძე ერთეულის ტოლია. მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ ამ კვადრატის დიაგონალის სიგრძე რაციონალური რიცხვით გამოისახება, მაშინ იგი წარმოიდგინება $\frac{p}{q}$ უკვეცი წილადის სახით და მართებულია ტოლობა: $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

აქედან, $p^2 = 2q^2$, ამიტომ p^2 ლუწი რიცხვია და მაშასადამე, ლუწი იქნება p-ც (რადგან კენტი რიცხვის კვადრატი ყოველთვის კენტია). ე. ი. $p=2k$, სადაც $k \in N$ და $p^2 = 2q^2$ ტოლობიდან მივიღებთ

$$4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2,$$

ე. ი. q^2 ლუწი რიცხვია და ლუწი იქნება q-ც.

მივიღეთ, რომ p და q ლუწი რიცხვებია, ეს კი ეწინააღმდეგება დაშვებას, რომ $\frac{p}{q}$ უკვეცი წილადია.

ამრიგად, ზემოთაღნიშნული კვადრატის დიაგონალის სიგრძის გამოსახვა რაციონალური რიცხვით შეუძლებელია. როგორც ვნახეთ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში არ არსებობს ისეთი რიცხვი, რომლის კვადრატი 2-ის ტოლია. ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ არ არსებობს რაციონალური რიცხვები, რომელთა კვადრატებია 3, 5, 6, 7 და ა. შ. ასეთი რიცხვები ეკუთვნიან ე. წ. ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს.

რადგან ასეთი რიცხვები არ არიან რაციონალური, ამიტომ მათი წარმოდგენა უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით შეუძლებელია.

განსაზღვრება. უსასრულო არაპერიოდულ ათწილადს ირაციონალური რიცხვი ეწოდება. ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე I ასოთი აღინიშნება.

მაგალითად, ირაციონალურია უსასრულო ათწილადი

$$0,101001000100001...,$$

რომლის ჩანაწერში პირველი 1-იანის შემდეგ არის ერთი ნული, მეორე 1-იანის შემდეგ–ორი ნული და ა. შ.

განსაზღვრება. რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეების გაერთიანებას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება და R ასოთი აღინიშნება.

ცხადია, რომ ზემოთ განხილულ N, Z_0, Z, Q და R რიცხვთა სიმრავლეებს შორის არსებობს შემდეგი დამოკიდებულება: $N \subset Z_0 \subset Z \subset Q \subset R$.

ნამდვილ რიცხვთა შედარება. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი ნამდვილი რიცხვი ან რაციონალურია ან ირაციონალური. რადგან ყოველი რაციონალური რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით, ხოლო ირაციონალური– უსასრულო არაპერიოდული ათწილადის სახით, ამიტომ შეიძლება დავასკვნათ, რომ ყოველი ნამდვილი რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ უსასრულო ათწილადის სახით შემდეგნაირად:

$$a = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots ,$$

სადაც $a_0 \in Z$, ხოლო ყოველი $a_k (k = 1,2,3,\cdots)$ წარმოადგენს ერთ-ერთს შემდეგი ციფრებიდან 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 და 9.

ორ $a = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$ და $b = b_0, b_1 b_2 b_3 \dots$ ნამდვილ რიცხვს ტოლი ეწოდება, თუ $a_k = b_k$ ნებისმიერი $k \in Z_0$ -ისათვის.

ვთქვათ, a და b არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვებია. ამბობენ, რომ $a<b$, თუ ყოველი $0 \le i < k$ -სათვის $a_i = b_i$ და $a_k < b_k$. თუ $a \ge 0$, ხოლო $b<0$, მაშინ $a>b$. თუ $a<0$ და $b<0$, მაშინ $a>b$, როცა $-a < -b$.

მოქმედებანი ნამდვილ რიცხვებზე. არაუარყოფითი $x = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ რიცხვის ათწილადი მიახლოება ნაკლებობით, სიზუსტით $\frac{1}{10^n}$ ეწოდება

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n$$

რიცხვს, ხოლო ათწილადი მიახლოება მეტობით სიზუსტით $\frac{1}{10^n}$

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n}$$

რიცხვს.

უარყოფითი $x = a_0, a_1a_2\ldots a_n\ldots$ რიცხვის ათწილადი მიახლოება ნაკლებობით (მეტობით) სიზუსტით $\frac{1}{10^n}$-მდე, ეწოდება $-a_0, a_1a_2\ldots a_n$ რიცხვის $\frac{1}{10^n}$ სიზუსტით მეტობით (ნაკლებობით) მიახლოების მოპირდაპირე რიცხვს.

ნამდვილი x რიცხვის ათწილადი მიახლოება ნაკლებობით სიზუსტით $\frac{1}{10^n}$-მდე აღვნიშნოთ x_n-ით, ხოლო მეტობით x_n'-ით.

მაგალითად, $x = 3{,}24174\ldots$ რიცხვის ათწილადი მიახლოება სიზუსტით $\frac{1}{10^4}$ ნაკლებობით არის $x_4 = 3{,}2417$, ხოლო მეტობით– $x_4' = 3{,}2418$; $x = -5{,}7138\ldots$ რიცხვის ათწილადი მიახლოება სიზუსტით $\frac{1}{10^3}$ ნაკლებობით არის $x_3 = -5{,}714$, ხოლო მეტობით– $x_3' = -5{,}713$.

ნამდვილ რიცხვთა შედარების წესიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი ნამდვილი x რიცხვისათვის

$$x_n \le x \le x_n'.$$

მტკიცდება, რომ ნებისმიერი x და y ნამდვილი რიცხვებისათვის არსებობს ერთადერთი z ნამდვილი რიცხვი, ისეთი, რომ ყოველი $n \in Z_0$ რიცხვისათვის სრულდება უტოლობა:

$$x_n + y_n \le z \le x_n' + y_n'.$$

ასეთ z რიცხვს ეწოდება x და y რიცხვების ჯამი და $x + y$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

მტკიცდება, რომ ნებისმიერი x და y არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვებისათვის არსებობს ერთადერთი z ნამდვილი რიცხვი, ისეთი, რომ ყოველი $n \in N$ რიცხვისათვის სრულდება უტოლობა:

$$x_n y_n \le z \le x_n' y_n'.$$

ასეთ z რიცხვს ეწოდება x და y რიცხვების ნამრავლი და xy სიმბოლოთი აღინიშნება.

თუ ორი ნამდვილი რიცხვიდან ერთი მაინც უარყოფითია, მაშინ მათი ნამრავლი განიმარტება შემდეგნაირად:

$$(-x)y = -(xy),$$

$$(-x)(-y) = xy,$$

სადაც $x>0$, $y>0$.

რამდენიმე ნამდვილი რიცხვის ჯამი და ნამრავლი განისაზღვრება შესაბამისად ორი ნამდვილი რიცხვის ჯამისა და ნამრავლის საშუალებით, ისევე როგორც მთელი რიცხვებისათვის.

ნამდვილი რიცხვების გამოკლება და გაყოფა განისაზღვრება, როგორც შესაბამისად შეკრებისა და გამრავლების შებრუნებული მოქმედებები.

ჩამოვაყალიბოთ ნამდვილ რიცხვთა ძირითადი თვისებები:

I. ***დალაგების თვისებები***

1. ნებისმიერი ორი a და b ნამდვილი რიცხვისათვის სრულდება ერთი და მხოლოდ ერთი შემდეგი თანაფარდობებიდან:

$$a=b,\ a>b,\ a<b.$$

2. თუ $a<b$, მოიძებნება ისეთი c რიცხვი, რომ $a<c<b$.

II. ***შეკრების თვისებები***

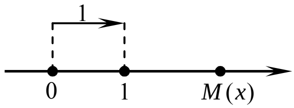
1. $a+b=b+a$ (შეკრების კომუტაციურობა);
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (შეკრების ასოციაციურობა);
3. $a+0=a$;
4. $a+(-a)=0$ (a და $-a$ მოპირდაპირე რიცხვებია);
5. თუ $a=b$, მაშინ $a+c=b+c$, სადაც c ნებისმიერია.

III. ***გამრავლების თვისებები.***

1. $ab=ba$ (გამრავლების კომუტაციურობა);
2. $(ab)c=a(bc)$ (გამრავლების ასოციაციურობა);
3. $a\cdot 1=a$;
4. $a\cdot 0=0$;
5. თუ $a=b$, მაშინ $ac=bc$;
6. $a\cdot\frac{1}{a}=1$, $(a\neq 0)$, (a და $\frac{1}{a}$ ურთიერთშებრუნებული რიცხვებია);
7. $(a+b)c=ac+bc$ (შეკრების დისტრიბუციულობა გამრავლე-ბის მიმართ).

§8. რიცხვითი წრფე. რიცხვითი შუალედები. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა

წრფეს, რომელზედაც ფიქსირებულია რაიმე O წერტილი (სათავე), არჩეულია დადებითი მიმართულება და სიგრძის ერთეული (მასშტაბი), რიცხვითი ღერძი ანუ რიცხვითი წრფე ეწოდება (ნახ. 1).



ნახ. 1

რიცხვითი ღერძის ყოველ M წერტილს შეიძლება შევუსაბამოთ ერთადერთი ნამდვილი x რიცხვი და პირიქით. ეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა შეიძლება დამყარდეს შემდეგი წესით: $x=\left|OM\right|$ (OM მონაკვეთის სიგრძეს), თუ O-დან M-საკენ მიმართულება ემთხვევა ღერძის მიმართულებას და $x=-\left|OM\right|$ – წინააღმდეგ შემთხვევაში. ამ x რიცხვს M წერტილის კოორდინატი ეწოდება. ის ფაქტი, რომ x რიცხვი M წერტილის კოორდინატია, ასე ჩაიწერება: $M(x)$. ცხადია, რომ O სათავის კოორდინატია ნული. მოცემულია წერტილი ღერძზე ნიშნავს, რომ მოცემულია წერტილის კოორდინატი.

შემდგომში ნამდვილ რიცხვსა და მის შესაბამის წერტილს ღერძზე გავაიგივებთ.

განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ზოგიერთი ქვესიმრავლე, რომელთაც რიცხვითი შუალედები ეწოდებათ.

ვთქვათ, a და b ორი ნამდვილი რიცხვია და $a<b$.

განსაზღვრება. ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $a \le x \le b$, ჩაკეტილი შუალედი (სეგმენტი) ეწოდება და $[a;b]$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე. ი.

$$[a;b]=\{x: x\in R, a\le x\le b\}.$$

ანალოგიურად

$$]a;b[=\{x: x\in R, a< x< b\}$$

სიმრავლეს ღია შუალედი (ინტერვალი) ეწოდება, ხოლო

$$[a;b[=\{x: x\in R, a\le x< b\},$$

$$]a;b]=\{x: x\in R, a< x\le b\}$$

სიმრავლეებს ნახევრად ღია შუალედები ეწოდება.

a და b რიცხვებს განხილული შუალედების საზღვრები ან ბოლოები ეწოდება, ხოლო b-a რიცხვს–შუალედის სიგრძე.

განსაზღვრება. ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $x\ge a$, უსასრულო შუალედი ეწოდება და $[a,+\infty[$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე. ი.

$$[a;+\infty[=\{x: x\in R, x\ge a\}.$$

უსასრულო შუალედებს წარმოადგენენ აგრეთვე შემდეგი სიმრავლეები:

$$]a;+\infty[= \{x : x \in R, x > a\},$$
$$]-\infty;b] = \{x : x \in R, x \leq b\},$$
$$]-\infty;b[= \{x : x \in R, x < b\}.$$

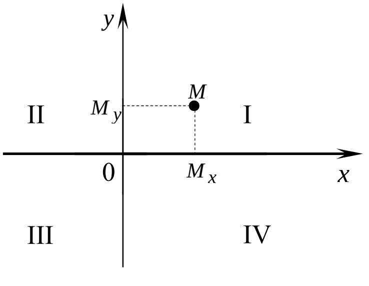
ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეც უსასრულო შუალედს წარმოადგენს და იგი ასე აღინიშნება:

$$R =]-\infty;+\infty[.$$

საერთო სათავისა და ერთნაირი მასშტაბის მქონე ორი ურთიერთპერპენდიკულარული ღერძი ქმნის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას სიბრტყეზე. საერთო O სათავეს კოორდინატთა სათავე ეწოდება, ხოლო ღერძებს–საკოორდინატო ღერძები. მათ უწოდებენ აგრეთვე აბსცისთა Ox და ორდინატთა Oy ღერძებს.

განვიხილოთ სიბრტყის ნებისმიერი M წერტილი. მისი გეგმილები Ox და Oy ღერძებზე (ნახ. 2) შესაბამისად აღვნიშნოთ M_x-ით და M_y-ით.

წერტილის დეკარტის მართკუთხა x და y კოორდინატები ეწოდება შესაბამისად M_x და M_y წერტილის კოორდინატებს სათანადო ღერძებზე. x კოორდინატს წერტილის აბსცისა ეწოდება, ხოლო y-ს ორდინატი. ის ფაქტი, რომ M წერტილის კოორდინატებია x და y ასე ჩაიწერება: $M(x;y)$. ზემოთქმულიდან ჩანს, რომ სიბრტყის ყოველ წერტილს შეესაბამება ნამდვილ რიცხვთა ერთადერთი დალაგებული წყვილი და პირიქით, ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ წყვილს შეესაბამება სიბრტყის ერთადერთი წერტილი. ამრიგად, სიბრტყის წერტილთა სიმრავლესა და ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული წყვილების სიმრავლეს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა.



ნახ. 2

საკოორდინატო ღერძები სიბრტყეს ოთხ ნაწილად ყოფს, ამ ნაწილებს მეოთხედებს ანუ კვადრატებს უწოდებენ.

ნამდვილ რიცხვთა ყველა წყვილების სიმრავლეს რიცხვითი სიბრტყე ეწოდება და R^2-ით აღინიშნება. სიბრტყეს, რომელზედაც არჩეულია კოორდინატთა სისტემა, საკოორდინატო სიბრტყე ეწოდება.

§9. ნამდვილი რიცხვის მოდული (აბსოლუტური მნიშვნელობა) და მისი თვისებები

განსაზღვრება. ნამდვილი a რიცხვის მოდული (აბსოლუტური მნიშვნელობა) ეწოდება თვით ამ რიცხვს, თუ იგი არაუარყოფითია, მის მოპირდაპირე რიცხვს, თუ იგი უარყოფითია და $|a|$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე. ი.

$$|a| = \begin{cases} a, \text{თუ } a \geq 0; \\ -a, \text{თუ } a < 0. \end{cases}$$

მაგალითად, $|12| = 12$; $|-3| = 3$; $|0| = 0$.

გეომეტრიულად ნამდვილი რიცხვის მოდული წარმოადგენს მანძილს რიცხვითი წრფის სათავიდან ამ რიცხვის შესაბამის წერტილამდე.

ნამდვილი რიცხვის მოდულის განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ $|-a| = |a|$; $-|a| \leq a \leq |a|$.

მოვიყვანოთ მოდულის ზოგიერთი თვისება:

თეორემა 1. ორი რიცხვის ჯამის მოდული არ აღემატება ამ რიცხვების მოდულების ჯამს, ე. ი.

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

ა) ვთქვათ, $a+b \geq 0$, მაშინ $|a+b| = a+b \leq |a| + |b|$.

ბ) ვთქვათ, $a+b < 0$, მაშინ $|a+b| = -(a+b) =$

$= (-a) + (-b) \leq |-a| + |-b| = |a| + |b|$.

შევნიშნოთ, რომ ეს თეორემა მართებულია შესაკრებთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის.

თეორემა 2. თუ a და b ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ:

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|.$$

დამტკიცება: გვაქვს

$$a = (a-b) + b.$$

აქედან

$$|a| \leq |a-b| + |b|,$$

ანუ

$$|a| - |b| \leq |a-b|. \qquad (1)$$

თუ a-სა და b-ს ადგილებს შევუცვლით, მაშინ (1) უტოლობიდან მივიღებთ:

$$|b| - |a| \leq |b-a|, \qquad (2)$$

ხოლო, რადგან $|a-b|=|b-a|$, (1) და (2)-დან გვექნება

$$||a|-|b||\le|a-b|.$$

თეორემა 3. ორი რიცხვის ნამრავლის მოდული უდრის ამ რიცხვების მოდულების ნამრავლს, ე. ი.

$$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|.$$

დამტკიცება.

ა) თუ $a\ge 0$ და $b\ge 0$, მაშინ $|a\cdot b|=a\cdot b=|a|\cdot|b|$.

ბ) თუ $a\ge 0$ და $b<0$, მაშინ $|a\cdot b|=-(a\cdot b)=a\cdot(-b)=|a|\cdot|b|$.

გ) თუ $a<0$ და $b\ge 0$, მაშინ $|a\cdot b|=-(a\cdot b)=(-a)\cdot b=|a|\cdot|b|$.

დ) თუ $a<0$ და $b<0$, მაშინ $|ab|=ab=(-a)(-b)=|a|\cdot|b|$.

შევნიშნოთ, რომ ეს თეორემა მართებულია თანამამრავლთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი თეორემა:

თეორემა 4. a და b რიცხვების ($b\ne 0$) ფარდობის მოდული ამ რიცხვების მოდულების ფარდობის ტოლია, ე. ი. $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$, სადაც $b\ne 0$.

§10. პროპორციები. პროცენტები

განსაზღვრება. ორი ფარდობის ტოლობას $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ($b\ne 0, d\ne 0$), პროპორცია ეწოდება. a-სა და d-ს პროპორციის კიდურა წევრები, ხოლო b-სა და c-ს შუა წევრები ეწოდება.

თუ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ პროპორციის ორივე მხარეს გავამრავლებთ bd–ზე, მივიღებთ $ad=bc$. ეს ტოლობა გამოსახავს პროპორციის ძირითად თვისებას: პროპორციის კიდურა წევრების ნამრავლი უდრის შუა წევრების ნამრავლს.

პროპორციის ძირითადი თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ პროპორციის შუა წევრი უდრის კიდურა წევრების ნამრავლს გაყოფილს მეორე შუა წევრზე, ხოლო კიდურა წევრი კი–შუა წევრების ნამრავლს გაყოფილს მეორე კიდურა წევრზე. იგივე თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ პროპორციაში შესაძლებელია გადავანაცვლოთ მისი შუა ან კიდურა წევრები. მაგალითად, პროპორციიდან $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, მიიღება შემდეგი პროპორციები:

$$\frac{d}{b}=\frac{c}{a};\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d};\ \frac{d}{c}=\frac{b}{a}.$$

ყოველი პროპორციიდან, გარკვეული გარდაქმნებით, შეიძლება მივიღოთ ე. წ. წარმოებული პროპორციები. მაგალითად, თუ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ პროპორციის ორივე მხარეს დავუმატებთ 1-ს, მივიღებთ:

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}; \qquad (1)$$

ანალოგიურად, 1-ის გამოკლებით მიიღება შემდეგი პროპორცია:

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}; \qquad (2)$$

თუ (1) ტოლობას წევრ-წევრად გავყოფთ (2)-ზე, გვექნება

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

ანალოგიურად მიიღება შემდეგი წარმოებული პროპორციები:

$$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d};\ \ \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d};\ \frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}.$$

ტოლ ფარდობათა თვისება. ვთქვათ, მოცემულია რამდენიმე ტოლი ფარდობა:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n},$$

მაშინ

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}.$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{a_1}{b_1}=k$, მივიღებთ

$$\frac{a_2}{b_2}=k,\ldots,\frac{a_n}{b_n}=k,$$

აქედან გვაქვს: $a_1=b_1k$, $a_2=b_2k,\ldots,a_n=b_nk$.

ამ ტოლობების წევრ-წევრად შეკრებით მიიღება

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=(b_1+b_2+\cdots+b_n)k.$$

აქედან

$$k=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}.$$

ე. ი.

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}.$$

პროპორციული დაყოფა. დავყოთ რაიმე a რიცხვი $m_1,m_2,\ldots,m_k$ დადებითი რიცხვების პროპორციულ ნაწილებად, ნიშნავს, ვიპოვოთ ისეთი $a_1,a_2,\ldots,a_k$ რიცხვები, რომელთა ჯამი a–ს ტოლია და შესრულებულია პირობა:

$$\frac{a_1}{m_1}=\frac{a_2}{m_2}=\cdots=\frac{a_k}{m_k}.$$

რაიმე რიცხვი რომ დავყოთ მოცემული რიცხვების პროპორციულ ნაწილებად, საჭიროა იგი გავყოთ მოცემული რიცხვების ჯამზე და განაყოფი გავამრავლოთ თითოეულზე ამ რიცხვებიდან.

მაგალითი. რიცხვი 72 დავყოთ 2-ის, 3-ისა და 7-ის პროპორციულ ნაწილებად.

ამოხსნა. ვთქვათ, საძიებელი რიცხვებია a_1,a_2 და a_3, მაშინ

$$a_1=\frac{72\cdot 2}{2+3+7}=12;\ a_2=\frac{72\cdot 3}{12}=18;\ a_3=\frac{72\cdot 7}{12}=42.$$

პროცენტები. რიცხვის მეასედ ნაწილს მისი პროცენტი ეწოდება. რიცხვის ერთი პროცენტი 1% სიმბოლოთი აღინიშნება, ხოლო k პროცენტი– $k\,\%$ სიმბოლოთი.

პროცენტებზე განიხილება შემდეგი სამი ტიპის ამოცანა:

1. რიცხვის რაიმე პროცენტის პოვნა. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ რიცხვის $k\,\%$, საჭიროა ეს რიცხვი გავამრავლოთ $\frac{k}{100}$–ზე. მაგალითად, 150-ის 12% უდრის 18-ს, რადგანაც $150\cdot\frac{12}{100}=18$.

2. რიცხვის პოვნა პროცენტის საშუალებით. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ რომელი რიცხვის $k\,\%$-ს წარმოადგენს მოცემული რიცხვი, საჭიროა იგი გავამრავლოთ $\frac{100}{k}$–ზე. მაგალითად, რიცხვი, რომლის 12% არის 18, უდრის 150-ს, რადგან $18\cdot\frac{100}{12}=150$.

3. ორი რიცხვის პროცენტული ფარდობის პოვნა. იმისათვის, რომ დავადგინოთ ერთი რიცხვი მეორის რამდენ პროცენტს შეადგენს, საჭიროა მათი ფარდობა გავამრავლოთ 100-ზე. მაგალითად 18 წარმოადგენს 150-ის 12%-ს, რადგან $\frac{18}{150}\cdot 100=12$.

§11. ხარისხი მთელი მაჩვენებლით

ხარისხი ნატურალური მაჩვენებლით. ჩვენ განსაზღვრული გვაქვს ნატურალურმაჩვენებლიანი ხარისხი, როდესაც ფუძე ნატურალური რიცხვია. განვაზოგადოთ ეს ცნება.

განსაზღვრება. a რიცხვის n–ური ხარისხი, სადაც $a \in R$, $n \in N$, $n \neq 1$ ეწოდება n თანამამრავლთა ნამრავლს, რომელთაგან თითოეული a–ს ტოლია და a^n სიმბოლოთი აღინიშნება, ე.ი.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n-\text{ჯერ}};\ \ n \geq 2\,.$$

a-ს ხარისხის ფუძე ეწოდება, n-ს კი–ხარისხის მაჩვენებელი. მიღებულია, რომ $a^1 = a$.

შევნიშნოთ, რომ დადებითი რიცხვის ნებისმიერი ნატურალურმაჩვენებლიანი ხარისხი დადებითია; უარყოფითი რიცხვის ლუწმაჩვენებლიანი ხარისხი დადებითია, ხოლო კენტმაჩვენებლიანი ხარისხი–უარყოფითი.

დავამტკიცოთ ნატურალურმაჩვენებლიანი ხარისხის ზოგიერთი თვისება.

***თეორემა* 1.** ნამრავლის ხარისხი უდრის თანამამრავლთა ხარისხების ნამრავლს, ე. ი.

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n\,.$$

დამტკიცება. ხარისხის განსაზღვრებისა და ნამრავლის თვისებების საფუძველზე გვაქვს

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \ldots (a \cdot b)}_{n-\text{ჯერ}} = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n-\text{ჯერ}} \cdot \underbrace{b \cdot b \ldots b}_{n-\text{ჯერ}} = a^n b^n$$

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n\,.$$

ე. ი. ტოლმაჩვენებლიანი ხარისხები რომ გადავამრავლოთ, საკმარისია გადავამრავლოთ ამ ხარისხების ფუძეები, ხოლო მაჩვენებელი უცვლელად დავტოვოთ.

***თეორემა* 2.** წილადის ხარისხი მრიცხველისა და მნიშვნელის ხარისხების ფარდობის ტოლია, ე. ი.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\ b \neq 0\,.$$

დამტკიცება. ხარისხის განსაზღვრების თანახმად:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}}_{n-ჯერ} = \frac{\overbrace{a\cdot a\ldots a}^{n-ჯერ}}{\underbrace{b\cdot b\ldots b}_{n-ჯერ}} = \frac{a^n}{b^n}\,.$$

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

ე. ი. ტოლმაჩვენებლიანი ხარისხები რომ გავყოთ, საკმარისია გასაყოფის ფუძე გავყოთ გამყოფის ფუძეზე, ხოლო მაჩვენებელი უცვლელად დავტოვოთ.

თეორემა 3. ტოლფუძიანი ხარისხების ნამრავლი უდრის იმავე ფუძიან ხარისხს, რომლის მაჩვენებელიც ამ ხარისხების მაჩვენებელთა ჯამის ტოლია, ე. ი.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}\,.$$

დამტკიცება. ხარისხის განსაზღვრების თანახმად:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a\cdot a\ldots a)}_{m-ჯერ}\cdot\underbrace{(a\cdot a\ldots a)}_{n-ჯერ} = \underbrace{a\cdot a\ldots a}_{m+n-ჯერ} = a^{m+n}\,.$$

თეორემა 4. ხარისხი რომ ავახარისხოთ, საჭიროა ხარისხის მაჩვენებლები გადავამრავლოთ, ხოლო ფუძე უცვლელად დავტოვოთ, ე. ი.

$$(a^m)^n = a^{mn}\,.$$

დამტკიცება. ხარისხის განსაზღვრებისა და მე-3 თეორემის თანახმად:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m\cdot a^m\ldots a^m}_{n-ჯერ} = a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n-ჯერ}} = a^{mn}\,.$$

თეორემა 5. ტოლფუძიანი ხარისხების განაყოფი, როცა ფუძე განსხვავდება ნულისაგან და გასაყოფის მაჩვენებელი მეტია გამყოფისაზე, უდრის იმავე ფუძიან ხარისხს, რომლის მაჩვენებელიც გასაყოფისა და გამყოფის ხარისხის მაჩვენებელთა სხვაობის ტოლია, ე. ი.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ (a \neq 0, m > n)\,.$$

დამტკიცება. რადგან $m > n$, ამიტომ არსებობს ისეთი ნატურალური k რიცხვი, რომ $m = n + k$. მაშასადამე,

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{n+k}}{a^n} = \frac{a^n\cdot a^k}{a^n} = a^k = a^{m-n}\,.$$

ხარისხი ნულოვანი და უარყოფითი მთელი მაჩვენებლით. როგორც მე-5 თეორემიდან ჩანს, ტოლობა:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \tag{1}$$

მართებულია მაშინ, როცა $m > n$. იმ შემთხვევაში, როცა $m = n$ ან $m < n$, (1) ტოლობის მარჯვენა მხარე განსაზღვრული არ არის, მარცხენა მხარეს კი აზრი აქვს. ეს გარემოება გვკარნახობს განვსაზღვროთ ხარისხი ნულოვანი და უარყოფითი მთელი მაჩვენებლით შემდეგნაირად:

განსაზღვრება. ნებისმიერი ნულისაგან განსხვავებული ნამდვილი რიცხვის ნულოვანი ხარისხი 1-ის ტოლია, ე. ი.

$$a^0 = 1, \ (a \neq 0).$$

განსაზღვრება. თუ $n \in N$ და $a \neq 0$, მაშინ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

ამ განსაზღვრების თანახმად (1) ტოლობა მართებულია მაშინაც, როცა $m \leq n$. მართლაც, თუ $m \leq n$, მაშინ მოიძებნება ისეთი $k \in Z_0$ რიცხვი, რომ $n = m + k$ და

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+k}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^k} = \frac{1}{a^k} = a^{-k} = a^{m-n}.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ნატურალურმაჩვენებლიანი ხარისხებისათვის ზემოთ დამტკიცებული თეორემები მართებულია ნებისმიერი მთელი მაჩვენებლისათვის. მაგალითად, თუ $n \in N$ და $a \neq 0, b \neq 0$, მაშინ

$$(ab)^{-n} = \frac{1}{(ab)^n} = \frac{1}{a^n b^n} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{b^n} = a^{-n} \cdot b^{-n};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}$$

და ა. შ.

§12. რიცხვითი გამოსახულებანი. ცვლადის შემცველი გამოსახულებანი

ბუნებაში ვხვდებით სხვადასხვა ტიპის სიდიდეებს, ზოგი მათგანი მოცემულ პირობებში ინარჩუნებს ერთიდაიგივე რიცხვით მნიშვნელობას, ზოგი კი იცვლება.

სიდიდეს ეწოდება მუდმივი, თუ იგი მოცემულ პირობებში მხოლოდ ერთ მნიშვნელობას ღებულობს. მაგალითად,

თანამედროვე კალენდარით კვირაში დღეების რიცხვი მუდმივია და უდრის 7-ს, მუდმივია აგრეთვე სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი და ა. შ.

სიდიდეს ეწოდება ცვლადი, თუ იგი მოცემულ პირობებში სხვადასხვა რიცხვით მნიშვნელობებს ღებულობს. მაგალითად ჰაერის ტემპერატურა, უჰაერო სივრცეში თავისუფალი ვარდნის სიჩქარე, და ა. შ. ცვლადი სიდიდეებია.

განსაზღვრება. რიცხვთა და იმ ნიშანთა ერთობლიობას, რომლებიც გვიჩვენებენ, თუ რა მოქმედებები და რა მიმდევრობით უნდა იქნას შესრულებული ამ რიცხვებზე, რიცხვითი გამოსახულება ეწოდება.

მაგალითად, რიცხვითი გამოსახულებებია:

$$(125-11{,}5)\cdot 2;\ \ \frac{0{,}17+4^2}{3\cdot 4-12}\ \text{და ა. შ.}$$

მითითებული მოქმედებების შესრულებით მივიღებთ რიცხვს, რომელსაც რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობა ეწოდება. მოყვანილი რიცხვითი გამოსახულებებიდან მეორეს აზრი არა აქვს, რადგან მოქმედებათა შესრულების პროცესში გვხვდება ნულზე გაყოფა. საზოგადოდ, ყოველ რიცხვით გამოსახულებას აქვს ერთადერთი რიცხვითი მნიშვნელობა ან არა აქვს აზრი.

განსაზღვრება. გამოსახულებას, რომელიც ცვლადს შეიცავს, ცვლადის შემცველი გამოსახულება ეწოდება.

ცვლადის შემცველი გამოსახულების მნიშვნელობა დამოკიდებულია მასში შემავალი ცვლადების რიცხვით მნიშვნელობებზე.

მაგალითად, $\dfrac{x+3y}{x-2y}$ გამოსახულების მნიშვნელობა, როცა $x=3$ და $y=1$, არის 6, ხოლო როცა $x=4$ და $y=2$, გამოსახულებას აზრი არა აქვს. იმისდა მიხედვით, თუ რამდენ ცვლადს შეიცავს გამოსახულება, მას შეიძლება აზრი ჰქონდეს (განსაზღვრული იყოს) რიცხვთა რაიმე სიმრავლეზე, რიცხვთა წყვილების, სამეულების და ა. შ. სიმრავლეზე. ზემოთ განხილული გამოსახულება განსაზღვრულია ყველა იმ (x,y) წყვილთა სიმრავლეზე, სადაც $x\neq 2y$.

ერთიდაიმავე ცვლადების შემცველი გამოსახულებების მნიშვნელობებს, გამოთვლილს ამ ცვლადების ერთიდაიგივე რიცხვითი მნიშვნელობებისათვის, შესაბამისი მნიშვნელობები ეწოდება. მაგალითად, xy და $x-y$ გამოსახულებათა შესაბამისი მნიშვნელობები როცა $x=3$ $y=2$ არის 6 და 1.

განსაზღვრება. ორ გამოსახულებას იგივურად ტოლი ეწოდება რაიმე სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლეზე ორივეს აზრი აქვს და მათი შესაბამისი მნიშვნელობები ტოლია.

მაგალითად, a^2-b^2 და $(a-b)(a+b)$ იგივურად ტოლი გამოსახულებებია, რადგან მათი შესაბამისი მნიშვნელობები ტოლია. ორ იგივურად ტოლ გამოსახულებას, შეერთებულს ტოლობის ნიშნით, იგივეობა ეწოდება. ამრიგად, $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ იგივეობას წარმოადგენს. იგივეობას წარმოადგენს აგრეთვე ყოველი ჭეშმარიტი რიცხვითი ტოლობა.

გამოსახულების შეცვლას მისი იგივურად ტოლი გამოსახულებით იგივური გარდაქმნა ეწოდება.

§13. ერთწევრი და მრავალწევრი

განსაზღვრება. რამდენიმე თანამამრავლის ნამრავლს, რომელთაგან თითოეული არის რიცხვი, ან ცვლადის ხარისხი ნატურალური მაჩვენებლით, ერთწევრი ეწოდება.

მაგალითად, ერთწევრებია: $6b^2c,\ 5x^3 7y,\ -\frac{3}{8}aa^2c^4$.

განსაზღვრება. ერთწევრს, რომლის პირველი მამრავლი წარმოადგენს რიცხვს, ხოლო ყველა სხვა თანამამრავლი განსხვავებული ცვლადების ხარისხებია, სტანდარტული სახის ერთწევრი ეწოდება.

ზემოთ მოყვანილი ერთწევრებიდან პირველი ჩაწერილია სტანდარტული სახით, ხოლო მეორისა და მესამის სტანდარტული სახე იქნება შესაბამისად $35x^3y$ და $-\frac{3}{8}a^3c^4$. სტანდარტული სახის ერთწევრის რიცხვით მამრავლს ერთწევრის კოეფიციენტი ეწოდება. ერთწევრებს ეწოდება მსგავსი, თუ ისინი ერთიდაიგივეა ან მხოლოდ კოეფიციენტებით განსხვავდებიან. მაგალითად, x^2y, $0{,}8x^2y$ და $-5x^2y$ მსგავსი ერთწევრებია. მსგავსი ერთწევრების ჯამი არის მოცემულ ერთწევრთა მსგავსი ერთწევრი, რომლის კოეფიციენტი უდრის შესაკრებ ერთწევრთა კოეფიციენტების ჯამს.

ერთწევრის ხარისხი ეწოდება მასში შემავალი ცვლადების ხარისხის მაჩვენებელთა ჯამს. მაგალითად, $9ab^2x^3$ ერთწევრის ხარისხი არის 1+2+3=6.

განსაზღვრება. რამდენიმე ერთწევრის ჯამს მრავალწევრი ეწოდება.

მაგალითად, $7xy^3+0{,}1ab$ და $5a^2b-3ac+a^2b-2aab$ მრავალწევრებია.

განსაზღვრება. მრავალწევრს, რომლის თითოეული წევრი ჩაწერილია სტანდარტული სახით და მსგავსი წევრები შეკრებილია, სტანდარტული სახის მრავალწევრი ეწოდება.

ზემოთ მოყვანილი მრავალწევრებიდან პირველი სტანდარტული სახით არის ჩაწერილი, ხოლო მეორის სტანდარტული სახეა $4a^2b-3ac$.

მრავალწევრის ხარისხი, ანუ რიგი ეწოდება მასში შემავალი ერთწევრების ხარისხებს შორის უდიდესს. მაგალითად, $2xyz-x^2+xy^3+12$ მრავალწევრის რიგია 4.

რამდენიმე მრავალწევრი რომ შევკრიბოთ, საჭიროა შევკრიბოთ მათში შემავალი ყველა ერთწევრი.

მრავალწევრს რომ მრავალწევრი გამოვაკლოთ, საჭიროა საკლების წევრებს მივუმატოთ მაკლების ყველა წევრი, აღებული მოპირდაპირე ნიშნით.

მრავალწევრი რომ ერთწევრზე გავამრავლოთ, საჭიროა მრავალწევრის ყოველი წევრი გავამრავლოთ ერთწევრზე და მიღებული შედეგები შევკრიბოთ.

მრავალწევრი რომ მრავალწევრზე გავამრავლოთ, საჭიროა ერთ-ერთი მრავალწევრი გავამრავლოთ მეორის ყველა წევრზე და მიღებული შედეგები შევკრიბოთ.

მრავალწევრის მრავალწევრზე გაყოფა ნიშნავს ისეთი მესამე მრავალწევრის (ერთწევრის) მოძებნას, რომელიც გამრავლებული გამყოფზე მოგვცემს გასაყოფს. შევნიშნოთ, რომ ეს ყოველთვის არ არის შესაძლებელი.

იმისათვის, რომ მრავალწევრი გავყოთ მრავალწევრზე, საჭიროა მოვიქცეთ შემდეგნაირად: დავალაგოთ ორივე მრავალწევრი ერთიდაიმავე ცვლადის კლებად ხარისხებად; განაყოფის პირველი წევრის მისაღებად გასაყოფის პირველი წევრი გავყოთ გამყოფის პირველ წევრზე; გასაყოფს გამოვაკლოთ გამყოფის და განაყოფის პირველი წევრის ნამრავლი, რაც მოგვცემს ნაშთს; მიღებული ნაშთი დავალაგოთ იგივე ცვლადის კლებად ხარისხებად; განაყოფის მეორე წევრის მისაღებად ნაშთის პირველი წევრი გავყოთ გამყოფის პირველ წევრზე, პირველ ნაშთს გამოვაკლოთ გამყოფისა და განაყოფის მეორე წევრის ნამრავლი, რაც მოგვცემს მეორე ნაშთს და ა. შ. გაყოფის პროცესი შევწყვიტოთ, როგორც კი ნაშთის ხარისხი არჩეული ცვლადის მიმართ ნაკლები გახდება გამყოფის ხარისხზე. კერძოდ, თუ ნაშთში მივიღებთ ნულს, მაშინ გაყოფა სრულდება უნაშთოდ.

მაგალითი. $4x^3y-8xy^2+12x^5y-2y^3+3x^4y^2+x^2y^2$ მრავალწევრი გავყოთ $4x+y$ მრავალწევრზე.

ამოხსნა. ზემოთ ჩამოყალიბებული წესის თანახმად მივიღებთ:

$$\begin{array}{r|l} \underline{-\begin{array}{l}12x^5y+3x^4y^2+4x^3y+x^2y^2-8xy^2-2y^3\\12x^5y+3x^4y^2\end{array}} & \underline{4x+y} \\ \underline{-\begin{array}{l}4x^3y+x^2y^2-8xy^2-2y^3\\4x^3y+x^2y^2\end{array}} & 3x^4y+x^2y-2y^2 \\ \underline{-\begin{array}{l}-8xy^2-2y^3\\-8xy^2-2y^3\end{array}} & \\ 0 & \end{array}$$

ამრიგად,

$$\left(4x^3y-8xy^2+12x^5y-2y^3+3x^4y^2+x^2y^2\right):\left(4x+y\right)=3x^4y+x^2y-2y^2.$$

განსაზღვრება. მრავალწევრს, რომელიც მხოლოდ ერთ ცვლადს შეიცავს, ერთი ცვლადის შემცველი მრავალწევრი ეწოდება.

ერთი ცვლადის შემცველი n–ური რიგის მრავალწევრის ზოგადი სახეა:

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

სადაც $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n$ კოეფიციენტები ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია ($a_0\neq 0$). a_0x^n–ს მრავალწევრის უფროსი წევრი, ხოლო a_n–ს თავისუფალი წევრი ეწოდება. თუ მრავალწევრის უფროსი წევრის კოეფიციენტი 1-ის ტოლია, მაშინ მას დაყვანილი სახის მრავალწევრი ეწოდება.

განსაზღვრება. ერთი ცვლადის შემცველი მრავალწევრის ფესვი ეწოდება ცვლადის იმ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც მრავალწევრის მნიშვნელობა ნულის ტოლია.

ამგვარად, x_0 არის $P_n(x)$ მრავალწევრის ფესვი, თუ $P_n(x_0)=0$. შეიძლება ჩვენება, რომ ნებისმიერი $p(x)$ და $t(x)$ მრავალწევრებისათვის მოიძებნება ისეთი $q(x)$ და $r(x)$ მრავალწევრები, რომ

$$p(x)=q(x)\cdot t(x)+r(x), \qquad (1)$$

სადაც $r(x)$ მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია $t(x)$–ის ხარისხზე, ან $r(x)=0$. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $p(x)$

მრავალწევრი იყოფა $t(x)-$ზე ნაშთით $r(x)$ და განაყოფი არის $q(x)$. თუ $r(x)=0$, მაშინ გაყოფა ხდება უნაშთოდ.

თეორემა (ბეზუ). $p(x)$ მრავალწევრის $(x-a)$ ორწევრზე გაყოფით მიღებული r ნაშთი ტოლია $p(x)$ მრავალწევრის მნიშვნელობისა, როცა $x=a$, ე. ი. $r=p(a)$.

დამტკიცება. რადგან $(x-a)$ წარმოადგენს პირველი ხარისხის მრავალწევრს, ამიტომ გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი იქნება ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრი, ანუ რიცხვი და (1) ტოლობის თანახმად გვექნება:

$$p(x)=q(x)\cdot(x-a)+r .$$

თუ ამ ტოლობაში $x-$ის ნაცვლად ავიღებთ $a-$ს, მივიღებთ:

$$p(a)=q(a)(a-a)+r \Rightarrow r=p(a) .$$

შედეგი. იმისათვის, რომ $p(x)$ მრავალწევრი უნაშთოდ გაიყოს $(x-a)$-ზე აუცილებელი და საკმარისია, რომ a რიცხვი იყოს $p(x)-$ის ფესვი.

დამტკიცება. აუცილებლობა. ვთქვათ, $p(x)$ მრავალწევრი უნაშთოდ იყოფა $(x-a)$ ორწევრზე. ეს იმას ნიშნავს, რომ მიღებული ნაშთი $r=0$. ბეზუს თეორემის თანახმად კი $r=p(a)$. ე. ი. $p(a)=0$.

საკმარისობა. ვთქვათ $p(a)=0$. ბეზუს თეორემის თანახმად $r=p(a)$, ამიტომ $r=0$, ე. ი. $p(x)$ უნაშთოდ იყოფა $(x-a)-$ზე.

მაგალითი. გაყოფის შეუსრულებლად ვიპოვოთ $p(x)=5x^6+4x^4-x^3+2x+1$ მრავალწევრის $(x+1)$ ორწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი.

ამოხსნა. ბეზუს თეორემის თანახმად

$$r=p(-1)=5(-1)^6+4(-1)^4-(-1)^3+2(-1)+1=9 .$$

§14. შემოკლებული გამრავლების ფორმულები. მრავალწევრის დაშლა მამრავლებად

შემდგომში დაგვჭირდება რამდენიმე ტიპიური იგივეობა. დავამტკიცოთ ზოგიერთი მათგანი, რომელთაც შემოკლებული გამრავლების ფორმულები ეწოდება.

1. $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$.

ე. ი.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 .$$

ამრიგად, ორი გამოსახულების ჯამის კვადრატი უდრის პირველის კვადრატს, პლიუს გაორკეცებული ნამრავლი პირველისა მეორეზე, პლიუს მეორე გამოსახულების კვადრატი.

2. $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$,

ე. ი.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 .$$

ამრიგად, ორი გამოსახულების სხვაობის კვადრატი უდრის პირველის კვადრატს, მინუს გაორკეცებული ნამრავლი პირველისა მეორეზე, პლიუს მეორე გამოსახულების კვადრატი.

3. $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) =$

$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 =$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 ,$$

ე. ი.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

ამრიგად, ორი გამოსახულების ჯამის კუბი უდრის პირველის კუბს, პლიუს გასამკეცებული ნამრავლი პირველის კვადრატისა მეორეზე, პლიუს გასამკეცებული ნამრავლი პირველისა მეორის კვადრატზე, პლიუს მეორე გამოსახულების კუბი.

4. $(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) =$

$$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3 =$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 ,$$

ე. ი.

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

ამრიგად, ორი გამოსახულების სხვაობის კუბი უდრის პირველის კუბს, მინუს გასამკეცებული ნამრავლი პირველის კვადრატისა მეორეზე, პლიუს გასამკეცებული ნამრავლი პირველისა მეორის კვადრატზე, მინუს მეორე გამოსახულების კუბი.

5. $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$,

ე. ი.

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

ამრიგად, ორი გამოსახულების კვადრატების სხვაობა უდრის ამავე გამოსახულებების ჯამის ნამრავლს მათსავე სხვაობაზე.

6. $(a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 =$

$$= a^3 + b^3 ,$$

ე. ი.

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

ამრიგად, ორი გამოსახულების კუბების ჯამი უდრის მათ ჯამს, გამრავლებულს მათი სხვაობის არასრულ კვადრატზე.

7. $(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=$

$$=a^3-b^3,$$

ე. ი.

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right).$$

ამრიგად, ორი გამოსახულების კუბების სხვაობა უდრის მათ სხვაობას, გამრავლებულს მათი ჯამის არასრულ კვადრატზე.

მრავალწევრზე მოქმედებების ჩატარებისას ხშირად მოსახერხებელია მათი წარმოდგენა არა სტანდარტული სახით, არამედ ნამრავლის სახით.

მრავალწევრის მამრავლებად დაშლა ნიშნავს, ამ მრავალწევრის წარმოდგენას მისი იგივურად ტოლი ნამრავლით. შემოკლებული გამრავლების ფორმულები ფაქტიურად წარმოადგენენ მრავალწევრის დაშლას მამრავლებად.

შემოკლებული გამრავლების ფორმულების გარდა არსებობენ მრავალწევრის მამრავლებად დაშლის სხვა ხერხებიც. მოვიყვანოთ ზოგიერთი მათგანი:

1. თუ მრავალწევრის ყველა წევრი შეიცავს საერთო მამრავლს, იგი შეიძლება ფრჩხილებს გარეთ გავიტანოთ. მაგალითად,

$$15x^3y+3xy^2-6x^2y^2=3xy(5x^2+y-2xy).$$

ამ ხერხს ფრჩხილებს გარეთ გატანის ხერხი ეწოდება.

2. შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ მრავალწევრის ყველა წევრს არ ჰქონდეს საერთო მამრავლი, მაგრამ ისინი გააჩნდეს მრავალწევრის წევრთა ცალკეულ ჯგუფებს. თუ ამ მამრავლე-ბის ფრჩხილებს გარეთ გატანის შემდეგ ფრჩხილებში დარჩება ერთნაირი გამოსახულება და მას ფრჩხილებს გარეთ გავიტანთ, მრავალწევრი დაიშლება მამრავლებად. მაგალითად,

$$10a^2-2abc+15ab-3b^2c=2a(5a-bc)+$$

$$+3b(5a-bc)=(5a-bc)(2a+3b).$$

ამ ხერხს დაჯგუფების ხერხი ეწოდება.

3. ზოგჯერ მიზანშეწონილია მრავალწევრის ზოგიერთი წევრის რამდენიმე შესაკრების ჯამის სახით წარმოდგენა, ან მრავალწევრისადმი ახალი წევრის მიმატება და გამოკლება. მაგალითად,

$$x^2-7x+12=x^2-3x-4x+12=x(x-3)-4(x-3)=$$
$$=(x-3)(x-4),$$
$$x^4+4y^4=x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2=$$
$$=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2=(x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy).$$

4. ერთი ცვლადის შემცველი მრავალწევრის მამრავლებად დაშლისას, ზოგჯერ მოსახერხებელია გამოვიყენოთ შემდეგი თეორემა: თუ ერთი ცვლადის შემცველ მთელკოეფიციენტებიან დაყვანილი სახის მრავალწევრს გააჩნია მთელი ფესვი, მაშინ იგი თავისუფალი წევრის გამყოფს წარმოადგენს.

გავარჩიოთ მაგალითზე მრავალწევრის მამრავლებად დაშლის ხერხი, რომელიც ამ თეორემას ეყრდნობა.

მაგალითი. დავშალოთ მამრავლებად $p(x)=x^5-2x^3+6x^2-5$ მრავალწევრი.

პირველ რიგში შევამოწმოთ თავისუფალი წევრის –5, -1, 1, 5 გამყოფებიდან რომელი წარმოადგენს $p(x)$ მრავალწევრის ფესვს. ე. ი. მრავალწევრის ერთადერთი მთელი ფესვია $x=1$. ბეზუს თეორემის თანახმად $p(x)$ მრავალწევრი უნაშთოდ გაიყოფა $(x-1)$–ზე. შევასრულოთ აღნიშნული გაყოფა

$$\begin{array}{l|l}
-\,x^5-2x^3+6x^2-5 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^5-x^4} & x^4+x^3-x^2+5x+5 \\
\quad -\,x^4-2x^3+6x^2-5 & \\
\quad \underline{x^4-x^3} & \\
\qquad -x^3+6x^2-5 & \\
\qquad \underline{-x^3+x^2} & \\
\qquad\quad -\,5x^2-5 & \\
\qquad\quad \underline{5x^2-5x} & \\
\qquad\qquad -\,5x-5 & \\
\qquad\qquad \underline{5x-5} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

ე. ი. $x^5-2x^3+6x^2-5=(x-1)(x^4+x^3-x^2+5x+5)$.

§15. n–ური ხარისხის ფესვი. n-ური ხარისხის არითმეტიკული ფესვი

განსაზღვრება. n–ური ხარისხის ფესვი a ნამდვილი რიცხვიდან, $n \in N$, $n > 1$, ეწოდება ისეთ x რიცხვს, რომლის n–ური ხარისხი a–ს ტოლია, ე. ი.

$$x^n = a. \quad (1)$$

იმის მიხედვით, თუ როგორი რიცხვია n, გვაქვს შემდეგი შემთხვევები.

1. ვთქვათ, n კენტი რიცხვია, მაშინ (1) ტოლობას აკმაყოფილებს x–ის ერთადერთი ნამდვილი მნიშვნელობა. ამრიგად, კენტი ხარისხის ფესვი არსებობს ნებისმიერი a ნამდვილი რიცხვიდან და იგი ერთადერთია. მის აღსანიშნავად გვაქვს $\sqrt[n]{a}$ –სიმბოლო. n–ს ეწოდება ფესვის მაჩვენებელი, ხოლო a–ს–ფესვქვეშა გამოსახულება.

მაგალითად, $\sqrt[3]{8} = 2$ და $\sqrt[5]{-32} = -2$, რადგან $2^3 = 8$ და $(-2)^5 = -32$.

2. ვთქვათ, n ლუწი რიცხვია.

თუ $a > 0$, მაშინ (1) ტოლობას აკმაყოფილებს x–ის მხოლოდ ორი ნამდვილი მნიშვნელობა და ისინი ურთიერთმოპირდაპირე რიცხვებს წარმოადგენენ. მათ შორის დადებითი $\sqrt[n]{a}$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ხოლო მისი მოპირდა-პირე რიცხვი ჩაიწერება $-\sqrt[n]{a}$ სახით.

თუ $a = 0$, არსებობს ერთადერთი n–ური ხარისხის ფესვი a–დან, რომელიც $\sqrt[n]{a}$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ცხადია, რომ $\sqrt[n]{0} = 0$, რადგან $0^n = 0$.

თუ $a < 0$, მაშინ არ არსებობს ისეთი ნამდვილი x რიცხვი, რომელიც (1) ტოლობას დააკმაყოფილებს, ე. ი. ლუწი ხარისხის ფესვი უარყოფითი რიცხვიდან ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში არ არსებობს. სხვანაირად რომ ვთქვათ, გამოსახულებას $\sqrt[n]{a}$, როცა n ლუწია და $a < 0$, აზრი არა აქვს.

$\sqrt[n]{a}$ გამოსახულებაში n–ს ფესვის მაჩვენებელი, ხოლო a–ს ფესვქვეშა გამოსახულება ეწოდება. მესამე ხარისხის ფესვს კუბურ ფესვს უწოდებენ, ხოლო მეორე ხარისხისას–კვადრატულს. კვადრატული ფესვის აღმნიშვნელ სიმბოლოში

ფესვის მაჩვენებელი არ იწერება. მაგალითად, $\sqrt[2]{5}=\sqrt{5}$. ხშირად "ფესვის" ნაცვლად ხმარობენ ტერმინს "რადიკალი".

ფესვის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a,\ k\in N\ ,$$

ხოლო

$$\sqrt[2k]{a^{2k}}=\begin{cases}a, \text{ როცა } a\ge 0,\\ -a, \text{ როცა } a<0,\ k\in N.\end{cases}$$

ე. ი. $\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$, კერძოდ $\sqrt{a^2}=|a|$.

ცხადია, რომ თუ გამოსახულებას $\sqrt[n]{a}$ აზრი აქვს, მართებულია ტოლობა $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$.

ამრიგად, როდესაც $a\ge 0$ გამოსახულებას $\sqrt[n]{a}$ ყოველთვის აქვს აზრი და მისი მნიშვნელობა არაუარყოფითია.

განსაზღვრება. $n-$ური ხარისხის არითმეტიკული ფესვი არაუარყოფითი a რიცხვიდან $(n\in N,\ n\ne 1)$, ეწოდება ისეთ არაუარყოფით რიცხვს, რომლის $n-$ური ხარისხი $a-$ს ტოლია.

შევნიშნოთ, რომ კენტი ხარისხის ფესვი უარყოფითი რიცხვიდან არითმეტიკული ფესვის საშუალებით შემდეგნაირად ჩაიწერება: $\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{a},\ a>0,\ k\in N$.

კვადრატული ფესვის ამოღება ნატურალური რიცხვიდან. ჩამოვაყალიბოთ ნატურალური რიცხვიდან კვადრატული ფესვის ამოღების წესი:

1. დავყოთ მოცემული რიცხვი მარჯვნიდან მარცხნივ ისე, რომ თითოეულ დანაყოფში აღმოჩნდეს ორ-ორი ციფრი, გარდა შესაძლებელია მარცხნიდან პირველისა (მასში შეიძლება აღმოჩნდეს ერთი ციფრიც).

2. ვიპოვოთ უდიდესი ციფრი, რომლის კვადრატი არ აღემატება მარცხნიდან პირველ დანაყოფში მდგომ რიცხვს. ნაპოვნი ციფრი წარმოადგენს ფესვის პირველ ციფრს.

3. ვიპოვოთ რიცხვი, რომელიც მიიღება თუ სხვაობას პირველ დანაყოფში მდგომ რიცხვსა და ფესვის პირველი ციფრის კვადრატს შორის მივუწერთ მეორე დანაყოფს.

4. ფესვის მეორე ციფრს წარმოადგენს ის უდიდესი ციფრი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: ამ ციფრის ნამრავლი რიცხვზე, რომელიც მიიღება გაორკეცებული პირველი ციფრისადმი საძიებელი ციფრის მიწერით, არ უნდა აღემატებოდეს წინა ეტაპზე ნაპოვნ რიცხვს. ვიპოვოთ სხვაობა

აღნიშნულ რიცხვებს შორის, მივუწეროთ მას შემდეგი დანაყოფი და პროცესი გავაგრძელოთ ანალოგიურად.

თუ უკანასკნელ ეტაპზე ნაპოვნი სხვაობა აღმოჩნდა ნული, მაშინ ნაპოვნი ციფრებისაგან შედგენილი რიცხვი წარმოადგენს კვადრატულ ფესვს მოცემული რიცხვიდან. წინააღმდეგ შემთხვევაში კვადრატული ფესვი მოცემული რიცხვიდან არ არის ნატურალური რიცხვი.

პრაქტიკულად კვადრატული ფესვის ამოღების პროცესი მოსახერხებელია ჩაიწეროს ისე, როგორც ნაჩვენებია შემდეგ მაგალითზე:

$$\sqrt{7'31'70'25'} = 2705$$

$$\begin{array}{r|l}
 & -4 \\ \hline
47 & 3\quad 31 \\
7 & 3\quad 29 \\ \hline
5405 & 270\quad 25 \\
5 & 270\quad 25 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

§16. არითმეტიკული ფესვის თვისებები

თეორემა 1. თუ $a \geq 0$ და $b \geq 0$, მაშინ

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} .$$

დამტკიცება. რადგან

$$\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab ,$$

ამიტომ არითმეტიკული ფესვის განსაზღვრების თანახმად

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} .$$

თეორემა 2. თუ $a \geq 0$ და $b > 0$, მაშინ

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} .$$

დამტკიცება. რადგან

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b} ,$$

ამიტომ არითმეტიკული ფესვის განსაზღვრების თანახმად

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

თეორემა 3. თუ $a \ge 0$ და $k \in N$, მაშინ

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k} .$$

დამტკიცება. ხარისხის განსაზღვრებიდან და 1-ლი თეორემიდან გვაქვს:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \ldots \sqrt[n]{a}}_{k-ჯერ} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \ldots a}_{k-ჯერ}} = \sqrt[n]{a^k} .$$

თეორემა 4. თუ $a \ge 0$, მაშინ

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} .$$

დამტკიცება. რადგან

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a ,$$

ამიტომ არითმეტიკული ფესვის განსაზღვრების თანახმად

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} .$$

თეორემა 5. თუ $a \ge 0$ და $m, k \in N$, მაშინ

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} .$$

დამტკიცება. თეორემა 4-დან გვაქვს:

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^{mk}}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{\left(a^m\right)^k}} = \sqrt[n]{a^m} .$$

არითმეტიკული ფესვის თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $a \ge 0$ და $b \ge 0$, მაშინ

$$\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b} ,$$

ე. ი.

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b} .$$

$\sqrt[n]{a^n b}$ სახის გამოსახულების შეცვლას მისი იგივურად ტოლი $a\sqrt[n]{b}$ გამოსახულებით ფესვიდან მამრავლის გამოტანა ეწოდება.

მაგალითები

1. $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = 2\sqrt[4]{3}$.
2. $\sqrt{18x^3yz^4} = 3xz^2\sqrt{2xy}$, $(x \ge 0, y \ge 0)$.
3. $\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{5}\right)^4} = \left(2-\sqrt{5}\right)\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

4. $\sqrt{5(a-b)^2} = |a-b|\sqrt{5} = \begin{cases} (a-b)\sqrt{5}, \text{ თუ } a \geq b; \\ (b-a)\sqrt{5}, \text{ თუ } a < b. \end{cases}$

$a\sqrt[n]{b}$ სახის გამოსახულების შეცვლას მისი იგივურად ტოლი $\sqrt[n]{a^n \cdot b}$ გამოსახულებით მამრავლის ფესვში შეტანა ეწოდება.

მაგალითები

1. $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{54}$.
2. $\left(3-\sqrt{7}\right)a\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{\left(3-\sqrt{7}\right)^4 \cdot a^5}$, $a \geq 0$.
3. $(x-y)\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{3(x-y)^5}$.

ერთნაირმაჩვენებლიანი რადიკალების გამრავლება და გაყოფა ხდება პირველი და მეორე თეორემების საფუძველზე, ხოლო სხვადასხვამაჩვენებლიანი რადიკალები საჭიროა წინასწარ დავიყვანოთ ერთნაირ მაჩვენებელზე მეხუთე თეორემის გამოყენებით.

მაგალითები

1. $\sqrt[5]{48a^2b^3} \cdot \sqrt[5]{4a^4b} = \sqrt[5]{192a^6b^4} = 2a\sqrt[5]{6ab^4}$.
2. $\dfrac{\sqrt[3]{4a^2b}}{\sqrt[3]{2ab}} = \sqrt[3]{2a}$, $ab \neq 0$.
3. $\sqrt{xy} \cdot \sqrt[3]{2x^2y} = \sqrt[6]{x^3y^3} \cdot \sqrt[6]{4x^4y^2} = \sqrt[6]{4x^7y^5} = x\sqrt[6]{4xy^5}$, $x \geq 0, y \geq 0$.
4. $\dfrac{\sqrt[3]{3x^2y^2}}{\sqrt[4]{xy^2}} = \dfrac{\sqrt[12]{81x^8y^8}}{\sqrt[12]{x^3y^6}} = \sqrt[12]{81x^5y^2}$, $x > 0, y \neq 0$.

რადიკალებზე მოქმედების ჩატარებისას ზოგჯერ მოსახერხებელია ე. წ. რთული რადიკალების ფორმულების გამოყენება, რომელთაც შემდეგი სახე აქვთ:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

სადაც $a > 0$, $b > 0$ და $a^2 \geq b$.

§17. რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი

არითმეტიკული ფესვის განსაზღვრებიდან და თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ $\sqrt[n]{a^m}$, როდესაც m უნაშთოდ იყოფა n–ზე ($m,n \in N$) და $\frac{m}{n}=k$, შეიძლება წარმოვადგინოთ a^k ნატურალურმაჩვენებლიანი ხარისხის სახით, ე. ი. ამ შემთხვევაში $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$. განვაზოგადოთ ხარისხის ცნება ნებისმიერი რაციონალური მაჩვენებლისათვის.

განსაზღვრება. თუ $a>0$ და $r=\frac{m}{n}$ რაციონალური რიცხვია ($m\in Z, n\in N, n\neq 1$), მაშინ

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\,.$$

განსაზღვრება. თუ $a=0$ და r დადებითი რაციონალური რიცხვია, მაშინ $a^r=0$.

ცხადია, რომ თუ $m,n\in N$, მაშინ

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}\,.$$

მართლაც, როცა $n=1$, ეს ტოლობა გამომდინარეობს მთელმაჩვენებლიანი ხარისხის განსაზღვრებიდან, ხოლო როცა $n\neq 1$, მაშინ

$$a^{-\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{-m}}=\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}\,.$$

რაციონალურმაჩვენებლიან ხარისხს გააჩნია მთელმაჩვენებლიანი ხარისხის ანალოგიური თვისებები

1. $(a\cdot b)^r = a^r\cdot b^r$ 2. $\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$;

3. $a^{r_1}\cdot a^{r_2}=a^{r_1+r_2}$; 4. $\left(a^{r_1}\right)^{r_2}=a^{r_1\cdot r_2}$,

5. $\frac{a^{r_1}}{a^{r_2}}=a^{r_1-r_2}$;

სადაც $a>0$, $b>0$ და $r_1,r_2,r\in Q$.

დავამტკიცოთ პირველი თვისება. ვთქვათ, $r=\frac{m}{n}$, მაშინ თუ $n=1$

$$(a\cdot b)^r=(a\cdot b)^m=a^m\cdot b^m=a^r b^r\ ,$$

ხოლო, როდესაც $n\neq 1$

$$(ab)^r=(ab)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(ab)^m}=\sqrt[n]{a^m b^m}=\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{b^m}=a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{m}{n}}=a^r b^r\ .$$

ანალოგიური მსჯელობით მტკიცდება დანარჩენი თვისებებიც.

§18. წილადურ გამოსახულებათა გარდაქმნა

ცვლადების შემცველ გამოსახულებებს, რომლებშიც ცვლადების მიმართ გამოყენებულია შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და ნატურალურ ხარისხში ახარისხების ოპერაციები მთელი გამოსახულებები ეწოდება. მაგალითად,

$$3a^3c-\frac{2}{3}b,\ \frac{x+\sqrt{2}y^2}{5}$$

მთელი გამოსახულებებია.

ცვლადების შემცველ გამოსახულებებს, რომლებშიც ცვლადების მიმართ გამოყენებულია შეკრების, გამოკლების, გამრავლების, გაყოფისა და მთელ ხარისხში ახარისხების ოპერაციები, რაციონალური გამოსახულებები ეწოდება. თუ გამოსახულებაში გარდა აღნიშნული მოქმედებებისა ცვლადების მიმართ გამოყენებულია ამოფესვის ან წილად ხარისხში ახარისხების ოპერაციები, მაშინ გამოსახულებას ირაციონალურს ეწოდებენ. მაგალითად,

$$a^2b+c^{-1},\ \frac{2}{3}xy^4-\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x+y}$$

გამოსახულებები რაციონალურია, ხოლო

$$\left(a+\sqrt{b}\right)^2-1,\ \frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x^{1/3}-y^{1/3}}$$

გამოსახულებები–ირაციონალური.

$\frac{A}{B}$ სახის გამოსახულებას, სადაც A და B ასოებით აღნიშნულია რიცხვითი ან ცვლადის შემცველი გამოსახულებები, ალგებრულ წილადს უწოდებენ.

A გამოსახულებას წილადის მრიცხველი ეწოდება, ხოლო B გამოსახულებას–მნიშვნელი.

ალგებრულ წილადებზე ვრცელდება ყველა ის თვისება და მოქმედებათა შესრულების წესი, რაც ჩვეულებრივ წილადებს გააჩნიათ.

მაგალითები

1. შეკვეცეთ წილადები:

ა) $\dfrac{ax+2a}{x^2-4}=\dfrac{a(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{a}{x-2}$;

ბ) $\dfrac{a^2-ab+ac-bc}{a^2-2ab+b^2}=\dfrac{a(a-b)+c(a-b)}{(a-b)^2}=\dfrac{(a-b)(a+c)}{(a-b)^2}=$

$=\dfrac{a+c}{a-b}$;

გ) $\dfrac{a\sqrt{a}-8}{ba^{1/2}-2b}=\dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^3-2^3}{b\left(\sqrt{a}-2\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{a}-2\right)\left(a+2\sqrt{a}+4\right)}{b\left(\sqrt{a}-2\right)}=$

$=\dfrac{a+2\sqrt{a}+4}{b}$.

2. მოსპეთ ირაციონალობა წილადის მნიშვნელში:

ა) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^3}}=\dfrac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[5]{a^3}\sqrt[5]{a^2}}=\dfrac{\sqrt[5]{a^2}}{a}$;

ბ) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$;

გ) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=$

$=\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b}$;

დ) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\dfrac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=$

$=\dfrac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$.

3. შეასრულეთ მოქმედებანი:

ა) $\dfrac{b}{a^2-ab}+\dfrac{a}{ab-b^2}-\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{b}{a(a-b)}+\dfrac{a}{b(a-b)}-\dfrac{a+b}{ab}=$

$=\dfrac{b^2+a^2-a^2+b^2}{ab(a-b)}=\dfrac{2b}{a(a-b)}$;

ბ) $\left(\dfrac{a-2}{3-b}\right)^2:\dfrac{2a-a^2}{9-b^2}=\dfrac{(2-a)^2}{(3-b)^2}\cdot\dfrac{(3-b)(3+b)}{a(2-a)}=$

$=\dfrac{(2-a)(3+b)}{a(3-b)}$;

გ) $\left(\dfrac{2}{2x+y}-\dfrac{1}{2x-y}-\dfrac{3y}{y^2-4x^2}\right)\cdot\left(\dfrac{y^2}{8x^2}-\dfrac{1}{2}\right)=$

$=\left(\dfrac{2}{2x+y}-\dfrac{1}{2x-y}+\dfrac{3y}{(2x+y)(2x-y)}\right)\cdot\dfrac{y^2-4x^2}{8x^2}=$

$=\dfrac{4x-2y-2x-y+3y}{(2x+y)(2x-y)}\cdot\dfrac{(y-2x)(y+2x)}{8x^2}=-\dfrac{1}{4x}$;

დ) $\left(\dfrac{\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{x-2x^{1/2}y^{1/2}+y}+\dfrac{\sqrt{x}-3\sqrt{y}}{x-y}\right)\cdot\dfrac{x^{1/2}-y^{1/2}}{2}=$

$=\left(\dfrac{\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}+\dfrac{\sqrt{x}-3\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2}=$

$=\dfrac{\left(\sqrt{x}+3\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)+\left(\sqrt{x}-3\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}\cdot\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2}=$

$=\dfrac{x+\sqrt{xy}+3\sqrt{xy}+3y+x-\sqrt{xy}-3\sqrt{xy}+3y}{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=\dfrac{2x+6y}{2(x-y)}=$

$=\dfrac{x+3y}{x-y}$;

ე) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}+$

$+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}-\dfrac{2\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}+$

$+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}-\dfrac{2\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)}{4}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.$

§19. ფუნქცია. განსაზღვრის არე. მნიშვნელობათა სიმრავლე. შექცეული ფუნქცია

ვთქვათ მოცემულია ორი სიმრავლე X და Y. მათ ელემენტებს შორის შეიძლება დამყარდეს სხვადასხვა სახის შესაბამისობა, რომლებსაც აღნიშნავენ $f, g, h, \ldots$ ასოებით.

განსაზღვრება. X და Y სიმრავლეებს შორის შესაბამისობას, როცა X სიმრავლის ყოველ ელემენტს Y სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი შეესაბამება, ფუნქცია ეწოდება.

ფუნქციის ჩასაწერად, რომელიც ამყარებს შესაბამისობას X და Y სიმრავლეებს შორის რაიმე f წესით, მიღებულია აღნიშვნები:

$X \xrightarrow{f} Y$, ან $f : X \to Y$, ან $y = f(x)$, სადაც $x \in X$, $y \in Y$.

x-ს უწოდებენ დამოუკიდებელ ცვლადს ანუ არგუმენტს, ხოლო $f(x)$–ს ფუნქციის მნიშვნელობას, რომელიც შეესაბამება არგუმენტის x მნიშვნელობას. შემდგომში ხშირად ვისარგებლებთ აგრეთვე გამოთქმებით:
" f ფუნქცია", " $f(x)$ ფუნქცია", ან " y ფუნქცია".

X სიმრავლეს f ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება და $D(f)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. Y სიმრავლის ყველა იმ ელემენტთა ქვესიმრავლეს, რომლებიც X სიმრავლის ერთ ელემენტს მაინც შეესაბამებიან, f ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე ან ცვლილების არე ეწოდება და $E(f)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

f ფუნქციას, რომლისთვისაც $D(f) = X$, ხოლო $E(f) \subset y$ უწოდებენ აგრეთვე X სიმრავლის ასახვას Y სიმრავლეში. კერძოდ თუ $E(f) = Y$, მაშინ ვიტყვით, რომ f არის X სიმრავლის ასახვა Y–ზე.

ვთქვათ, მოცემულია f ფუნქცია, რომელიც X სიმრავლეს ასახავს Y სიმრავლეზე. თუ ამ ფუნქციის შექცეული g შესაბამისობა წარმოადგენს ფუნქციას, მაშინ f–ს ეწოდება შექცევადი, ხოლო g–ს მისი შექცეული ფუნქცია და იგი f^{-1} სიმბოლოთი აღინიშნება.

f^{-1} ფუნქციის განსაზღვრის არეა $E(f)$, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე $D(f)$, ე. ი. $D(f^{-1}) = E(f)$ და

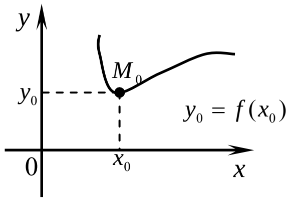
$E(f^{-1})=D(f)$. f–ს და f^{-1}–ს ურთიერთშექცეულ ფუნქციებს უწოდებენ.

შევნიშნოთ, რომ შექცევადია მხოლოდ ის ფუნქცია, რომელიც თავის ყოველ მნიშვნელობას ღებულობს მხოლოდ ერთხელ.

§20. რიცხვითი ფუნქცია და მისი გრაფიკი. შექცეული ფუნქციის გრაფიკი

ვთქვათ მოცემულია ფუნქციები $f: X \to Y$ და $g: Y \to Z$. ამ ფუნქციათა კომპოზიცია (რთული ფუნქცია) ეწოდება ისეთ $F: X \to Z$ ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით:

$$F(x)=g\big(f(x)\big),\ x \in X .$$



ნახ. 3

ანალოგიურად შეიძლება განვიხილოთ რთული ფუნქცია, რომელიც მიიღება რამოდენიმე ფუნქციის კომპოზიციით

$$y=f_1\big(f_2\big(\ldots f_n(x)\big)\ldots\big).$$

ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე რიცხვითი სიმრავლეებია, რიცხვითი ფუნქცია ეწოდება. ე. ი. რიცხვითი ფუნქცია არის R სიმრავლის რაიმე D ქვესიმრავლის ასახვა R სიმრავლის მეორე E ქვესიმ-რავლეზე, სადაც D წარმოადგენს ფუნქციის განსაზღვრის არეს, ხოლო E მნიშვნელობათა სიმრავლეს.

შემდგომში ჩვენ მხოლოდ რიცხვით ფუნქციებს განვიხილავთ, თუ არ იქნა სპეციალური მითითება.

განსაზღვრება. f ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება xOy სიბრტყის ყველა იმ $(x;y)$ წერტილთა A სიმრავლეს, რომელთათვისაც $y=f(x)$, სადაც $x \in D(f)$, ე. ი. $A=\{(x;y): x \in D(f), y=f(x)\}$.

იმ კერძო შემთხვევაში, როდესაც $y=f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა Ox ღერძის რაიმე შუალედი, ფუნქციის გრაფიკი საზოგადოდ წარმოადგენს რაღაც წირს. (ნახ. 3)

თუ $y=f(x)$ ფუნქცია შექცევადია, მაშინ $x=f^{-1}(y)$. მიღებულია, რომ f და f^{-1} ფუნქციების არგუმენტად ერთი და იგივე ცვლადი ვიგულისხმოთ და ამიტომ $y=f(x)$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია ჩაიწერება $y=f^{-1}(x)$ სახით. მაგალითად,

$y = 2x + 1$ ფუნქციის შექცეულია $y = \frac{x-1}{2}$ ფუნქცია. ცხადია, რომ $f\left[f^{-1}(x)\right] = x$ და $f^{-1}\left[f(x)\right] = x$. ამასთან, იმისათვის, რომ f ფუნქცია იყოს თავისთავის შექცეული, აუცილებელია, რომ $D(f) = E(f)$.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ თეორემა ურთიერთშექცეული ფუნქციების გრაფიკების ურთიერთმდებარეობის შესახებ.

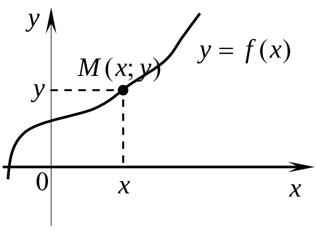
თეორემა. ურთიერთშექცეული ფუნქციების გრაფიკები სიმეტრიულია იმ წრფის მიმართ, რომელსაც პირველი და მესამე საკოორდინატო კუთხის ბისექტრისები შეადგენენ.

§21. ფუნქციის მოცემის ხერხები

განსაზღვრის თანახმად ფუნქცია ითვლება მოცემულად, თუ ცნობილია ფუნქციის განსაზღვრის არე და შესაბამისობის წესი. ამასთან, ამ წესის მოცემის ხერხი შეზღუდული არ არის. განვიხილოთ ფუნქციის მოცემის სამი ყველაზე უფრო გავრცელებული ხერხი: ცხრილური, გრაფიკული და ანალიზური.

ცხრილური ხერხი. ბუნების მოვლენათა შესწავლის დროს ხშირად საქმე გვაქვს ისეთ ცვლადებთან, რომელთა შორის არსებულ დამოკიდებულებას ადგენენ ცდის საფუძველზე. ასეთ შემთხვევაში ცდათა შედეგების მიხედვით ადგენენ ცხრილს, რომელშიც მოცემულია არგუმენტის სხვადასხვა მნიშვნელობების შესაბამისი ფუნქციის მნიშვნელობები. ფუნქციის მოცემის ასეთ ხერხს ცხრილური ხერხი ეწოდება.

გრაფიკული ხერხი. ვთქვათ სიბრტყეზე აღებულია მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა და ამ სისტემაში მოცემულია ისეთი $M(x;y)$ წერტილთა სიმრავლე, რომელთაგან არც ერთი ორი წერტილი არ ძევს Oy ღერძის პარალელურ ერთსადაიმავე წრფეზე. წერტილთა ასეთი სიმრავლე განსაზღვრავს ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლეა შესაბამისად მოცემულ წერტილთა სიმრავლის აბსცისთა და ორდინატთა სიმრავლეები. მართლაც, ნებისმიერ x რიცხვს განსაზღვრის არედან შეესაბამება ერთადერთი y რიცხვი, ისეთი, რომ $M(x;y)$ წერტილი მოცემულ სიმრავლეს ეკუთვნის (ნახ. 4).



ნახ. 4.

ფუნქციის მოცემის ასეთ ხერხს

გრაფიკული ხერხი ეწოდება.

ანალიზური ხერხი. უმეტეს შემთხვევაში ფუნქცია მოცემულია ფორმულის საშუალებით, რომელიც გვიჩვენებს, თუ რა მოქმედებები უნდა ჩავატაროთ არგუმენტზე, რომ მივიღოთ ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა. ასეთ ფორმულას ფუნქციის ანალიზური გამოსახულება ეწოდება, ხოლო ხერხს–ფუნქციის მოცემის ანალიზური ხერხი. მაგალითად,

$$y = 3x^2 - 1; \qquad y = \frac{2x-9}{x+7}; \qquad f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ როცა } x \le 0, \\ x+1, \text{ როცა } x > 0 \end{cases}$$

ფუნქციები მოცემულია ანალიზურად.

თუ ფუნქცია მოცემულია ფორმულით და არ არის მითითებული განსაზღვრის არე, მაშინ იგულისხმება, რომ ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა არგუმენტის ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლისთვისაც ფორმულას აზრი აქვს.

განვიხილოთ რამოდენიმე მაგალითი.

1. $y = x^2 + 1$ ფორმულით მოცემულია ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[1;+\infty[$ შუალედი.

2. $y = \sqrt{16 - x^2}$ ფორმულა განსაზღვრავს ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არეა $[-4;4]$, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე კი $[0;4]$ შუალედი.

§22. ზრდადი და კლებადი, შემოსაზღვრული და შემოუსაზღვრელი ფუნქციები

განსაზღვრება. f ფუნქციას ეწოდება ზრდადი რაიმე სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი $x_1 < x_2$ რიცხვებისათვის მართებულია უტოლობა $f(x_1) < f(x_2)$.

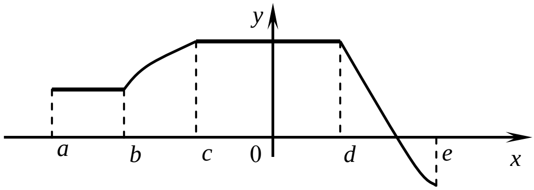
განსაზღვრება. f ფუნქციას ეწოდება კლებადი რაიმე სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი $x_1 < x_2$ რიცხვებისათვის მართებულია უტოლობა $f(x_1) > f(x_2)$.

მაგალითად, $y = x^2$ ფუნქცია კლებადია $]-\infty;0]$ შუალედში და ზრდადია $[0;+\infty[$ შუალედში.

განსაზღვრება. f ფუნქციას ეწოდება არაკლებადი რაიმე სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი $x_1 < x_2$ რიცხვები-

სთვის მართებულია უტოლობა $f(x_1)\le f(x_2)$, ხოლო არაზრდადი, თუ $f(x_1)\ge f(x_2)$.

მე-5 ნახაზზე გამოსახული გრაფიკით მოცემული ფუნქცია არაკლებადია $[a;d]$ შუალედში, ზრდადია $[b;c]$–ში, არაზრდადია $[a;b]$ და $[c;e]$ შუალედებში და კლებადია $[d;e]$–ში.



ნახ. 5

ფუნქციას ეწოდება მონოტონური რაიმე სიმრავლეზე, თუ ის ამ სიმრავლეზე არის არაზრდადი ან არაკლებადი. თუ ფუნქცია ზრდადია ან კლებადი, მაშინ იგი თავის ყოველ მნიშვნელობას მხოლოდ ერთხელ ღებულობს, ამიტომ იგი შექცევადია და მისი შექცეული ფუნქცია შესაბამისად ზრდადია ან კლებადია.

განსაზღვრება. f ფუნქციას ეწოდება ზემოდან შემოსაზღვრული რაიმე სიმრავლეზე, თუ არსებობს ისეთი M რიცხვი, რომ ამ სიმრავლის ნებისმიერი x რიცხვისათვის

$$f(x)\le M .$$

განსაზღვრება. f ფუნქციას ეწოდება ქვემოდან შემოსაზღვრული რაიმე სიმრავლეზე, თუ არსებობს ისეთი m რიცხვი, რომ ამ სიმრავლის ნებისმიერი x რიცხვისათვის

$$f(x)\ge m .$$

განსაზღვრება. ფუნქციას ეწოდება შემოსაზღვრული რაიმე სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლეზე იგი შემოსაზღვრულია როგორც ზემოდან, ასევე ქვემოდან.

თუ ფუნქცია არ არის შემოსაზღვრული რაიმე სიმრავლეზე, მაშინ მას შემოუსაზღვრელი ფუნქცია ეწოდება ამ სიმრავლეზე.

მაგალითად, $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ შემოსაზღვრულია მთელ ღერძზე, რადგან $0<\dfrac{1}{1+x^2}\le 1$, ხოლო $y=\dfrac{1}{x}$ ფუნქცია შემოუსაზღვრელია განსაზღვრის არეში, თუმცა იგი ზემოდან შემოსაზღვრულია $]-\infty;0[$ შუალედში და ქვემოდან შემოსაზღვრულია $]0;+\infty[$ შუალედში.

§23. ლუწი, კენტი და პერიოდული ფუნქციები

ვთქვათ, A რიცხვთა რაიმე სიმრავლეა. ამ სიმრავლეს ეწოდება სიმეტრიული ნულის მიმართ, თუ $x \in A$ პირობიდან, გამომდინარეობს, რომ $-x \in A$.

მაგალითად, $[-a;a]$, R, Z, Q ნულის მიმართ სიმეტრიული სიმრავლეებია.

განსაზღვრება. f ფუნქციას ეწოდება ლუწი, თუ მისი განსაზღვრის არე სიმეტრიულია ნულის მიმართ და ნებისმიერი $x \in D(f)$ –სათვის

$$f(-x) = f(x).$$

მაგალითად, $y = x^2$ და $y = |x|$ ლუწი ფუნქციებია.

განსაზღვრება. f ფუნქციას ეწოდება კენტი, თუ მისი განსაზღვრის არე სიმეტრიულია ნულის მიმართ და ნებისმიერი $x \in D(f)$ –ისათვის

$$f(-x) = -f(x).$$

მაგალითად, $y = x$ და $y = x^3$ კენტი ფუნქციებია.

ადვილი საჩვენებელია, რომ ლუწი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ, ხოლო კენტი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ. შევნიშნოთ, რომ ფუნქცია შეიძლება არც ლუწი იყოს და არც კენტი. მაგალითად, $y = x^2 + x$ ფუნქცია არც ლუწია და არც კენტი.

განსაზღვრება. f ფუნქციას ეწოდება პერიოდული, პერიოდით $l \neq 0$, თუ ნებისმიერი $x \in D$ –სათვის რიცხვები $x - l$ და $x + l$ აგრეთვე ეკუთვნიან $D(f)$ –ს და მართებულია ტოლობა:

$$f(x+l) = f(x).$$

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ f ფუნქციის პერიოდი არის l და $x \in D(f)$, მაშინ

$$f(x) = f((x-l)+l) = f(x-l).$$

ასევე შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

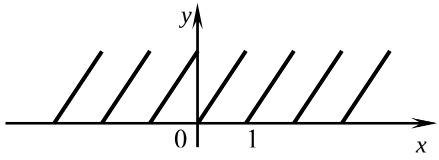
$$f(x+kl) = f(x), \text{ სადაც } k \in Z.$$

ამრიგად, ყოველ პერიოდულ ფუნქციას გააჩნია პერიოდთა უსასრულო სიმრავლე. შემდგომში ფუნქციის პერიოდის ქვეშ

ვიგულისხმებთ უმცირეს დადებით პერიოდს, თუ იგი არსებობს და მას ძირითად პერიოდს ვუწოდებთ.

მაგალითები

1. ფუნქცია $y = x - [x]$, სადაც $[x]$ წარმოადგენს უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც არ აღემატება x რიცხვს, პერიოდულია პერიოდით 1 (ნახ. 6).



ნახ. 6

2. დირიხლეს ფუნქცია

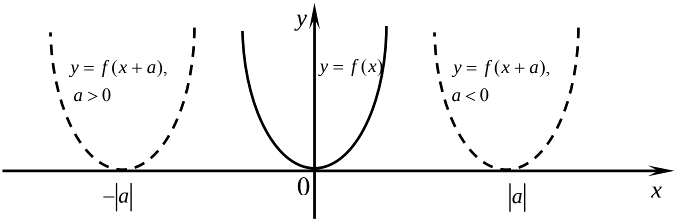
$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ როცა } x \text{ რაციონალურია}, \\ 1, \text{ როცა } x \text{ ირაციონალურია} \end{cases}$$

პერიოდულია და მისი პერიოდია ნებისმიერი რაციონალური r რიცხვი. მართლაც, თუ x რაციონალურია, მაშინ $x + r$ აგრეთვე რაციონალურია, ხოლო, თუ x ირაციონალურია, მაშინ $x + r$ რიცხვიც ირაციონალურია, ამიტომ დირიხლეს ფუნქციის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ $f(x + r) = f(x)$, ე.ი. $f(x)$ პერიოდულია პერიოდით r. ამრიგად, დირიხლეს ფუნქცია არის მაგალითი ისეთი ფუნქციისა, რომელსაც უმცირესი დადებითი პერიოდი არ გააჩნია.

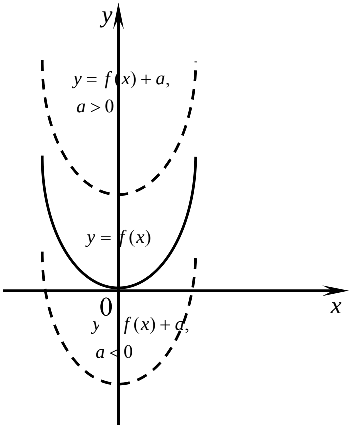
§24. ფუნქციის გრაფიკის ზოგიერთი გარდაქმნა

ამ პარაგრაფში ჩამოვაყალიბებთ წესებს, რომელთა საშუალებით შეიძლება აიგოს $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $(a \in R)$, $y = f(-x)$, $y = -f(x)$, $y = |f(x)|$ და $y = f(|x|)$ ფუნქციათა გრაფიკები, თუ მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი.

1. $y = f(x + a)$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისაგან პარალელური გადატანით $|a|$ მანძილზე, Ox ღერძის მიმართულებით, თუ $a < 0$ და საწინააღმდეგო მიმართულებით, თუ $a > 0$ (ნახ.7).



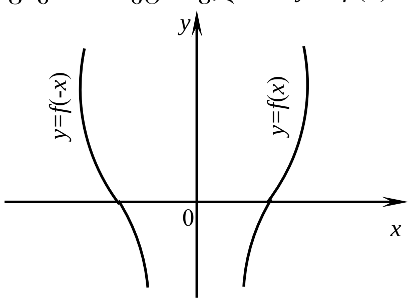
ნახ. 7



ნახ. 8

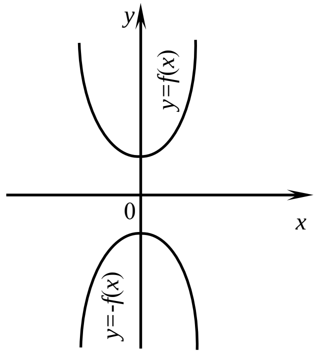
2. $y = f(x)+a$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისაგან პარალელური გადატანით $|a|$ მანძილზე Oy ღერძის მიმართულებით, თუ $a>0$ და საწინააღმდეგო მიმართულებით, თუ $a<0$ (ნახ. 8).

3. $y = f(-x)$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისა Oy ღერძის მიმართ (ნახ. 9).



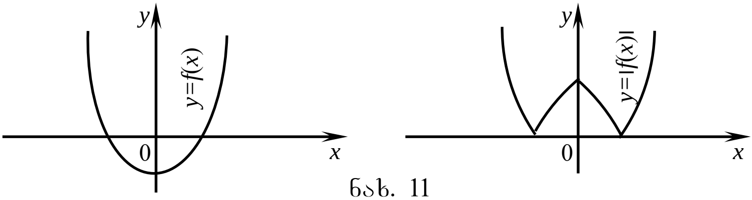
ნახ. 9

4. $y=-f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისა Ox ღერძის მიმართ (ნახ.10).



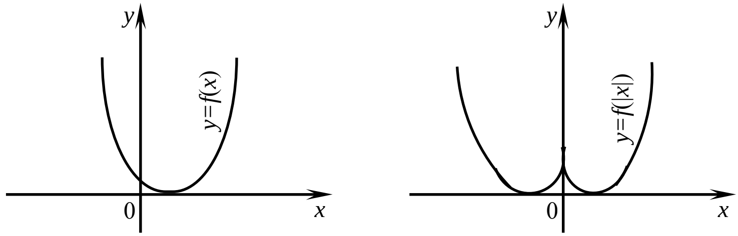
ნახ. 10

5. $y=|f(x)|$ ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად საჭიროა $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ის ნაწილი, რომელიც Ox ღერძის ქვემოთ მდებარეობს, სიმეტრიულად აისახოს Ox ღერძის მიმართ, ხოლო დანარჩენი ნაწილი უცვლელად დავტოვოთ (ნახ.11).



ნახ. 11

6. $y=f(|x|)$ ფუნქციის გრაფიკი არგუმენტის არაუარყოფითი მნიშვნელობებისათვის ემთხვევა $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს. რადგან $y=f(|x|)$ ფუნქცია ლუწია, ამიტომ მისი გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ (ნახ.12).



ნახ. 12

§25. წრფივი ფუნქცია

$y = kx + b$ სახის ფუნქციას, სადაც k და b ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, წრფივი ფუნქცია ეწოდება. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე.

თუ $k = 0$, მაშინ წრფივი ფუნქცია მიიღებს სახეს $y = b$, ე. ი. ამ შემთხვევაში ის მუდმივი ფუნქციაა.

როცა $k > 0$, მაშინ $y = kx + b$ ფუნქცია ზრდადია. მართლაც, თუ x_1 და x_2 არგუმენტის ორი ნებისმიერი მნიშვნელობაა, ამასთან, $x_1 < x_2$, მაშინ ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობებისათვის გვაქვს:

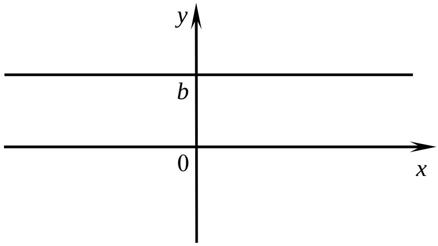
$$y_1 - y_2 = (kx_1 + b) - (kx_2 + b) = k(x_1 - x_2) < 0 \text{, ე.ი. } y_1 < y_2 .$$

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ როდესაც $k < 0$, $y = kx + b$ ფუნქცია კლებადია.

ამრიგად, $y = kx + b$ ფუნქცია მონოტონურია.

ვაჩვენოთ, რომ $y = kx + b$ ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს წრფეს.

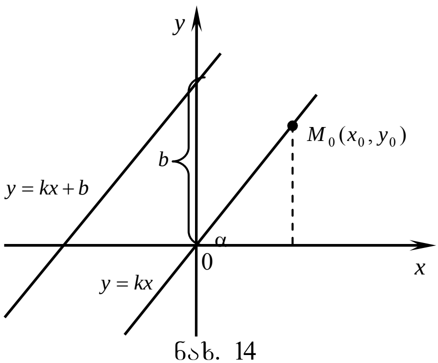
თუ $k = 0$, მაშინ არგუმენტის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ფუნქცია ღებულობს ერთი და იგივე b მნიშვნელობას. ცხადია, ამ შემთხვევაში ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს Ox ღერძის პარალელურ წრფეს, რომელიც ჰკვეთს Oy ღერძს $(0;b)$ წერტილში (ნახ.13). კერძოდ, როცა $b = 0$, მაშინ გრაფიკი ემთხვევა Ox ღერძს, ამიტომ ამბობენ, რომ $y = 0$ წარმოადგენს Ox ღერძის განტოლებას.



ნახ. 13

როცა $b=0$ და $k \neq 0$, მაშინ $y=kx$. ამ ფუნქციის გრაფიკი გადის კოორდინატთა სათავეზე, რადგან (0;0) წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ $y=kx$ განტოლებას.

განვიხილოთ სათავისაგან განსხვავებული $M_0(x_0;y_0)$ წერტილი, რომელიც საძებნ გრაფიკზე ძევს. $O(0;0)$ და $M_0(x_0;y_0)$ წერტილებზე გავატაროთ წრფე და ვაჩვენოთ, რომ იგი წარმოადგენს მოცემული ფუნქციის გრაფიკს. რადგან M_0 წერტილი გრაფიკზე ძევს, ამიტომ $y_0=kx_0$, ანუ $\frac{y_0}{x_0}=k=tg\alpha$, სადაც α არის OM_0 წრფის მიერ Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხე (ნახ. 14). გრაფიკის ნებისმიერი სხვა $M(x;y)$ წერტილისათვის $\frac{y}{x}=k=tg\alpha$. ამიტომ M წერტილი ძევს OM_0 წრფეზე. პირიქით, OM_0 წრფის ნებისმიერი $M(x;y)$ წერტილისათვის $\frac{y}{x}=tg\alpha=k$, ანუ $y=kx$.



ნახ. 14

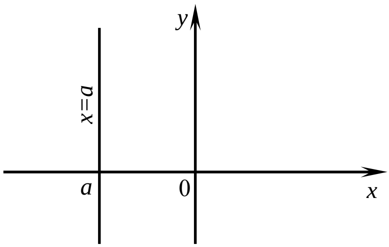
ამრიგად, $y=kx$ ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს კოორდინატთა სათავეზე გამავალ წრფეს, რომლის დახრის კუთხეს განსაზღვრავს k კოეფიციენტი, რომელსაც წრფის კუთხური კოეფიციენტი ეწოდება. თუ $k=1$, ფუნქცია მიიღებს სახეს $y=x$. ამ ფუნქციის გრაფიკი არის წრფე, რომელიც I და III საკოორდინატო

კუთხეების ბისექტრისათა გაერთიანებას წარმოადგენს და მას ხშირად I და III საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისას უწოდებენ.

როცა $b \neq 0$ და $k \neq 0$, მაშინ $y = kx + b$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y = kx$ ფუნქციის გრაფიკისაგან $|b|$ მანძილზე პარალელური გადატანით Oy ღერძის მიმართულებით, თუ $b > 0$ და საწინააღმდეგო მიმართულებით, თუ $b < 0$ (ნახ.14).

$y = kx + b$ ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად საკმარისია ავაგოთ ამ გრაფიკის ორი წერტილი (მაგალითად, ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები) და მათზე გავავლოთ წრფე.

შევნიშნოთ, რომ Oy ღერძის არაპარალელური ნებისმიერი წრფის განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს $y = kx + b$ სახით, ხოლო Oy ღერძის პარალელური ნებისმიერი წრფის განტოლებას აქვს სახე $x = a$, სადაც a მოცემული წრფის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილის აბსცისაა (ნახ.15). კერძოდ, $x = 0$ წარმოადგენს Oy ღერძის განტოლებას.



ნახ. 15

§26. $y = \frac{k}{x}$ ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

განვიხილოთ $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ ფუნქცია. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(y) =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$. ეს ფუნქცია კენტია, რადგან $f(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x)$, ამიტომ მისი გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ.

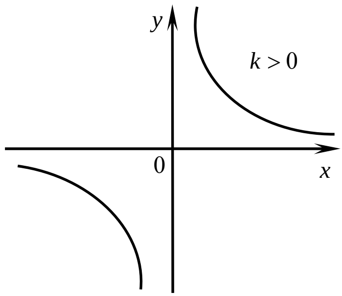
თუ $k>0$, ფუნქცია კლებადია როგორც $\left]-\infty;0\right[$ ასევე $\left]0;+\infty\right[$ შუალედში. მართლაც, თუ $x_1, x_2 \in \left]-\infty;0\right[$ და $x_1 < x_2$, მაშინ $f(x_1)-f(x_2)=\frac{k}{x_1}-\frac{k}{x_2}=\frac{k(x_2-x_1)}{x_1 x_2}>0 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$. ამასთან, ამ შუალედში ფუნქციის ცვლილების არეა $\left]-\infty;0\right[$.

ასევე, თუ $x_1, x_2 \in \left]0;+\infty\right[$ და $x_1 < x_2$, მაშინ $f(x_1)>f(x_2)$ და ამ შუალედში ფუნქციის ცვლილების არეა $\left]0;+\infty\right[$.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ თუ $k<0$, მაშინ აღნიშნულ შუალედებში ფუნქცია ზრდადია, ამასთან $\left]-\infty;0\right[$ შუალედში ფუნქციის ცვლილების არეა $\left]0;+\infty\right[$, ხოლო $\left]0;+\infty\right[$ შუალედში კი– $\left]-\infty;0\right[$.

შევნიშნოთ, რომ ფუნქცია $y=\frac{k}{x}$ მთელ განსაზღვრის არეში მონოტონური არ არის.

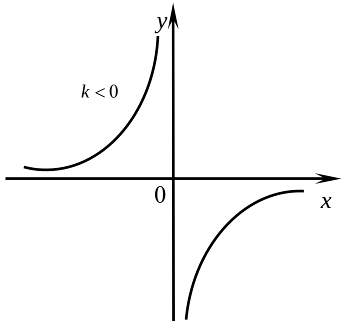
ზემოთ მოყვანილი თვისებებიდან გამომდინარე $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი შედგება ორი შტოსაგან, რომლებიც მოთავსებულია I და III საკოორდინატო მეოთხედებში, როცა $k>0$ (ნახ.16), ხოლო II და IV მეოთხედებში, როცა $k<0$ (ნახ.17).



ნახ. 16

$y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკს ჰიპერბოლა ეწოდება.

იმისათვის, რომ k–ს კონკრეტული მნიშვნელობისათვის ჰიპერბოლა აიგოს უფრო ზუსტად, მიზანშეწონილია წინასწარ ავაგოთ გრაფიკის ზოგიერთი წერტილი.



ნახ. 17

§27. წილად-წრფივი ფუნქცია

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ფუნქციას, სადაც a,b,c და d მოცემული რიცხვებია, ამასთან $c\neq 0$ და $ad\neq bc$, წილად-წრფივი ფუნქცია ეწოდება. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, გარდა რიცხვისა $x=-\dfrac{d}{c}$. მარტივი გარდაქმნებით წილად-წრფივ ფუნქციას შეიძლება მიეცეს სახე

$$y=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ წილად-წრფივი ფუნქციის გრაფიკი არის ჰიპერბოლა.

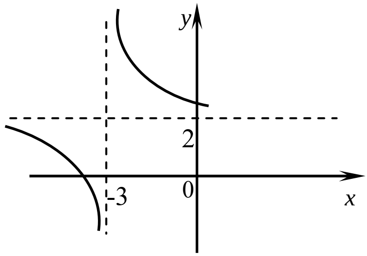
მაგალითი. ავაგოთ $y=\dfrac{2x+7}{x+3}$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(y)=\left]-\infty;-3\right[\cup\left]-3;+\infty\right[$. ჩავწეროთ მოცემული ფუნქცია ასეთი სახით

$$y=2+\frac{1}{x+3}$$

თუ გავითვალისწინებთ §24-ის პირველ და მეორე პუნქტებს, ცხადია, რომ ამ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=\dfrac{1}{x}$ ფუნქციის

გრაფიკისაგან პარალელური გადატანით Ox ღერძის საწინააღმდეგო მიმართულებით 3 ერთეულით და Oy ღერძის მიმართულებით 2 ერთეულით (ნახ. 18).



ნახ. 18

§28. კვადრატული ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

$y = ax^2 + bx + c$ ფუნქციას, სადაც $a \neq 0$ კვადრატული ფუნქცია ეწოდება. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე.

როცა $b = c = 0$, მაშინ $y = ax^2$. ეს ფუნქცია ლუწია, რადგან $f(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = f(x)$. ამიტომ მისი გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ.

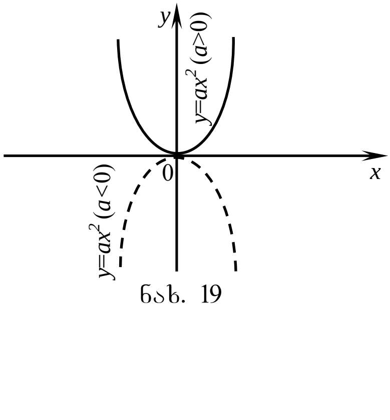
თუ $a > 0$, მაშინ $E(y) = [0;+\infty[$. ეს ფუნქცია კლებადია $]-\infty;0]$ შუალედში, ხოლო $[0;+\infty[$ შუალედში ზრდადია. მართლაც, თუ $x_1, x_2 \in]-\infty;0]$ და $x_1 < x_2$, მაშინ

$$f(x_1) - f(x_2) = ax_1^2 - ax_2^2 = a\left(x_1^2 - x_2^2\right) = a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0 \Rightarrow f(x_1) >$$
$$> f(x_2).$$

ასევე, თუ $x_1, x_2 \in [0;+\infty[$ და $x_1 < x_2$, მაშინ $f(x_1) < f(x_2)$.

თუ $a < 0$, მაშინ $E(y) =]-\infty;0]$. ამ შემთხვევაში ფუნქცია ზრდადია $]-\infty;0]$ შუალედში, ხოლო $[0;+\infty[$ შუალედში კლებადია.

ზემოთ მოყვანილი თვისებები საშუალებას გვაძლევს ავაგოთ $y = ax^2$



ნახ. 19

ფუნქციის გრაფიკი, რომელსაც პარაბოლა ეწოდება (ნახ. 19).

ზოგად შემთხვევაში $y = ax^2 + bx + c$ ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად მისი მარჯვენა მხარე შემდეგნაირად გარდავქმნათ:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

ჩატარებულ გარდაქმნებს კვადრატული სამწევრიდან სრული კვადრატის გამოყოფა ეწოდება. ამრიგად

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

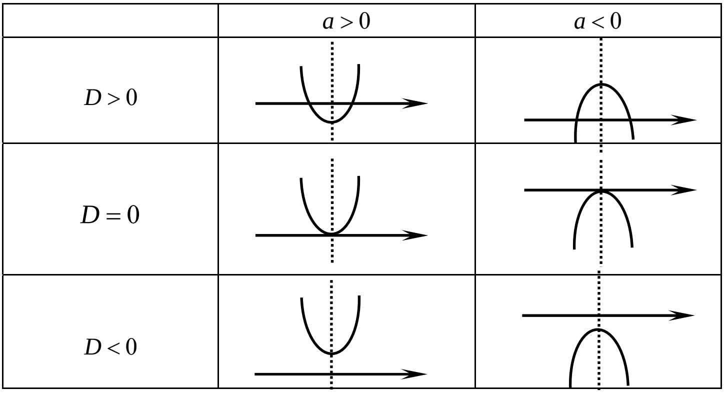
თუ გავითვალისწინებთ §24-ის 1-ელ და მე-2 პუნქტებს, ცხადია, რომ კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს პარაბოლას, რომელიც მიიღება $y = ax^2$ ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით $\left|\frac{b}{2a}\right|$ მანძილით Ox ღერძის მიმართულებით, თუ $\frac{b}{2a} < 0$, ხოლო საწინააღმდეგო მიმართულებით, თუ $\frac{b}{2a} > 0$ და $\left|\frac{4ac - b^2}{4a}\right|$ მანძილით Oy ღერძის მიმართულებით, თუ $\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$, ხოლო საწინააღმდეგო მიმართულებით, თუ $\frac{4ac - b^2}{4a} < 0$.

$\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ წერტილს პარაბოლას წვერო ეწოდება, ხოლო $x = -\frac{b}{2a}$ წრფეს, რომელიც პარაბოლის სიმეტრიის ღერძს წარმოადგენს პარაბოლის ღერძი ეწოდება.

$b^2 - 4ac$ გამოსახულებას კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტი ეწოდება და D ასოთი აღინიშნება.

აბსცისთა ღერძის მიმართ კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის მდებარეობის ექვსი შესაძლო შემთხვევა გამოსახულია მე-20 ნახაზზე.

როგორც ნახაზიდან ჩანს, როცა $a > 0$, პარაბოლის შტოები მიმართულია ზევით, ხოლო, როცა $a < 0$ – ქვევით.



ნახ. 20

§29. ხარისხოვანი ფუნქცია ნატურალური მაჩვენებლით

$y = ax^n$ სახის ფუნქციას, სადაც $a \neq 0$, $n \in N$, ეწოდება ხარისხოვანი ფუნქცია ნატურალური მაჩვენებლით. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე.

a-სა და n–ის ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის ხარისხოვანი ფუნქციის გრაფიკი გადის კოორდინატთა სათავეზე და $(1; a)$ წერტილზე, რადგან ამ წერტილების კოორდინატები აკმაყოფილებენ $y = ax^n$ განტოლებას.

თუ $n = 2k$, $k \in N$, ხარისხოვანი ფუნქცია ლუწია, რადგან

$$f(-x) = a(-x)^{2k} = ax^{2k} = f(x),$$

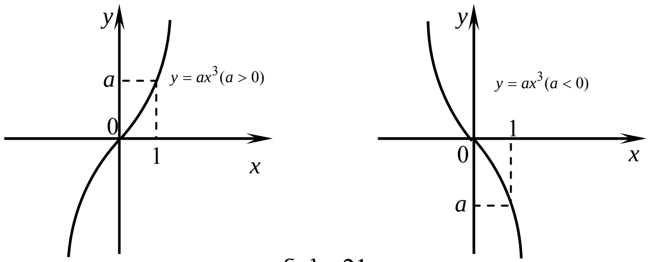
ხოლო, როცა $n = 2k-1$, $k \in N$, –კენტია, რადგან

$$f(-x) = a(-x)^{2k-1} = -ax^{2k-1} = -f(x).$$

$n = 1$ და $n = 2$ მნიშვნელობებისათვის ხარისხოვანი ფუნქცია წარმოადგენს შესაბამისად წრფივ და კვადრატულ ფუნქციებს.

როცა $n = 3$, მაშინ $y = ax^3$. თუ $a > 0$ ეს ფუნქცია ზრდადია, ხოლო თუ $a < 0$–კლებადი; მისი გრაფიკი წარმოადგენს ე. წ. კუბურ პარაბოლას (ნახ. 21).

როცა $n > 3$, მაშინ $y = ax^n$ ფუნქციის გრაფიკს n–ური რიგის პარაბოლა ეწოდება. ფორმით იგი წააგავს პარაბოლას ან კუბურ პარაბოლას შესაბამისად ლუწი და კენტი მაჩვენებლებისათვის.

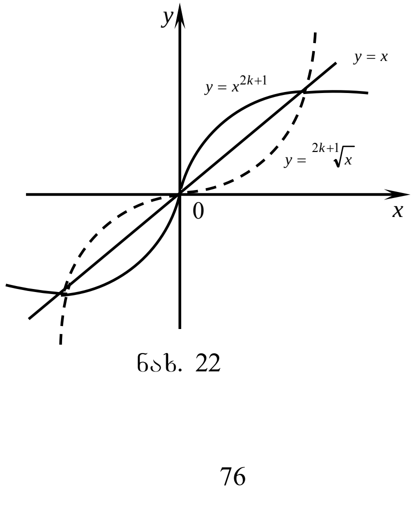


ნახ. 21

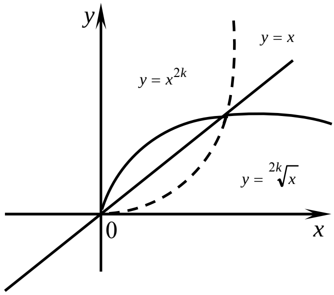
§30. $y = \sqrt[n]{x}$ ფუნქცია

ვთქვათ, მოცემულია $y = \sqrt[n]{x}$ $(n \in N, n \neq 1)$ ფუნქცია. განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა.

1. n ერთისაგან განსხვავებული კენტი რიცხვია, ე. ი. $n = 2k+1$, $k \in N$, მაშინ $y = \sqrt[2k+1]{x}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე $D(y) = R$. ეს ფუნქცია ზრდადია $R-$ზე, როგორც ზრდადი $y = x^{2k+1}$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. რადგან ურთიერთშექცეული ფუნქციების გრაფიკები სიმეტრიულია $y = x$ წრფის მიმართ, ამიტომ $y = \sqrt[2k+1]{x}$ ფუნქციის გრაფიკს ექნება შემდეგი სახე (ნახ. 22).



ნახ. 22



ნახ. 23

2. n ლუწი რიცხვია, ე. ი. $n=2k$, $k \in N$, მაშინ $y=\sqrt[2k]{x}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე $D(y)=[0;+\infty[$. ეს ფუნქცია ზრდადია, როგორც $[0;+\infty[$ შუალედზე ზრდადი $y=x^{2k}$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. რადგან ურთიერთშექცეული ფუნქციების გრაფიკები სიმეტრიულია $y=x$ წრფის მიმართ, ამიტომ $y=\sqrt[2k]{x}$ ფუნქციის გრაფიკს ექნება შემდეგი სახე (ნახ.23).

§31. განტოლება

განსაზღვრება. ტოლობას, რომელიც ცვლადს შეიცავს განტოლება ეწოდება.

იმის მიხედვით, თუ რამდენ ცვლადს შეიცავს განტოლება, იგი შეიძლება იყოს ერთცვლადიანი, ორცვლადიანი და ა.შ.

ერთცვლადიანი განტოლების ამონახსნი (ფესვი) ეწოდება ცვლადის მნიშვნელობას, რომელიც განტოლებას ჭეშმარიტ ტოლობად აქცევს. თუ განტოლება შეიცავს ერთზე მეტ ცვლადს, მაშინ მისი ამონახსნი იქნება შესაბამისად, ცვლადების მნიშვნელობათა დალაგებული წყვილი, სამეული და ა. შ., რომელიც განტოლებას ჭეშმარიტ ტოლობად აქცევს. მაგალითად, $3x-1=2x+5$ განტოლების ამონახსნია რიცხვი 6, რადგან $3\cdot 6-1=2\cdot 6+5$, ხოლო $3x-y=5$ განტოლების ერთ-ერთი ამონახსნია (2;1) წყვილი, რადგან $3\cdot 2-1=5$.

შენიშვნა. უკანასკნელ მაგალითში x ცვლადს ვთვლით პირველ ცვლადად, y ცვლადს კი–მეორედ, ამიტომ (2;1) წყვილისაგან განსხვავებით (1;2) წყვილი არ წარმოადგენს

განხილული განტოლების ამონახსნს არჩეული დალაგების მიმართ.

განტოლების ყველა ამონახსნთა ერთობლიობას განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე ეწოდება. განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე შეიძლება იყოს, როგორც სასრული (კერძოდ, ცარიელი), ასევე უსასრულო. მაგალითად, $5x+3=5x$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელია; $(x+2)(x-3)=0$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეა $\{-2;3\}$, ხოლო $|x|=x$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეა $[0;+\infty[$.

განტოლების ამოხსნა ნიშნავს, მისი ამონახსნთა სიმრავლის პოვნას.

ერთი და იმავე ცვლადების შემცველ განტოლებებს ეწოდება ტოლფასი, თუ მათი ამონახსნთა სიმრავლეები ერთმანეთის ტოლია, როცა თითოეული ამონახსნი დალაგებულია ერთი და იმავე მიმდევრობით.

განტოლების ამოხსნის პროცესში მიზანშეწონილია შევცვალოთ იგი მისი ტოლფასი, უფრო მარტივი განტოლებით, რისთვისაც სარგებლობენ განტოლებათა შემდეგი თვისებებით:

1. თუ განტოლების ორივე მხარეს დავუმატებთ ერთსა და იმავე რიცხვს, მივიღებთ მოცემული განტოლების ტოლფას განტოლებას.

2. თუ განტოლების ერთი მხარიდან მეორეში გადავიტანთ რომელიმე შესაკრებს მოპირდაპირე ნიშნით, მივიღებთ მოცემული განტოლების ტოლფას განტოლებას.

3. თუ განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ ნულისაგან განსხვავებულ ერთსა და იმავე რიცხვზე, მივიღებთ მოცემული განტოლების ტოლფას განტოლებას.

შენიშვნა 1. განტოლების ამოხსნის პროცესში ზოგჯერ საჭიროა ისეთი გარდაქმნის ჩატარება, რომლის შედეგადაც საზოგადოდ არ მიიღება მოცემული განტოლების ტოლფასი განტოლება. კერძოდ, განტოლების ორივე მხარის ახარისხებით ან ცვლადის შემცველ მთელ გამოსახულებაზე გამრავლებით შეიძლება გაჩნდეს გარეშე ამონახსნები, ამიტომ უნდა შემოწმდეს, აკმაყოფილებენ თუ არა მიღებული ამონახსნები მოცემულ განტოლებას.

მაგალითად, თუ $\sqrt{2+x}=x$ განტოლების ორივე მხარეს ავახარისხებთ კვადრატში, მივიღებთ განტოლებას $2+x=x^2$, რომლის ამონახსნებია -1 და 2, მაგრამ -1 არ წარმოადგენს მოცემული განტოლების ამონახსნს.

შენიშვნა 2. თუ განტოლების ორივე მხარეს გავყოფთ ცვლადის შემცველ მთელ გამოსახულებაზე, შეიძლება ზოგიერთი ამონახსნი დაიკარგოს.

მაგალითად, $x^2 = x$ განტოლების ამონახსნებია 0 და 1. ამ განტოლების ორივე მხარის $x-$ზე გაყოფით $x=0$ ამონახსნი იკარგება.

თუ განტოლება მოცემულია

$$g(x)\cdot\varphi(x)=0 \qquad (1)$$

სახით, მაშინ მისი ამონახსნთა სიმრავლე წარმოადგენს

$$g(x)=0 \qquad (2)$$

და

$$\varphi(x)=0 \qquad (3)$$

განტოლებების ყველა იმ ამონახსნების გაერთიანებას, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნიან $g(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების განსაზღვრის არეებს.

მაგალითი. ამოვხსნათ განტოლება

$$(x-2)\sqrt{1-x}=0\,. \qquad (4)$$

ამოხსნა. $\sqrt{1-x}=0$ განტოლების ამონახსნია $x=1$, ხოლო $x-2=0$ განტოლებისა კი $x=2$. რიცხვი 1 ერთდროულად ეკუთვნის $\sqrt{1-x}$ და $x-2$ ფუნქციათა განსაზღვრის არეებს, ხოლო 2 არ ეკუთვნის $\sqrt{1-x}$ ფუნქციის განსაზღვრის არეს, ამიტომ (4) განტოლების ამონახსნია $x=1$.

იმ კერძო შემთხვევაში, როცა $g(x)$ და $\varphi(x)$ მრავალწევრებია, მაშინ (1) განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე წარმოადგენს (2) და (3) განტოლებების ამონახსნთა სიმრავლეების გაერთიანებას.

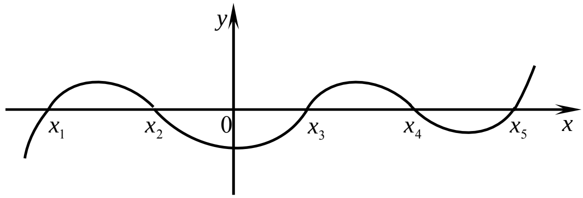
მაგალითად, $(x-3)(x^2-4)=0$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეა $\{-2,2,3\}$, რადგან $x-3=0$ განტოლების ამონახსნია 3, ხოლო $x^2-4=0$ განტოლებისა კი –2 და 2.

მე-2 თვისების გამოყენებით ნებისმიერ ერთცვლადიან განტოლებას შეიძლება მივცეთ სახე

$$f(x)=0\,. \qquad (5)$$

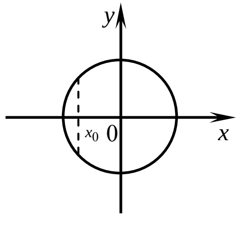
(5) განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე წარმოადგენს $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილების აბსცისთა სიმრავლეს (ნახ. 24).

თუ $y = f(x)$ განვიხილავთ, როგორც ორცვლადიან განტოლებას, მაშინ მას დააკმაყოფილებენ 24-ე ნახაზზე აგებული გრაფიკის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები.



ნახ. 24

განსაზღვრება. ორცვლადიანი განტოლების გრაფიკი ეწოდება სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ მოცემულ განტოლებას.



ნახ. 25

შევნიშნოთ, რომ ორცვლადიანი განტოლების გრაფიკი საზოგადოდ არ წარმოადგენს რაიმე ფუნქციის გრაფიკს. მაგალითად, $x^2 + y^2 = 1$ განტოლების გრაფიკია წრეწირი (ნახ. 25), რომელიც არ წარმოადგენს ფუნქციის გრაფიკს, რადგან აბსცისის ყოველ მნიშვნელობას $]-1;1[$ შუალედიდან შეესაბამება ორდინატის ორი მნიშვნელობა.

§32. ერთცვლადიანი წრფივი და კვადრატული განტოლებები

$\boldsymbol{ax + b} = 0$ სახის განტოლებას, სადაც x ცვლადია, ხოლო a და b ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, წრფივი ერთცვლადიანი განტოლება ეწოდება, თუ $a \neq 0$. მას აქვს ერთადერთი ამონახსნი

$$x = -\frac{b}{a}.$$

წრფივი განტოლება შეიძლება გრაფიკულადაც ამოიხსნას. $ax + b = 0$ განტოლების ამონახსნი წარმოადგენს $y = ax + b$ წრფის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილის აბსცისას.

$\boldsymbol{ax^2 + bx + c} = 0$ სახის განტოლებას, სადაც x ცვლადია, ხოლო a, b და c ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, $a \neq 0$,

კვადრატული განტოლება ეწოდება. a–ს ეწოდება კვადრატული განტოლების პირველი კოეფიციენტი, b-ს მეორე კოეფიციენტი, ხოლო c–ს თავისუფალი წევრი. თუ $a=1$, განტოლებას დაყვანილი სახის კვადრატული განტოლება ეწოდება.

გამოვიყვანოთ კვადრატული განტოლების ამონახსნთა ფორმულა. ამისათვის განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ $4a$–ზე და შევასრულოთ მარტივი იგივური გარდაქმნები. მივიღებთ:

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow 4a^2x^2+4abx+4ac=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4a^2x^2+4abx+b^2+4ac=b^2 \Leftrightarrow (2ax+b)^2=b^2-4ac\ .$$

თუ დისკრიმინანტი $D=b^2-4ac<0$, მაშინ $(2x+b)^2=b^2-4ac$ ტოლობა არ არის ჭეშმარიტი x–ის არცერთი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის, ამიტომ კვადრატულ განტოლებას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი არ გააჩნია.

თუ $D=0$, მაშინ განტოლებას აქვს სახე:

$$(2ax+b)^2=0 \Leftrightarrow 2ax+b=0 \Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}\ ,$$

ე. ი. ამ შემთხვევაში განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც $-\dfrac{b}{2a}$–ს ტოლია.

თუ $D>0$, გვექნება:

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac \Leftrightarrow 2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}\ .$$

აქედან

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ , \tag{1}$$

ე. ი. ამ შემთხვევაში განტოლებას აქვს ორი ამონახსნი:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ ,\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ .$$

ამგვარად, კვადრატული განტოლების ამონახსნთა არსებობა და მათი რაოდენობა დამოკიდებულია დისკრიმინანტზე.

თუ დავუშვებთ, რომ $b=2k$, მაშინ (1) ფორმულას შეიძლება მივცეთ სახე:

$$x=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}\ .$$

ამ ფორმულით სარგებლობა მოსახერხებელია, როდესაც b ლუწი რიცხვია.

როდესაც b და c რიცხვებიდან ერთი მაინც ნულია, მაშინ განტოლებას ეწოდება არასრული სახის კვადრატული განტოლება. არასრული კვადრატული განტოლების ამოხსნა მიზანშეწონილია (1) ფორმულის გამოყენების გარეშე. განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

1. თუ $b \neq 0$ და $c = 0$, გვექნება

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0,$$

საიდანაც $x_1 = 0$, $x_2 = -\dfrac{b}{a}$.

2. თუ $b = 0$ და $c \neq 0$, გვექნება

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}.$$

აქედან ჩანს, რომ განტოლებას ამონახსნი არ გააჩნია, როდესაც a–სა და c–ს აქვთ ერთნაირი ნიშანი, ხოლო როდესაც მათ მოპირდაპირე ნიშნები აქვთ, მაშინ განტოლების ამონახსნებია:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ და } x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

3. თუ $b = c = 0$, მაშინ $ax^2 = 0$ და მისი ამონახსნია 0.

§33. ვიეტის თეორემა

თეორემა. თუ $ax^2 + bx + c = 0$ კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტი $D > 0$, მაშინ განტოლების ამონახსნთა ჯამი უდრის $-\dfrac{b}{a}$–ს, ხოლო ნამრავლი $\dfrac{c}{a}$–ს.

დამტკიცება. როცა $D > 0$, მაშინ კვადრატულ განტოლებას აქვს ორი ამონახსნი

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

აქედან

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2}=\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}=\frac{c}{a}\,.$$

ე. ი.

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \text{ და } x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\,.$$

ამ თეორემას ეწოდება ვიეტის თეორემა. იგი ამყარებს კავშირს კვადრატული განტოლების ამონახსნებსა და კოეფიციენტებს შორის.

შენიშვნა. ვიეტის თეორემა მართებულია იმ შემთხვევაშიც, როდესაც $D=0$, თუ ჩავთვლით, რომ $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.

შედეგი. თუ $x^2+px+q=0$ დაყვანილი კვადრატული განტოლების ამონახსნებია x_1 და x_2, მაშინ

$$x_1+x_2=-p\,,\ \ x_1\cdot x_2=q\,.$$

ე. ი. დაყვანილი კვადრატული განტოლების ამონახსნთა ჯამი უდრის მეორე კოეფიციენტს მოპირდაპირე ნიშნით, ხოლო ნამრავლი–თავისუფალ წევრს.

იმ შემთხვევაში, როდესაც საჭიროა კვადრატული განტოლების შედგენა მისი ამონახსნების მიხედვით, გამოიყენება ვიეტის თეორემის შებრუნებული თეორემა.

თეორემა. თუ m და n რიცხვების ჯამი ტოლია $(-p)$–სი, ხოლო ნამრავლი q–სი, მაშინ m და n

$$x^2+px+q=0 \tag{1}$$

განტოლების ამონახსნებია.

დამტკიცება. პირობის თანახმად $m+n=-p$, ხოლო $m\cdot n=q$, ამიტომ (1) განტოლება შეიძლება შემდეგნაირად ჩავწეროთ:

$$x^2-(m+n)x+mn=0\,. \tag{2}$$

გარდავქმნათ ამ განტოლების მარცხენა მხარე

$$x^2-(m+n)x+mn=x^2-mx-nx+mn=x(x-m)-n(x-m)=$$
$$=(x-m)(x-n)\,.$$

ცხადია, რომ $(x-m)(x-n)$ განტოლება (2) განტოლების ტოლფასია და მას, m-ისა და n–ის გარდა სხვა ამონახსნი არა აქვს.

ამრიგად, m და n რიცხვები $x^2+px+q=0$ განტოლების ამონახსნებია.

§34. კვადრატული სამწევრის დაშლა მამრავლებად

ვთქვათ, მოცემულია კვადრატული სამწევრი ax^2+bx+c, სადაც a, b და c ნამდვილი რიცხვებია, $a \neq 0$, ხოლო x ცვლადია. თუ x_1 და x_2 კვადრატული სამწევრის ფესვებია, მაშინ ისინი წარმოადგენენ $ax^2+bx+c=0$ განტოლების ამონახსნებს და ვიეტის თეორემის თანახმად

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \quad x_1x_2=\frac{c}{a}. \qquad (1)$$

(1) ტოლობების საფუძველზე კვადრატული სამწევრი შემდეგნაირად გარდავქმნათ

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right)=$$

$$=a\left(x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2\right)=a\left(x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\right)=a(x-x_1)(x-x_2).$$

ამრიგად

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

სადაც x_1 და x_2 მოცემული კვადრატული სამწევრის ფესვებია.

მიღებულ ტოლობას კვადრატული სამწევრის მამრავლებად დაშლის ფორმულა ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ თუ $D=0$, მაშინ $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$, სადაც x_0 კვადრატული სამწევრის ფესვია, ხოლო, თუ $D<0$ კვადრატული სამწევრი წრფივ მამრავლებად არ დაიშლება.

§35. ბიკვადრატული განტოლება

$ax^4+bx^2+c=0$ სახის განტოლებას, სადაც x ცვლადია, ხოლო a, b და c ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, $a \neq 0$, ბიკვადრატული განტოლება ეწოდება.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $x^2=y$, მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას y ცვლადის მიმართ

$$ay^2+by+c=0. \qquad (1)$$

განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

1. თუ $D=b^2-4ac<0$, მაშინ ბიკვადრატულ განტოლებას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი არ გააჩნია.

2. თუ $D=0$, მაშინ (1) განტოლების ამონახსნია $y=-\frac{b}{2a}$, ამიტომ აღნიშვნის თანახმად, ბიკვადრატული განტოლების ამოხსნა დაიყვანება $x^2=-\frac{b}{2a}$ განტოლების ამოხსნაზე.

3. თუ $D>0$, მაშინ (1) განტოლების ამონახსნებია $y_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $y_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ და ბიკვადრატული განტოლების ამოხსნა დაიყვანება

$$x^2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \quad x^2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

განტოლებების ამოხსნაზე.

შენიშვნა. ბიკვადრატული განტოლების ამოხსნის პროცესში გამოყენებული ახალი ცვლადის შემოტანის ხერხი გამოიყენება ზოგიერთი სხვა ტიპის განტოლებების ამოხსნის დროსაც.

მაგალითი. ამოვხსნათ განტოლება

$$\frac{6x}{2x^2+1}+\frac{2x^2+1}{6x}=2{,}5\,. \tag{2}$$

ამოხსნა. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $\frac{6x}{2x^2+1}=y$, მივიღებთ განტოლებას

$$y+\frac{1}{y}=2{,}5\,. \tag{3}$$

აქედან $y^2-2{,}5y+1=0 \Leftrightarrow 2y^2-5y+2=0$, საიდანაც

$$y=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4},$$

ე. ი. $y_1=2$, $y_2=\frac{1}{2}$. თუ გავითვალისწინებთ აღნიშვნას, მივიღებთ შემდეგ განტოლებებს

$$\frac{6x}{2x^2+1}=2 \quad \text{და} \quad \frac{6x}{2x^2+1}=\frac{1}{2}.$$

ამოვხსნათ თითოეული მათგანი:

$$\frac{6x}{2x^2+1}=2 \Leftrightarrow 2x^2-3x+1=0\ ^*$$

აქედან

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{3\pm1}{4} \Rightarrow x_1=1, x_2=\frac{1}{2}.$$

$$\frac{6x}{2x^2+1}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2-12x+1=0.$$

აქედან

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-2}}{2} \Rightarrow x_3=\frac{6+\sqrt{34}}{2}, x_4=\frac{6-\sqrt{34}}{2}.$$

ამრიგად (2) განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეა

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{6+\sqrt{34}}{2}, \frac{6-\sqrt{34}}{2}\right\}.$$

§36. ირაციონალური განტოლებები

განტოლებას, რომელიც ცვლადს შეიცავს რადიკალის ნიშნის ქვეშ, ირაციონალური განტოლება ეწოდება.

ირაციონალური განტოლების ამოსახსნელად მოსახერხებელია ის შეიცვალოს სხვა განტოლებით, რომელშიც ცვლადი რადიკალის ნიშნის ქვეშ აღარ იმყოფება. ეს ხშირად მიიღწევა განტოლების ორივე მხარის გარკვეულ ხარისხში ახარისხებით. ზოგჯერ საჭიროა ამ ოპერაციის რამდენიმეჯერ ჩატარება. ახარისხების შედეგად მიღებული განტოლება საზოგადოდ არ იქნება მოცემული განტოლების ტოლფასი (შეიძლება გაჩნდეს ე. წ. გარეშე ფესვი). ამიტომ მიღებული განტოლების თითოეული ფესვი უნდა შემოწმდეს მოცემულ განტოლებაში ჩასმით.

ამოვხსნათ განტოლება

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{5x+4}.$$

განტოლების ორივე მხარის კვადრატში ახარისხებით გვექნება:

$$x+3+2\sqrt{x+3}\sqrt{2x-1}+2x-1=5x+4.$$

აქედან

$$2\sqrt{(x+3)(2x-1)}=2x+2 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+5x-3}=x+1.$$

---

* ეს ორი განტოლება ტოლფასია, რადგან x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის $2x^2+1\neq 0$.

მიღებული განტოლების კვადრატში ახარისხება გვაძლევს:

$$2x^2 + 5x - 3 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 .$$

აქედან

$$x_1 = 1 , \quad x_2 = -4 .$$

შემოწმებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ 1 წარმოადგენს მოცემული განტოლების ფესვს, ხოლო −4 გარეშე ფესვია.

§37. განტოლებათა სისტემები

განსაზღვრება. ერთიდაიმავე ცვლადების შემცველ განტოლებათა სასრულ სიმრავლეს განტოლებათა სისტემა ეწოდება.

ვიტყვით, რომ მოცემულია n ცვლადიანი m განტოლების სისტემა, თუ იგი შეიცავს n ცვლადს და m განტოლებას. მაგალითად, $\{x^2 + y^2 - 3z = 6, 2x - 5y = 0\}$ განტოლებათა სიმრავლე წარმოადგენს 3-ცვლადიან 2 განტოლების სისტემას და მას შემდეგი სახით ჩავწერთ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3z = 6 \\ 2x - 5y = 0. \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემის ამონახსნი ეწოდება ამ სისტემაში შემავალი ყველა განტოლების საერთო ამონახსნს.

სისტემის ყველა ამონახსნთა ერთობლიობას განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე ეწოდება. განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე შეიძლება იყოს, როგორც სასრული (კერძოდ ცარიელი), ასევე უსასრულო.

მაგალითად,

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელია,

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y = 0 \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნთა სიმრავლეა $\{(0;0), (-1;-1)\}$, ხოლო

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნთა სიმრავლეა $\{(a;a) : a \in R\}$, რომელიც უსასრულოა.

თუ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელია, მაშინ სისტემას არათავსებადი ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი–თავსებადი.

განტოლებათა სისტემის ამოხსნა ნიშნავს, მისი ამონახსნთა სიმრავლის პოვნას.

ერთიდაიმავე ცვლადების შემცველ განტოლებათა სისტემებს ეწოდება ტოლფასი, თუ მათი ამონახსნთა სიმრავლეები ერთმანეთის ტოლია, როცა თითოეული ამონახსნი დალაგებულია ერთიდაიმავე მიმდევრობით.

სისტემის ამოხსნის პროცესში მიზანშეწონილია, შევცვალოთ იგი მისი ტოლფასი უფრო მარტივი სისტემით, რისთვისაც სარგებლობენ განტოლებათა სისტემის შემდეგი თვისებებით:

1. თუ სისტემის ერთ-ერთ განტოლებას შევცვლით მისი ტოლფასი განტოლებით, მივიღებთ მოცემული სისტემის ტოლფას სისტემას.

2. თუ სისტემის ერთ-ერთ განტოლებას მივცემთ $x=F$ სახეს (F საზოგადოდ ცვლადის შემცველი გამოსახულებაა), ხოლო დანარჩენ განტოლებებში x ცვლადს შევცვლით F გამოსახულებით, მივიღებთ მოცემული სისტემის ტოლფას სისტემას.

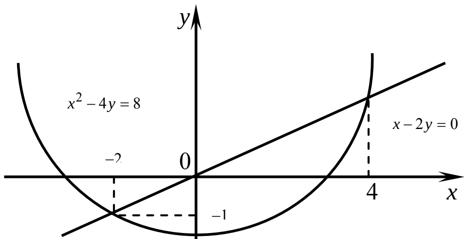
3. თუ სისტემის ნებისმიერ განტოლებას შევცვლით განტოლებით, რომელიც მიიღება მისი მიმატებით ნებისმიერ სხვა განტოლებასთან, მივიღებთ მოცემული სისტემის ტოლფას სისტემას.

ზოგჯერ მოსახერხებელია ორცვლადიან განტოლებათა სისტემის ამონახსნი მოვძებნოთ გრაფიკული ხერხით.

იმისათვის, რომ ამოვხსნათ ორცვლადიანი ორი განტოლების სისტემა გრაფიკული ხერხით, საჭიროა ავაგოთ თითოეული განტოლების გრაფიკი. ამ გრაფიკების გადაკვეთის ყოველი წერტილის კოორდინატთა წყვილი წარმოადგენს მოცემული სისტემის ამონახსნს, მაგალითად,

$$\begin{cases} x^2-4y=8 \\ x-2y=0 \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნთა სიმრავლეა $\{(-2;-1),\ (4;2)\}$, რადგან სისტემის განტოლებათა გრაფიკები (-2;-1) და (4;2) წერტილებში იკვეთება (ნახ.26).



ნახ. 26

§38. წრფივ განტოლებათა სისტემა

$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ სახის განტოლებას, სადაც $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ცვლადებია, ხოლო $a_1,a_2,\ldots,a_n,b$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, n ცვლადიანი წრფივი განტოლება ეწოდება. $a_1,a_2,\ldots,a_n$ რიცხვებს ცვლადების კოეფიციენტები ეწოდება, ხოლო b–ს თავისუფალი წევრი.

n ცვლადიან m წრფივ განტოლებათა სისტემას აქვს სახე

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

შემდგომში ვიგულისხმებთ, რომ წრფივ განტოლებათა სისტემაში ცვლადთა და განტოლებათა რაოდენობა ერთმანეთის ტოლია, ე. ი. $m=n$.

გავეცნოთ ორცვლადიან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ზოგიერთ ხერხს.

ვთქვათ, მოცემულია სისტემა:

$$\begin{cases} 3x-2y=4 \\ 2x+5y=9. \end{cases} \tag{1}$$

სისტემის პირველი განტოლებიდან გვაქვს

$$y=\frac{3x-4}{2}\,. \tag{2}$$

ჩავსვათ სისტემის მეორე განტოლებაში y-ის ეს გამოსახულება და ამოვხსნათ მიღებული განტოლება

$$2x+5\cdot\frac{3x-4}{2}=9 \Leftrightarrow 4x+15x-20=18 \Leftrightarrow 19x=38 \Leftrightarrow x=2,$$

x-ის ამ მნიშვნელობის (2) ტოლობაში შეტანით მივიღებთ

$$y=\frac{3\cdot 2-4}{2}=1.$$

ამრიგად (2;1) წყვილი წარმოადგენს (1) სისტემის ამონახსნს.

განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ამ ხერხს ჩასმის ხერხი ეწოდება.

(1) სისტემა შეიძლება შემდეგნაირადაც ამოვხსნათ: გავამრავლოთ სისტემის პირველი განტოლების ორივე მხარე 5-ზე, მეორისა კი 2-ზე, მივიღებთ

$$\begin{cases} 15x-10y=20 \\ 4x+10y=18. \end{cases}$$

ამ სისტემის განტოლებათა შეკრება მოგვცემს ერთცვლადიან განტოლებას

$$19x=38,$$

რომლის ამონახსნია $x=2$.

ანალოგიურად შეიძლება მოიძებნოს y ცვლადის მნიშვნელობაც.*

განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ასეთ ხერხს შეკრების ხერხი ეწოდება.

ვთქვათ, მოცემულია ორცვლადიან განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases} \qquad (3)$$

ამ სისტემის პირველი და მეორე განტოლებების ორივე მხარეები გავამრავლოთ შესაბამისად b_2-ზე და $-b_1$-ზე. მივიღებთ

$$\begin{cases} a_1b_2x+b_1b_2y=c_1b_2 \\ -a_2b_1x-b_1b_2y=-c_2b_1. \end{cases}$$

ამ სისტემის განტოლებათა შეკრებით გვექნება

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1. \qquad (4)$$

ანალოგიურად მივიღებთ

---

* პრაქტიკულად შეკრების ხერხით განსაზღვრული ერთ-ერთი ცვლადის მნიშვნელობა შეაქვთ სისტემის რომელიმე განტოლებაში და პოულობენ მეორე ცვლადს.

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1 . \qquad (5)$$

თუ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, (4) და (5) განტოლებიდან გვაქვს:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} . \qquad (6)$$

ვაჩვენოთ, რომ (6) ფორმულებით მოცემულ რიცხვთა $(x; y)$ წყვილი წარმოადგენს (3) სისტემის ამონახსნს. მართლაც, თუ x–ისა და y–ის მნიშვნელობებს შევიტანთ (3) სისტემის პირველი განტოლების მარცხენა მხარეში, მივიღებთ:

$$a_1 \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} + b_1 \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{a_1c_1b_2 - a_1c_2b_1 + b_1a_1c_2 - b_1a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} =$$

$$= \frac{c_1(a_1b_2 - a_2b_1)}{a_1b_2 - a_2b_1} = c_1 .$$

ე. ი. განხილული $(x; y)$ წყვილი აკმაყოფილებს (3) სისტემის პირველ განტოლებას. ანალოგიურად შემოწმდება, რომ იგივე წყვილი აკმაყოფილებს (3) სისტემის მეორე განტოლებასაც.

რადგან (4) და (5) განტოლებები (3) სისტემიდან მიღებულია ისეთი გარდაქმნებით, რომლის შედეგადაც არ შეიძლება დაიკარგოს რომელიმე ამონახსნი, შეგვიძლია დავასკვნათ:

1. თუ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, მაშინ (3) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც მოიცემა (6) ფორმულებით.

2. თუ $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, ხოლო $c_1b_2 - c_2b_1$ და $a_1c_2 - a_2c_1$ სხვაობებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ (3) სისტემა არათავსებადია, ვინაიდან (4) და (5) განტოლებებიდან ერთ-ერთს მაინც არა აქვს ამონახსნი.

3. თუ

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0, \quad c_1b_2 - c_2b_1 = 0, \quad a_1c_2 - a_2c_1 = 0$$

და ცვლადების კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, მაგალითად $a_1 \neq 0$, მაშინ პირველი და მესამე ტოლობებიდან გვაქვს:

$$b_2 = b_1 \cdot \frac{a_2}{a_1}, \quad c_2 = c_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} . \qquad (7)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\frac{a_2}{a_1} = k , \qquad (8)$$

მაშინ (7) და (8) ტოლობებიდან გვექნება:

$$a_2 = ka_1, \quad b_2 = kb_1, \quad c_2 = kc_1 ,$$

და (3) სისტემა მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ ka_1x + kb_1y = kc_1, \end{cases}$$

რომელიც

$$a_1x + b_1y = c_1$$

განტოლების ტოლფასია. ე. ი. ამ შემთხვევაში სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე უსასრულოა.

როგორც ვიცით, (4) სისტემის $(x_0; y_0)$ ამონახსნი წარმოადგენს მასში შემავალ განტოლებათა გრაფიკების, ე. ი. წრფეების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატთა წყვილს.

თუ სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი, მაშინ აღნიშნული წრფეები იკვეთებიან ერთ წერტილში; თუ სისტემა არათავსებადია, მაშინ წრფეები არ გადაიკვეთებიან, ხოლო, თუ სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი, მაშინ წრფეები ერთმანეთს ემთხვევიან.

შევნიშნოთ, რომ ჩასმისა და შეკრების ხერხები აგრეთვე გამოიყენება სამი და მეტცვლადიან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად.

§39. უტოლობები

განსაზღვრება. ორ გამოსახულებას, რომლებიც შეიძლება ცვლადებსაც შეიცავდნენ, შეერთებულს ნიშნით “>” ან “<” უტოლობა ეწოდება.

უტოლობებს ეწოდება ერთნაირი აზრის, თუ ყველა მათგანში გამოყენებულია უტოლობის ერთი და იგივე ნიშანი. ორ უტოლობას ეწოდება მოპირდაპირე აზრის, თუ ერთ-ერთ მათგანში გამოყენებულია ნიშანი “>”, მეორეში კი მისი მოპირდაპირე — ”<”. მაგალითად, 5>2 და 1>-3 ერთნაირი აზრის უტოლობებია, ხოლო 3<6 და 4>0 უტოლობები კი–მოპირდაპირე აზრის.

რიცხვითი უტოლობის თვისებები. როგორც ვიცით, ნებისმიერი ორი a და b ნამდვილი რიცხვისათვის მართებულია ერთი და მხოლოდ ერთი შემდეგი თანაფარდობებიდან:

$$a = b, \ a > b, \ a < b.$$

ეს თანაფარდობები მართებულია, თუ შესაბამისად

$$a - b = 0, \ a - b > 0, \ a - b < 0.$$

საწინააღმდეგოს დაშვებით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ მართებულია აგრეთვე შებრუნებული დებულებები:

თუ $a = b$, მაშინ $a - b = 0$;

$$\text{თუ } a > b\text{, მაშინ } a - b > 0\,;$$
$$\text{თუ } a < b\text{, მაშინ } a - b < 0\,.$$

უტოლობა $a > b$ გეომეტრიულად ნიშნავს, რომ a რიცხვის შესაბამისი წერტილი რიცხვით წრფეზე მდებარეობს b–ს შესაბამისი წერტილის მარჯვნივ.

დავამტკიცოთ რიცხვითი უტოლობის ზოგიერთი თვისება:

1. თუ $a > b$, მაშინ $b < a$.

მართლაც $a > b \Rightarrow a - b > 0 \Rightarrow b - a < 0 \Rightarrow b < a$.

2. თუ $a > b$ და $b > c$, მაშინ $a > c$.

პირობის თანახმად $a - b$ და $b - c$ რიცხვები დადებითია, ამიტომ დადებითი იქნება მათი ჯამიც, ე. ი.

$$(a - b) + (b - c) > 0 \Rightarrow a - c > 0 \Rightarrow a > c\,.$$

ამ თვისებას ტრანზიტულობის თვისება ეწოდება.

3. თუ $a > b$ და c ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, მაშინ $a + c > b + c$. რადგან $(a + c) - (b + c) = a - b$, ხოლო პირობის თანახმად $a - b$ დადებითია, ამიტომ $(a + c) - (b + c) > 0$, ე. ი. $a + c > b + c$.

შედეგი. თუ $a + b > c$, მაშინ $a > c - b$.

4. თუ $a > b$ და $c > d$, მაშინ $a + c > b + d$.

რადგან $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$, ხოლო პირობის თანახმად $a - b$ და $c - d$ დადებითი რიცხვებია, ამიტომ დადებითი იქნება მათი ჯამიც და $(a + c) - (b + d) > 0$, ე. ი. $a + c > b + d$.

ამრიგად, ერთნაირი აზრის ჭეშმარიტი უტოლობების შეკრებით მიიღება იმავე აზრის ჭეშმარიტი უტოლობა.

5. თუ $a > b$ და $c < d$, მაშინ $a - c > b - d$.

რადგან $(a - c) - (b - d) = (a - b) + (d - c)$, ხოლო პირობის თანახმად $a - b$ და $d - c$ დადებითებია, ამიტომ დადებითი იქნება მათი ჯამიც და $(a - c) - (b - d) > 0$, ე. ი. $a - c > b - d$.

ამრიგად, თუ ერთ ჭეშმარიტ უტოლობას გამოვაკლებთ მისი საწინააღმდეგო აზრის მეორე ჭეშმარიტ უტოლობას და შევინარჩუნებთ პირველი უტოლობის ნიშანს, მივიღებთ ჭეშმარიტ უტოლობას.

6. თუ $a > b$ და $c \neq 0$, მაშინ

$$ac > bc\text{, როცა } c > 0$$

და

$$ac < bc\text{, როცა } c < 0\,.$$

რადგან $ac-bc=c(a-b)$ და პირობის თანახმად $a-b>0$, ამიტომ $c(a-b)$ ნამრავლს აქვს c–ს ნიშანი, ე. ი. როცა $c>0$, მაშინ $ac-bc>0 \Rightarrow ac>bc$, ხოლო როცა $c<0$, მაშინ $ac-bc<0 \Rightarrow ac<bc$.

ამრიგად, თუ ჭეშმარიტი უტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ მოცემულ დადებით რიცხვზე და უტოლობის ნიშანს არ შევცვლით, მივიღებთ ჭეშმარიტ უტოლობას. ჭეშმარიტ უტოლობას მივიღებთ აგრეთვე, თუ ჭეშმარიტი უტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ მოცემულ უარყოფით რიცხვზე და უტოლობის ნიშანს შევცვლით მისი მოპირდაპირეთი.

7. თუ $a>b$ და a და b რიცხვებს ერთნაირი ნიშანი აქვთ, მაშინ

$$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}.$$

რადგან $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}$, ხოლო პირობის თანახმად $a-b$ და ab დადებითებია, ამიტომ დადებითი იქნება მათი ფარდობაც და

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}>0 \Rightarrow \frac{1}{b}>\frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}.$$

8. თუ $a>b$, $c>d$ და a, b, c, d დადებითი რიცხვებია, მაშინ $ac>bd$.

რადგან $a>b$ და $c>0$, ამიტომ $ac>bc$. რადგან $c>d$ და $b>0$, ამიტომ $bc>bd$. ტრანზიტულობის თვისების თანახმად, $ac>bc$ და $bc>bd$ უტოლობებიდან გამომდინარეობს $ac>bd$ უტოლობა.

ამრიგად, ერთიდაიმავე აზრის დადებითწევრებიან ჭეშმარიტ უტოლობათა გადამრავლებით მიიღება იმავე აზრის ჭეშმარიტი უტოლობა.

შედეგი. თუ a და b დადებითი რიცხვებია და $n \in N$, მაშინ $a>b$ უტოლობიდან გამომდინარეობს $a^n>b^n$.

9. თუ a და b დადებითი რიცხვებია და $n \in N$, $n \neq 1$ მაშინ $a>b$ უტოლობიდან გამომდინარეობს $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$, მაშინ მე-8 თვისების შედეგის თანახმად გვექნება:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \leq \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \Rightarrow a \leq b,$$

რაც პირობას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

ცვლადის შემცველი უტოლობა. იმის მიხედვით, თუ რამდენ ცვლადს შეიცავს უტოლობა, იგი შეიძლება იყოს ერთცვლადიანი, ორცვლადიანი და ა. შ.

ერთცვლადიანი უტოლობის ამონახსნი ეწოდება ცვლადის იმ მნიშვნელობას, რომელიც უტოლობას ჭეშმარიტ რიცხვით უტოლობად აქცევს. თუ უტოლობა შეიცავს ერთზე მეტ ცვლადს, მაშინ მისი ამონახსნი იქნება შესაბამისად, ცვლადების მნიშვნელობათა წყვილი, სამეული და ა. შ., რომელიც უტოლობას ჭეშმარიტ რიცხვით უტოლობად აქცევს.

უტოლობის ყველა ამონახსნთა ერთობლიობას უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე ეწოდება. უტოლობის ამოხსნა ნიშნავს მისი ამონახსნთა სიმრავლის პოვნას.

ერთიდაიმავე ცვლადების შემცველ უტოლობებს ეწოდება ტოლფასი, თუ მათი ამონახსნთა სიმრავლეები ერთმანეთის ტოლია, როცა თითოეული ამონახსნი დალაგებულია ერთი და იმავე მიმდევრობით.

უტოლობის ამოხსნის პროცესში მიზანშეწონილია შევცვალოთ იგი მისი ტოლფასი უფრო მარტივი უტოლობით, რისთვისაც სარგებლობენ უტოლობათა შემდეგი თვისებებით:

1. თუ უტოლობის ორივე მხარეს დავუმატებთ ერთსა და იმავე რიცხვს, მივიღებთ მოცემული უტოლობის ტოლფას უტოლობას.

2. თუ უტოლობის ერთი მხარიდან მეორეში გადავიტანთ რომელიმე შესაკრებს მოპირდაპირე ნიშნით, მივიღებთ მოცემული უტოლობის ტოლფას უტოლობას.

3. თუ უტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ ერთსა და იმავე დადებით რიცხვზე ან უტოლობაში შემავალი ცვლადების შემცველ ერთი და იმავე გამოსახულებაზე, რომელიც ყოველთვის დადებითია, მივიღებთ მოცემული უტოლობის ტოლფას უტოლობას.

4. თუ უტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ ერთსა და იმავე უარყოფით რიცხვზე ან უტოლობაში შემავალი ცვლადების შემცველ ერთსა და იმავე გამოსახულებაზე, რომელიც ყოველთვის უარყოფითია და უტოლობის ნიშანს შევცვლით მოპირდაპირეთი, მივიღებთ მოცემული უტოლობის ტოლფას უტოლობას.

ამ თვისებების გამოყენებით ნებისმიერ ერთცვლადიან უტოლობას შეიძლება მივცეთ

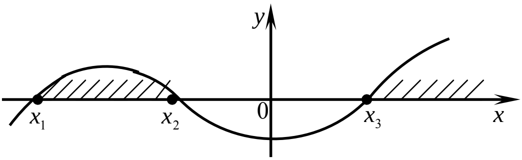
$$f(x) > 0 \tag{1}$$

ან

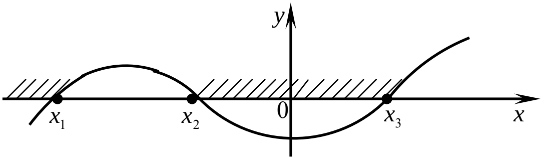
$$f(x) < 0 \tag{2}$$

სახე.

(1) უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე წარმოადგენს Ox ღერძის ყველა იმ წერტილების აბსცისთა სიმრავლეს, რომელთათვისაც $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის წერტილები Ox ღერძის ზემოთ მდებარეობენ (ნახ. 27), (2) უტოლობისათვის კი ამონახსნთა სიმრავლეს წარმოადგენს ყველა იმ წერტილების აბსცისთა სიმრავლე, რომელთათვისაც $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის წერტილები Ox ღერძის ქვემოთ მდებარეობენ (ნახ. 28).



ნახ. 27



ნახ. 28

შენიშვნა. უტოლობისა და განტოლების

$$\left[\begin{array}{l} f(x)>0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \quad \text{და} \quad \left[\begin{array}{l} f(x)<0 \\ f(x)=0 \end{array}\right.$$

გაერთიანებები შესაბამისად $f(x)\geq 0$ და $f(x)\leq 0$ სახით ჩაიწერება და მათ არამკაცრი უტოლობები ეწოდება. ცხადია, არამკაცრი უტოლობის ამონახსნია მკაცრი უტოლობის და შესაბამისი განტოლების ამონახსნთა გაერთიანება.

§40. წრფივი ერთცვლადიანი უტოლობა

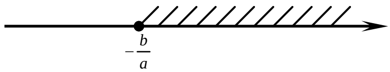
$ax+b>0$ და $ax+b<0$ სახის უტოლობებს, სადაც x ცვლადია, ხოლო a და b ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, წრფივი ერთცვლადიანი უტოლობები ეწოდება, თუ $a\neq 0$.

$ax+b>0$ უტოლობა შემდეგნაირად ამოიხსნება:

ა) როცა $a>0$, მაშინ

$$ax+b>0 \Leftrightarrow ax>-b \Leftrightarrow x>-\frac{b}{a},$$

ე. ი. უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა $\left]-\frac{b}{a};+\infty\right[$. გეომეტრიულად ეს სიმრავლე წარმოადგენს რიცხვითი წრფის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც $-\frac{b}{a}$ წერტილის მარჯვნივ მდებარეობენ (ნახ. 29).



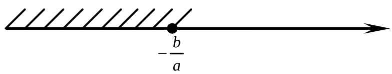
ნახ. 29

ბ) როცა $a<0$, მაშინ

$$ax+b>0 \Leftrightarrow ax>-b \Leftrightarrow x<-\frac{b}{a},$$

ე. ი. უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა $\left]-\infty;-\frac{b}{a}\right[$. გეომეტრიულად ეს სიმრავლე წარმოადგენს რიცხვითი წრფის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც $-\frac{b}{a}$ წერტილის მარცხნივ მდებარეობენ (ნახ. 30).

ანალოგიურად ამოიხსნება $ax+b<0$ წრფივი უტოლობა.



ნახ. 30

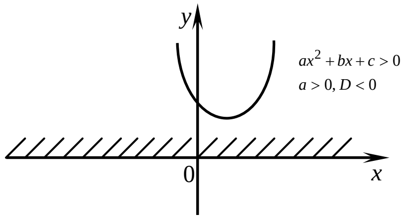
§41. კვადრატული უტოლობა

$ax^2+bx+c>0$ და $ax^2+bx+c<0$ სახის უტოლობებს, სადაც x ცვლადია, ხოლო a, b და c ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, $a \neq 0$, კვადრატული უტოლობები ეწოდება.

ამოვხსნათ ეს უტოლობები გრაფიკული ხერხით.

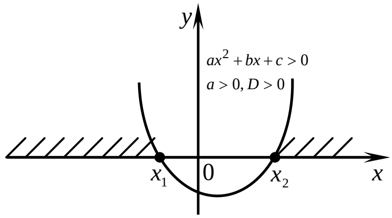
ვთქვათ, $a>0$, მაშინ $y=ax^2+bx+c$ პარაბოლის შტოები მიმართულია ზემოთ და დისკრიმინანტის ნიშნის მიხედვით გვექნება შემდეგი შემთხვევები:

1. თუ $D=b^2-4ac<0$, მაშინ პარაბოლა მთლიანად მოთავსებულია Ox ღერძის ზემოთ და ამიტომ $ax^2+bx+c>0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა R (ნახ. 31), ხოლო $ax^2+bx+c<0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე კი–ცარიელია.

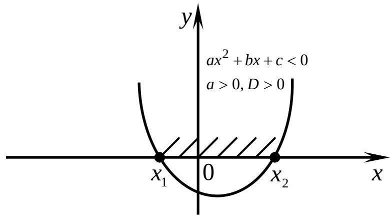


ნახ. 31

2. თუ $D=b^2-4ac>0$, მაშინ $y=ax^2+bx+c$ პარაბოლა Ox ღერძს ჰკვეთს ორ x_1 და x_2 წერტილში $(x_1<x_2)$, რომლებიც ax^2+bx+c კვადრატული სამწევრის ფესვებს წარმოადგენენ. ამიტომ $ax^2+bx+c>0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე შედგება Ox ღერძის ყველა იმ წერტილებისაგან, რომლებიც მდებარეობენ x_1–ის მარცხნივ ან x_2–ის მარჯვნივ ე. ი. “ფესვებს გარეთ” (ნახ. 32), ხოლო $ax^2+bx+c<0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე შედგება Ox ღერძის ყველა იმ წერტილებისაგან, რომლებიც მდებარეობენ x_1 და x_2 წერტილებს შორის (ე. ი. “ფესვებს შორის”) (ნახ. 33).



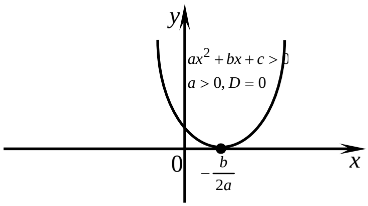
ნახ. 32



ნახ. 33

ამრიგად, თუ $a>0$ და $D>0$, მაშინ $ax^2+bx+c>0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა $]-\infty;x_1[\cup]x_2;+\infty[$, ხოლო $ax^2+bx+c<0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე კი $]x_1;x_2[$.

3. თუ $D=b^2-4ac=0$, მაშინ $y=ax^2+bx+c$ პარაბოლა Ox ღერძს ეხება $x=-\dfrac{b}{2a}$ წერტილში. ამიტომ $ax^2+bx+c>0$ უტოლობის ამონახსნს წარმოადგენს Ox ღერძის ნებისმიერი წერტილი გარდა $x=-\dfrac{b}{2a}$ წერტილისა (ნახ. 34), ე. ი. ამონახსნთა სიმრავლეა $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right[\cup\left]-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$, ხოლო $ax^2+bx+c<0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე კი ცარიელია.



ნახ. 34

იმ შემთხვევაში, როცა $a<0$, უტოლობის ორივე მხარის -1-ზე გამრავლებით და უტოლობის ნიშნის მოპირდაპირეთი შეცვლით კვადრატული უტოლობის ამოხსნა დაიყვანება განხილულ შემთხვევებზე.

§42. უტოლობათა სისტემები

განსაზღვრება. ერთი და იმავე ცვლადების შემცველ უტოლობათა სასრულ სიმრავლეს უტოლობათა სისტემა ეწოდება.

უტოლობათა სისტემის ამონახსნი ეწოდება ამ სისტემაში შემავალი ყველა უტოლობის საერთო ამონახსნს. სისტემის ყველა ამონახსნთა ერთობლიობას უტოლობათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე ეწოდება. უტოლობათა სისტემის ამოხსნა ნიშნავს მისი ამონახსნთა სიმრავლის პოვნას.

ერთი და იმავე ცვლადების შემცველ უტოლობათა სისტემებს ეწოდებათ ტოლფასი, თუ მათი ამონახსნთა სიმრავლეები

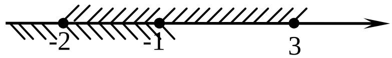
ერთმანეთის ტოლია, როცა თითოეული ამონახსნი დალაგებულია ერთი და იმავე მიმდევრობით.

იმისათვის, რომ ამოვხსნათ უტოლობათა სისტემა, საჭიროა ამოვხსნათ ამ სისტემაში შემავალი თითოეული უტოლობა და ვიპოვოთ მათი ამონახსნთა სიმრავლეების თანაკვეთა. მაგალითად,

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-5x}{2} < 3-2x \\ \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x-4}{3} > 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x < 6-4x \\ 3x-3-2x+8 > 12x-6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-6<0 \\ 11x<11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<x<3 \\ x<1. \end{cases}$$

ამრიგად, სისტემის ამონახსნთა სიმრავლეა $]-2;3[$ შუალედის და $]-\infty;1[$ შუალედის თანაკვეთა, ე. ი. $]-2;1[$ შუალედი (ნახ. 35).



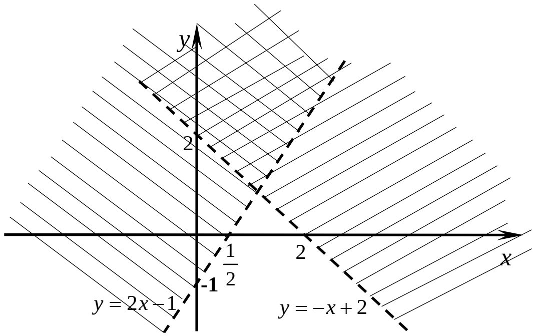
ნახ. 35

როგორც ცნობილია, ნამდვილ რიცხვთა ყოველ $(x;y)$ წყვილს საკოორდინატო სიბრტყეზე შეესაბამება ერთადერთი წერტილი. ეს საშუალებას გვაძლევს ორცვლადიანი უტოლობისა და ორცვლადიან უტოლობათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე გამოვსახოთ საკოორდინატო სიბრტყის წერტილთა სიმრავლით. განვიხილოთ მაგალითები:

1. $\begin{cases} 2x-y<1 \\ x+y>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y>2x-1 \\ y>-x+2. \end{cases}$

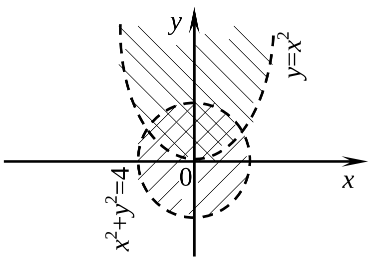
სისტემის პირველი უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე წარმოადგენს სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც მდებარეობენ $y=2x-1$ წრფის ზემოთ, ხოლო მეორე უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე კი–სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც მდებარეობენ $y=-x+2$ წრფის ზემოთ. ცხადია, სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე იქნება აღნიშნული სიმრავლეების თანაკვეთა (ნახ. 36).

2. $\begin{cases} x^2+y^2<4 \\ y>x^2 \end{cases}$



ნახ. 36

სისტემის პირველი უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე წარმოადგენს სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც მდებარეობენ $x^2+y^2=4$ წრეწირის შიგნით, ხოლო მეორე უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე კი–სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც მდებარეობენ $y=x^2$ პარაბოლის ზემოთ. ამრიგად, სისტემის ამონახსნთა სიმრავლეს აქვს სახე (ნახ.37).



ნახ. 37

§43. უტოლობათა ამოხსნა ინტერვალთა მეთოდით

ვთქვათ, მოცემულია ერთცვლადიანი უტოლობა $f(x)>0$ ან $f(x)<0$, სადაც $f(x)=(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_n)^{k_n}$, ამასთან $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in R$, $k_1,k_2,\ldots,k_n\in Z$ და $\alpha_i\neq\alpha_j$, როცა $i\neq j$ $(i,\,j=1,2,\ldots,n)$.

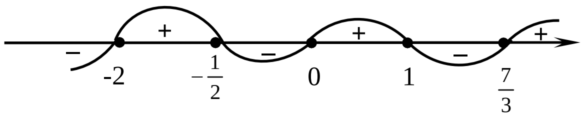
მაგალითებზე განვიხილოთ ასეთი სახის უტოლობების ამოხსნის ე. წ. ინტერვალთა მეთოდი ჯერ იმ შემთხვევისათვის,

როდესაც უტოლობაში შემავალი თითოეული მამრავლის ხარისხის მაჩვენებელი ტოლია 1-ის და -1-ის, შემდეგ კი იმ შემთხვევისათვის, როდესაც ხარისხის მაჩვენებლები ნებისმიერი მთელი რიცხვებია.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ უტოლობა

$$\frac{(x-1)(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x\left(x-\frac{7}{3}\right)}>0. \qquad (1)$$

ამოხსნა. დავალაგოთ რიცხვით წრფეზე უტოლობაში შემავალი წილადის მრიცხველისა და მნიშვნელის ფესვები: -2; $-\frac{1}{2}$; 0; 1 და $\frac{7}{3}$, რომლებიც რიცხვით წრფეს ყოფენ 6 შუალედად (ნახ. 38).



ნახ. 38

ცხადია, რომ უკიდურესი მარჯვენა $\left]\frac{7}{3};+\infty\right[$ შუალედის ნებისმიერი რიცხვისათვის (1) უტოლობის მარცხენა მხარეში მყოფი გამოსახულების მრიცხველისა და მნიშვნელის თითოეული თანამამრავლი დადებითია და ამიტომ დადებითი იქნება მოცემული გამოსახულებაც, რაც რიცხვითი წრფის შესაბამის შუალედზე “+” ნიშნით აღინიშნება. ამ შუალედის მომდევნო $\left]1;\frac{7}{3}\right[$ შუალედის ნებისმიერი რიცხვისათვის მნიშვნელში შემავალი $\left(x-\frac{7}{3}\right)$ თანამამრავლი უარყოფითია, ხოლო დანარჩენი თანამამრავლები დადებითი, ამიტომ უტოლობის მარცხენა მხარე იქნება უარყოფითი, რაც რიცხვითი წრფის შესაბამის შუალედზე “–” ნიშნით აღინიშნება. ანალოგიური მსჯელობით ყოველ შემდეგ შუალედს რიგრიგობით მიეკუთვნება ნიშანი “+” ან “–”, რომლებიც განსაზღვრავენ (1) უტოლობის მარცხენა მხარის ნიშანს შესაბამის შუალედში. ამიტომ (1) უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე ყველა იმ შუალედის გაერთიანებაა, რომლებსაც აქვთ ნიშანი “+”, ე. ი.

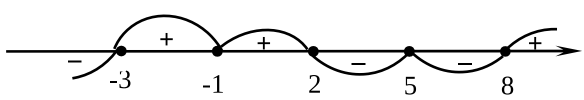
$$\left]-2;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]0;1\right[\cup\left]\frac{7}{3};+\infty\right[.$$

შენიშვნა. განხილულ $|k_i|=1$ $(i=1,2,\ldots,n)$ შემთხვევაში სასურველია ვისარგებლოთ შემდეგი წესით: უკიდურეს მარჯვენა შუალედს (რომელშიც $f(x)$ ყოველთვის დადებითია) დავუსვათ ნიშანი “+”, ხოლო ყოველ მომდევნო შუალედს კი წინა შუალედის მოპირდაპირე ნიშანი.

მაგალითი 2. ამოვხსნათ უტოლობა

$$\frac{(x-2)(x+3)^5(x+1)^6}{(x-5)^2(x-8)}<0. \qquad (2)$$

ამოხსნა. პირველი მაგალითის მსგავსად, აქაც, რიცხვით წრფეზე დავალაგოთ უტოლობაში შემავალი მამრავლების ფესვები: -3, -1, 2, 5, 8 და მიღებულ შუალედებს დავუსვათ “+” ან “–” ნიშნები მარჯვნიდან მარცხნივ დაწყებული “+” ნიშნით, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ ლუწ მაჩვენებლიანი მამრავლის ფესვზე გადასვლის დროს შევინარჩუნოთ წინა შუალედის ნიშანი (ნახ. 39).



ნახ. 39

ცხადია, რომ (2) უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე იქნება ყველა იმ შუალედის გაერთიანება, რომლებსაც აქვთ ნიშანი “–”, ე. ი.

$$\left]-\infty;-3\right[\cup\left]2;5\right[\cup\left]5;8\right[.$$

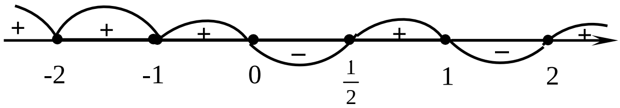
იმისათვის, რომ ერთცვლადიანი უტოლობები $\varphi(x)>0$ ან $\varphi(x)<0$ დავიყვანოთ ისეთ სახემდე, რომ შესაძლებელი იყოს ინტერვალთა მეთოდის გამოყენება, საჭიროა: უტოლობის მარცხენა მხარე დაიშალოს მამრავლებად; უტოლობათა თვისებების გათვალისწინებით ის მამრავლები, რომლებიც მთელ ღერძზე ინარჩუნებენ ერთი და იმავე ნიშანს უკუვაგდოთ, ხოლო დანარჩენი თანამამრავლები ჩავწეროთ ისე, რომ ცვლადის ყოველი კოეფიციენტი იყოს ერთის ტოლი; თანამამრავლები, რომლებიც ერთნაირფუძიან ხარისხებს წარმოადგენენ, ჩავწეროთ ერთი ხარისხის სახით.

მაგალითი 3.

$$\frac{\left(x^3-x\right)\left(x^3+1\right)\left(2x-1\right)}{\left(x+2\right)\left(-x^2+2x-8\right)\left(4-x^2\right)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\left(2x-1\right)}{\left(x+2\right)\left(-x^2+2x-8\right)\left(2-x\right)\left(2+x\right)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x+2\right)^2\left(x-2\right)}\le 0\ .$$



ნახ. 40

მე-40 ნახაზიდან ჩანს, რომ ამონახსნთა სიმრავლეა $\{-1\}\cup\left[0;\frac{1}{2}\right]\cup[1;2[$.

§44. მოდულის შემცველი უტოლობები

მოდულის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ $|f(x)|<r$ უტოლობა, სადაც $r>0$, უტოლობათა შემდეგი სისტემის ტოლფასია:

$$\begin{cases} f(x)<r \\ f(x)>-r, \end{cases}$$

რომელიც შეიძლება

$$-r<f(x)<r$$

ორმაგი უტოლობის სახით ჩაიწეროს. ამრიგად $|f(x)|<r$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე წარმოადგენს $f(x)<r$ და $f(x)>-r$ უტოლობების ამონახსნთა სიმრავლეების თანაკვეთას.

ანალოგიურად, $|f(x)|>r$ უტოლობა, სადაც $r>0$, შემდეგ უტოლობათა გაერთიანების ტოლფასია

$$\left[\begin{array}{l} f(x)>r \\ f(x)<-r. \end{array}\right.$$

ამრიგად, $|f(x)|>r$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე წარმოადგენს $f(x)>r$ და $f(x)<-r$ უტოლობების ამონახსნთა სიმრავლეების გაერთიანებას.

კერძოდ

$$|x-a|<r \Leftrightarrow -r<x-a<r \Leftrightarrow a-r<x<a+r\,,$$

ე. ი. $|x-a|<r$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა $]a-r;a+r[$.

ანალოგიურად

$$|x-a|>r \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-a>r \\ x-a<-r \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>a+r \\ x<a-r, \end{array}\right.$$

ე. ი. $|x-a|>r$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა

$$]-\infty;a-r[\cup]a+r;+\infty[\,.$$

განვიხილოთ მაგალითები:

1. ამოვხსნათ უტოლობა $|x^2-5x+3|\le 3$.

ამოხსნა.

$$|x^2-5x+3|\le 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+3\le 3 \\ x^2-5x+3\ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x\le 0 \\ x^2-5x+6\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 5 \\ x\le 2, x\ge 3. \end{cases}$$

ამრიგად, მივიღეთ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე

$$[0;2]\cup[3;5]\,.$$

2. ამოვხსნათ უტოლობა: $\left|\dfrac{x+3}{x-5}\right|\ge 2$.

ამოხსნა.

$$\left|\frac{x+3}{x-5}\right|\ge 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+3}{x-5}\ge 2 \\ \dfrac{x+3}{x-5}\le -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+3-2x+10}{x-5}\ge 0 \\ \dfrac{x+3+2x-10}{x-5}\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x-13}{x-5}\le 0 \\ \dfrac{3x-7}{x-5}\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5<x\le 13 \\ \dfrac{7}{3}\le x<5. \end{array}\right.$$

ამრიგად, მოცემული უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა

$$\left[\frac{7}{3};5\right[\cup\,]5;13].$$

3. დავამტკიცოთ, რომ თუ $a \geq 0$, $b \geq 0$, მაშინ

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} .$$

განვიხილოთ ჭეშმარიტი უტოლობა $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$, საიდანაც გვექნება

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow a-2\sqrt{ab}+b \geq 0 \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} .$$

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ თუ $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, ..., $a_n \geq 0$, მაშინ

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \ ^*$$

$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ რიცხვს ეწოდება $a_1, a_2, \ldots, a_n$ რიცხვების საშუალო არითმეტიკული, ხოლო რიცხვს $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ ამავე რიცხვების საშუალო გეომეტრიული.

ამრიგად, რამდენიმე არაუარყოფითი რიცხვის საშუალო არითმეტიკული მეტია ან ტოლი ამავე რიცხვების საშუალო გეომეტრიულზე.

§45. რიცხვითი მიმდევრობა

თუ რაიმე წესით ყოველ ნატურალურ n რიცხვს შეესაბამება x_n ნამდვილი რიცხვი, მაშინ ვიტყვით, რომ მოცემულია რიცხვითი მიმდევრობა

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots .$$

x_1-ს ეწოდება მიმდევრობის პირველი წევრი, x_2-ს– მიმდევრობის მეორე წევრი და ა. შ. x_n–ს მიმდევრობის n–ური ან ზოგადი წევრი ეწოდება. მიმდევრობას, რომლის ზოგადი წევრია x_n, მოკლედ $\{x_n\}$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ.*

შევნიშნოთ, რომ იმ შემთხვევაშიც კი, როდესაც $x_n = x_m$, $n \neq m$ ეს რიცხვები ითვლებიან მიმდევრობის განსხვავებულ წევრებად.

---

* ტოლობა მართებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

* ზოგჯერ გამოვიყენებთ გამოთქმას “ x_n მიმდევრობა”.

მიმდევრობის მოცემის ბუნებრივი წესია ანალიზური წესი, რომელიც გვიჩვენებს თუ რა მოქმედებები უნდა ჩავატაროთ $n-$ზე, რომ მივიღოთ მიმდევრობის x_n წევრი.

მიმდევრობა აგრეთვე შეიძლება მოცემული იყოს რეკურენტული დამოკიდებულებით. ეს წესი იმაში მდგომარეობს, რომ მიმდევრობის ყოველი წევრი, რამოდენიმე საწყისი წევრის გარდა, რომლებიც თავიდანვეა მოცემული, მიიღება მის წინ მდგომ წევრებზე გარკვეული მოქმედებების ჩატარებით. განვიხილოთ მიმდევრობის რამოდენიმე მაგალითი.

1. მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია $x_n = \dfrac{1}{n}$, არის შემდეგი მიმდევრობა

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots .$$

2. მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია $x_n = \dfrac{n}{n+1}$, არის შემდეგი მიმდევრობა

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots .$$

3. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ ტოლობა განსაზღვრავს შემდეგ მიმდევრობას:

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n}, \ldots .$$

4. დავწეროთ მიმდევრობა, თუ მისი ზოგადი წევრია $x_n = \dfrac{n}{n+1}$. ცხადია, რომ $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{2}{3}$, $x_3 = \dfrac{3}{4}, \ldots$

5. თუ მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით $x_n = aq^{n-1}$ $(a \neq 0, q \neq 0)$, მაშინ

$$x_1 = a,\ x_2 = aq,\ x_3 = aq^2, \ldots .$$

6. თუ $x_n = (-1)^n$, მაშინ გვექნება მიმდევრობა

$$-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots .$$

7. ვთქვათ $a_1 = 3$ და $a_{n+1} = a_n + 2$; ცხადია, რომ

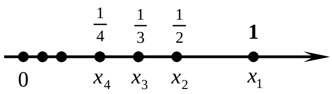
$$a_2 = 5,\ a_3 = 7,\ a_4 = 9, \ldots .$$

ეს მიმდევრობა მოცემულია რეკურენტული წესით.

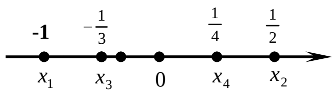
თუ $x_n = a$, ნებისმიერი $n \in N$, მაშინ მიმდევრობას ეწოდება მუდმივი მიმდევრობა.

გეომეტრიულად მიმდევრობა რიცხვით წრფეზე გამოისახება წერტილთა მიმდევრობის სახით, რომელთა კოორდინატები

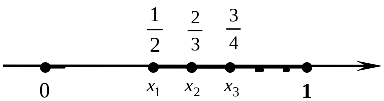
ტოლია მიმდევრობის შესაბამისი ელემენტების. 41-ე, 42-ე და 43-ე ნახაზებზე გამოსახულია შესაბამისად $x_n = \dfrac{1}{n}$, $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ და $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ მიმდევრობები.



ნახ. 41



ნახ. 42



ნახ. 43

განსაზღვრება. რიცხვთა x_n მიმდევრობას ეწოდება ზემოდან შემოსაზღვრული, თუ არსებობს ისეთი M რიცხვი, რომელიც მიმდევრობის ყველა წევრზე მეტია, ხოლო ქვემოდან შემოსაზღვრული–თუ მოიძებნება ისეთი L რიცხვი, რომელიც ნაკლებია მოცემული მიმდევრობის ყოველ წევრზე.

თუ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია როგორც ზემოდან, ისე ქვემოდან, მას შემოსაზღვრული მიმდევრობა ეწოდება.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ზემოთ მოყვანილ მაგალითებში 1, 2, 3, 6 მიმდევრობები შემოსაზღვრულია. მე-7 მიმდევრობა შემოსაზღვრულია ქვემოდან. მე-5 მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, თუ $|q| \le 1$. მე-5 მიმდევრობა ქვემოდან (ზემოდან) შემოსაზღვრულია, თუ $a > 0$ $(a < 0)$ და $q > 1$. თუ $q < -1$, მაშინ მიმდევრობა არ არის შემოსაზღვრული.

განსაზღვრება. x_n მიმდევრობას ეწოდება არაკლებადი, თუ $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le \cdots$ და არაზრდადი, თუ $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge \cdots$.

განსაზღვრება. x_n მიმდევრობას ეწოდება ზრდადი, თუ $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$ და კლებადი, თუ $x_1 > x_2 > \cdots > x_n > \cdots$.

ცხადია ზრდადი (კლებადი) მიმდევრობა არაკლებადია (არაზრდადია).

თუ მიმდევრობა არაზრდადია ან არაკლებადი მას მონოტონური ეწოდება.

ცხადია, რომ ზემოთ მოყვანილ მაგალითებში 1, 2, 4, 5 $(q>0)$ და 7 მონოტონური მიმდევრობებია, ხოლო 3, 5 $(q<0)$ და 6 მიმდევრობები არ არიან მონოტონური.

§46. არითმეტიკული პროგრესია

განსაზღვრება. რიცხვით მიმდევრობას, რომლის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორედან, მიიღება წინა წევრისათვის ერთი და იმავე რიცხვის მიმატებით, არითმეტიკული პროგრესია ეწოდება.

როგორც განსაზღვრებიდან ჩანს, არითმეტიკული პროგრესიის ნებისმიერი წევრისა და მისი წინა წევრის სხვაობა ერთი და იმავე რიცხვის ტოლია. ე. ი. თუ

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

არითმეტიკული პროგრესიაა, მაშინ

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_n - a_{n-1} = \cdots .$$

ამ რიცხვს არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა ეწოდება და d ასოთი აღინიშნება.

ცხადია, რომ თუ $d>0$, მაშინ არითმეტიკული პროგრესია ზრდადია, თუ $d<0-$კლებადი, ხოლო, თუ $d=0$, მაშინ პროგრესია მუდმივ მიმდევრობას წარმოადგენს.

თუ a_n არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა არის d, მაშინ

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d\ , \\ a_3 &= a_2 + d\ , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + d\ , \\ a_n &= a_{n-1} + d\ . \end{aligned}$$

მიღებული $(n-1)$ ტოლობის შეკრებით გვექნება

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + (n-1)d\ ,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$a_n = a_1 + (n-1)d\ .$$

ამ ფორმულას არითმეტიკული პროგრესიის $n-$ური ანუ ზოგადი წევრის ფორმულა ეწოდება.

არითმეტიკული პროგრესიის ნებისმიერი წევრი, დაწყებული მეორედან, მისი წინა და მომდევნო წევრების საშუალო არითმეტიკულის ტოლია.

მართლაც, ვთქვათ, a_{n-1}, a_n და a_{n+1} არის არითმეტიკული პროგრესიის ნებისმიერად აღებული სამი მომდევნო წევრი, მაშინ არითმეტიკული პროგრესიის განსაზღვრების თანახმად

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$

ე. ი.

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

მართებულია შებრუნებული დებულებაც: თუ რიცხვითი მიმდევრობის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორედან, მისი წინა და მომდევნო წევრების საშუალო არითმეტიკულის ტოლია, მაშინ ეს მიმდევრობა არითმეტიკულ პროგრესიას წარმოადგენს.

მართლაც, თუ a_n მიმდევრობის ნებისმიერი სამი მომდევნო a_{n-1}, a_n და a_{n+1} წევრებისათვის ჭეშმარიტია

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

ტოლობა, მაშინ

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n.$$

ამრიგად a_n მიმდევრობის ნებისმიერი წევრისა და მისი წინა წევრის სხვაობა ერთი და იგივე რიცხვია, რაც იმას ნიშნავს, რომ a_n არითმეტიკული პროგრესიაა.

თუ განვიხილავთ არითმეტიკული პროგრესიის $a_1, a_2, \ldots, a_n$ პირველ n წევრს, მაშინ ბოლოებიდან თანაბრად დაშორებულ წევრთა ჯამი მუდმივი სიდიდეა და უდრის პირველი და ბოლო წევრების ჯამს.

მართლაც, a_k და a_{n-k+1} $(1 \le k \le n)$ წარმოადგენენ ბოლოებიდან თანაბრად დაშორებულ წევრებს და

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k)d = a_1 + a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n.$$

ამ თვისების გამოყენებით გამოვიყვანოთ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულა.

აღვნიშნოთ a_n არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი S_n–ით და დავწეროთ ეს ჯამი ორჯერ, ამასთან მეორეში შესაკრებთა მიმდევრობა შევცვალოთ:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1.$$

ამ ტოლობების შეკრებით გვექნება

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-2} + a_3) +$$
$$+ (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

მიღებული ტოლობის მარჯვენა მხარეში რიცხვთა თითოეული წყვილის ჯამი $(a_1 + a_n)$–ის ტოლია და ასეთ წყვილთა რაოდენობა უდრის n–ს, ამიტომ

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

საიდანაც

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n .$$

არითმეტიკული პროგრესიის n–ური წევრის ფორმულის გათვალისწინებით, პირველი n წევრის ჯამის ფორმულა მიიღებს სახეს

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n .$$

§47. გეომეტრიული პროგრესია

განსაზღვრება. რიცხვით მიმდევრობას, რომლის პირველი წევრი განსხვავებულია ნულისაგან, ხოლო ყოველი წევრი, დაწყებული მეორედან, მიიღება წინა წევრის ერთსა და იმავე ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვზე გამრავლებით, გეომეტრიული პროგრესია ეწოდება.

როგორც განსაზღვრებიდან ჩანს, გეომეტრიული პროგრესიის ნებისმიერი წევრის შეფარდება მის წინა წევრთან ერთი და იმავე რიცხვის ტოლია, ე. ი. თუ

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

გეომეტრიული პროგრესიაა, მაშინ

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \cdots = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \cdots .$$

ამ რიცხვს გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი ეწოდება და q ასოთი აღინიშნება.

თუ $q > 0$, მაშინ გეომეტრიული პროგრესია მონოტონურია, ხოლო თუ $q < 0$–პროგრესია არც ზრდადია და არც კლებადი.

თუ b_n გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელია q, მაშინ

$$b_2 = b_1 q ,$$
$$b_3 = b_2 q ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_{n-1} = b_{n-2} q ,$$
$$b_n = b_{n-1} q .$$

მიღებული $(n-1)$ ტოლობის გადამრავლებით გვექნება

$$b_2 \cdot b_3 \dots b_{n-1} \cdot b_n = b_1 \cdot b_2 \dots b_{n-2} \cdot b_{n-1} \cdot q^{n-1},$$

საიდანაც მივიღებთ

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

ამ ფორმულას გეომეტრიული პროგრესიის n–ური ანუ ზოგადი წევრის ფორმულა ეწოდება.

დადებითწევრებიანი გეომეტრიული პროგრესიის ნებისმიერი წევრი დაწყებული მეორედან, მისი წინა და მომდევნო წევრების საშუალო გეომეტრიულის ტოლია.

მართლაც, ვთქვათ b_{n-1}, b_n და b_{n+1} არის დადებითწევრებიანი გეომეტრიული პროგრესიის ნებისმიერად აღებული სამი მომდევნო წევრი, მაშინ განსაზღვრების თანახმად:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

ე. ი.

$$b_n^{\ 2} = b_{n-1} b_{n+1} \Leftrightarrow b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}.$$

მართებულია შებრუნებული დებულებაც: თუ დადებითწევრებიანი რიცხვითი მიმდევრობის ყოველი წევრი დაწყებული მეორედან, მისი წინა და მომდევნო წევრების საშუალო გეომეტრიულის ტოლია, მაშინ ეს მიმდევრობა გეომეტრიულ პროგრესიას წარმოადგენს.

მართლაც, თუ დადებითწევრებიანი b_n მიმდევრობის ნებისმიერი სამი მომდევნო b_{n-1}, b_n და b_{n+1} წევრებისათვის ჭეშმარიტია

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}$$

ტოლობა, მაშინ

$$b_n^{\ 2} = b_{n-1} b_{n+1} \Leftrightarrow \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

ამრიგად b_n მიმდევრობის ნებისმიერი წევრის შეფარდება მის წინა წევრთან, ერთი და იგივე რიცხვია, რაც იმას ნიშნავს, რომ b_n გეომეტრიული პროგრესიაა.

§48. გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულა

აღვნიშნოთ b_n გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი S_n–ით, ე. ი.

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n. \tag{1}$$

ცხადია, თუ $q=1$, მაშინ $b_1=b_2=\cdots=b_n$ და $S_n=b_1\cdot n$. თუ $q\neq 1$, მაშინ (1) ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ q–ზე. გვექნება

$$S_n\cdot q=b_1q+b_2q+\cdots+b_{n-1}q+b_nq ,$$

ანუ

$$S_nq=b_2+b_3+\cdots+b_n+b_nq . \qquad (2)$$

თუ (2) ტოლობას გამოვაკლებთ (1)-ს, მივიღებთ

$$S_nq-S_n=b_nq-b_1 ,$$

აქედან

$$S_n=\frac{b_nq-b_1}{q-1} . \qquad (3)$$

გეომეტრიული პროგრესიის n–ური წევრის ფორმულის გათვალისწინებით, პირველი n–წევრის ჯამის ფორმულა მიიღებს სახეს

$$S_n=\frac{b_1\left(q^n-1\right)}{q-1} . \qquad (4)$$

როცა $q<1$, გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის გამოსათვლელად მიზანშეწონილია (3) და (4) ფორმულები ასე გადავწეროთ

$$S_n=\frac{b_1-b_nq}{1-q},\quad S_n=\frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q} .$$

§49. გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი, როცა $|q|<1$

ვთქვათ q არის b_n გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი და $|q|<1$ ($q\neq0$), ასეთ შემთხვევაში გეომეტრიულ პროგრესიას უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესია ეწოდება. როგორც ვნახეთ ამ პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი S_n გამოითვლება ფორმულით

$$S_n=\frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q} .$$

აქედან

$$S_n=\frac{b_1}{1-q}-\frac{b_1}{1-q}q^n . \qquad (1)$$

ამ გამოსახულების პირველი შესაკრები მუდმივია, მეორე შესაკრები შეიცავს მამრავლად q^n-ს. q^n, როცა $|q|<1$ ხარისხის n მაჩვენებლის ზრდასთან ერთად მიისწრაფვის ნულისაკენ. ამი-

ტომ, თუ უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამს აღვნიშნავთ S-ით, (1) ტოლობიდან მიიღება

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

§50. კუთხური სიდიდეების რადიანული ზომა

კუთხეების გაზომვის დროს გამოიყენება ზომის სხვადასხვა ერთეული: $1^\circ, 1', 1''$ და ა. შ. შემოვიღოთ კუთხის ზომის კიდევ ერთი ერთეული.

განსაზღვრება. იმ ცენტრალური კუთხის სიდიდეს, რომლის შესაბამისი რკალის სიგრძე რადიუსის ტოლია, რადიანი ეწოდება.

რადგან ნახევარწრეწირის სიგრძე πr –ის ტოლია, ხოლო მისი შესაბამისი ცენტრალური კუთხის სიდიდე 180°-ია, ამიტომ რადიანი π–ჯერ ნაკლებია 180°-ზე, ე. ი.

$$1 \text{ რად} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$$

და პირიქით

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ რად} \approx 0{,}017 \text{ რად.}$$

შემდგომში აღნიშვნას “რადიანი” გამოვტოვებთ და დავწერთ

$$360^\circ = 2\pi, \ 90^\circ = \frac{\pi}{2}, \ 60^\circ = \frac{\pi}{3}, \ 45^\circ = \frac{\pi}{4}, \ 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ და ა. შ.}$$

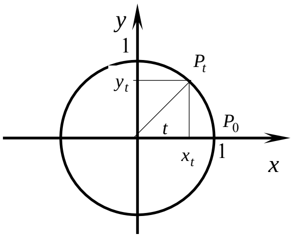
§51. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

როგორც ცნობილია, სიბრტყის ისეთ გადაადგილებას, როცა ნებისმიერ OA სხივსა და მის შესაბამის OA_1 სხივს შორის კუთხის სიდიდე α არის მუდმივი, ეწოდება მობრუნება O წერტილის გარშემო α კუთხით და R_0^α სიმბოლოთი აღინიშნება. თუ მობრუნება ხდება საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, მაშინ მიღებულია, რომ $\alpha > 0$, ხოლო თუ–საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, მაშინ $\alpha < 0$; $\alpha = 0$ შეესაბამება სიბრტყის იგივურ ასახვას. აქედან გამომდინარე, $-\pi \le \alpha \le \pi$, მაგრამ, თუ მობრუნებას განვიხილავთ, როგორც ბრუნვის შედეგს, მაშინ მობრუნების კუთხე შეიძლება იყოს ნებისმიერი; ამასთან ცხადია, რომ

$$R_0^{\alpha+2\pi k} = R_0^\alpha, \ k \in Z .$$

განვიხილოთ წრეწირი, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია, ხოლო რადიუსი 1-ის ტოლია. ასეთ წრეწირს ერთეულოვანი წრეწირი ეწოდება.

ვთქვათ P_0 არის წერტილი კოორდინატებით (1;0). P_t –თი აღვნიშნოთ წერტილი, რომელშიც აისახება P_0 კოორდინატთა სათავის გარშემო t რადიანით მობრუნებისას (ნახ. 44). P_t წერტილის y_t ორდინატს t რიცხვის (t რადიანი კუთხის) სინუსი ეწოდება და $\sin t$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ხოლო x_t აბსცისას t რიცხვის (t რადიანი კუთხის) კოსინუსი ეწოდება და $\cos t$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე. ი.



ნახ. 44

$$y_t = \sin t\,,\ \ x_t = \cos t\,.$$

$\sin t$ და $\cos t$ წარმოადგენენ t არგუმენტის ფუნქციებს, რომლებიც განსაზღვრულია ნებისმიერი t–სათვის, რადგან ნებისმიერი t რადიანით მობრუნებას შეესაბამება ერთადერთი სავსებით განსაზღვრული P_t წერტილი.

$\sin t$ და $\cos t$ ფუნქციების მნიშვნელობათა სიმრავლეა [-1;1], რადგან ერთეულოვანი წრეწირის წერტილების თითოეული კოორდინატი ღებულობს მხოლოდ [-1;1] სეგმენტის ყველა მნიშვნელობას.

t რიცხვის (რადიანის) სინუსის შეფარდებას კოსინუსთან t რიცხვის (რადიანის) ტანგენსი ეწოდება და tgt სიმბოლოთი აღინიშნება. ე. ი.

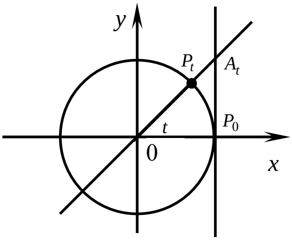
$$tgt = \frac{\sin t}{\cos t}\,.$$

ცხადია, რომ tgt ფუნქცია განსაზღვრულია, როცა $\cos t \neq 0$, მაგრამ $\cos t = 0$ მხოლოდ მაშინ, როდესაც P_t წერტილი Oy ღერძზე მდებარეობს, ე. ი. როცა $t = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

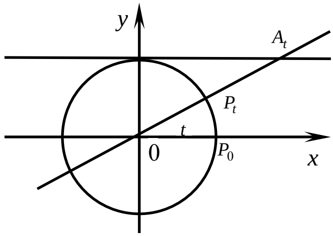
ამრიგად, tgt ფუნქცია განსაზღვრულია ყველგან, გარდა $t = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$ რიცხვებისა.

განვიხილოთ $x = 1$ წრფე, რომელსაც ტანგენსების ღერძი ეწოდება. ნებისმიერ $t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$ რიცხვს შეიძლება

შევუსაბამოთ ტანგენსების ღერძის ერთადერთი A_t წერტილი, რომელიც წარმოადგენს OP_t წრფის ტანგენსების ღერძთან გადაკვეთის წერტილს (ნახ. 45). t რიცხვის ტანგენსი უდრის ტანგენსების ღერძზე მისი შესაბამისი A_t წერტილის ორდინატს.



ნახ. 45



ნახ. 46

$\sin t$ და $\cos t$ ფუნქციებისაგან განსხვავებით, tgt ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა R, რადგან ტანგენსების ღერძის ნებისმიერი A_t წერტილის ორდინატი წარმოადგენს P_0OA_t კუთხის ტანგენსს (ნახ. 45).

t რიცხვის (რადიანის) კოსინუსის შეფარდებას სინუსთან t რიცხვის (რადიანის) კოტანგენსი ეწოდება და $ctgt$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე. ი.

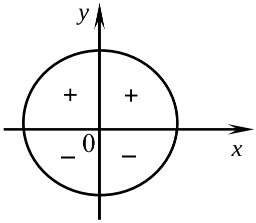
$$ctgt = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

ცხადია, რომ $ctgt$ ფუნქცია განსაზღვრულია, როცა $\sin t \neq 0$, მაგრამ $\sin t = 0$ მხოლოდ მაშინ, როდესაც P_t წერტილი Ox ღერძზე მდებარეობს, ე. ი. როცა $t = \pi k$, $k \in Z$.

ამრიგად, $ctgt$ ფუნქცია განსაზღვრულია ყველგან, გარდა $t = \pi k$, $k \in Z$, რიცხვებისა.

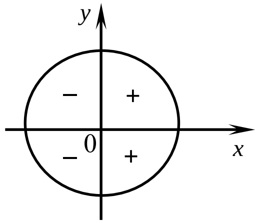
განვიხილოთ $y = 1$ წრფე, რომელსაც კოტანგენსების ღერძი ეწოდება. ნებისმიერ $t \neq \pi k$, $k \in Z$, რიცხვს შეიძლება შევუსაბამოთ კოტანგენსების ღერძის ერთადერთი A_t წერტილი, რომელიც წარმოადგენს OP_t წრფის კოტანგენსების ღერძთან გადაკვეთის წერტილს (ნახ. 46). t რიცხვის კოტანგენსი უდრის კოტანგენსების ღერძზე მისი შესაბამისი A_t წერტილის აბსცისას.

$ctgt$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა R, რადგან კოტანგენსების ღერძის ნებისმიერი A_t წერტილის აბსცისა წარმოადგენს P_0OA_t კუთხის კოტანგენსს (ნახ. 46).



სინუსის ნიშნები

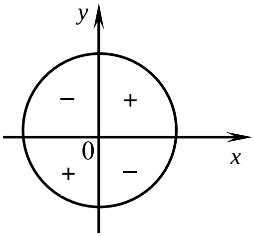
ნახ. 47



კოსინუსის ნიშნები

ნახ. 48

$\sin t$, $\cos t$, tgt და $ctgt$ ფუნქციებს ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ეწოდება.



ტანგენსის და კოტანგენსის ნიშნები

ნახ. 49

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა განსაზღვრების საფუძველზე შეიძლება დავადგინოთ მათი ნიშნები იმ მეოთხედებში, რომლებადაც იყოფა სიბრტყე საკოორდინატო ღერძებით.

$\sin t$ ფუნქცია I და II მეოთხედში დადებითია, ხოლო III და IV მეოთხედში–უარყოფითი, რადგან I და II მეოთხედში მოთავსებული ნებისმიერი წერტილის ორდინატი დადებითია, ხოლო III და IV მეოთხედში მოთავსებული ნებისმიერი წერტილის ორდინატი–უარყოფითი (ნახ. 47).

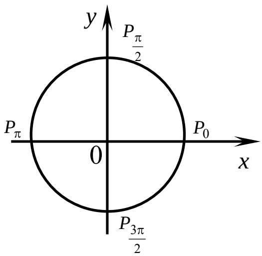
ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $\cos t$ ფუნქცია I და IV მეოთხედში დადებითია, ხოლო II და III მეოთხედში – უარყოფითი (ნახ. 48).

რადგან $\sin t$ და $\cos t$ ფუნქციებს I და III მეოთხედში ერთნაირი ნიშანი აქვთ, ხოლო II და IV მეოთხედში – მოპირდაპირე, ამიტომ tgt და $ctgt$ ფუნქციები I და III მეოთხედში დადებითია, ხოლო II და IV მეოთხედში – უარყოფითი (ნახ. 49).

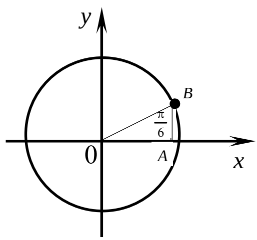
§52. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობათა გამოთვლა არგუმენტის ზოგიერთი მნიშვნელობისათვის

გამოვთვალოთ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა მნიშვნელობები, $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$ და $\frac{3}{2}\pi$ არგუმენტებისათვის.

განვიხილოთ ერთეულოვანი წრეწირის $P_0(1;0)$, $P_{\frac{\pi}{2}}(0;1)$, $P_\pi(-1;0)$ და $P_{\frac{3\pi}{2}}(0;-1)$ წერტილები (ნახ. 50). ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა განსაზღვრებიდან გამომდინარე გვაქვს: $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $tg0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$, $ctg0$ არ არსებობს; $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $tg\frac{\pi}{2}$ არ არსებობს, $ctg\frac{\pi}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0$; $\sin\pi = 0$,



ნახ. 50



ნახ. 51

$\cos\pi = -1$, $tg\pi = 0$, $ctg\pi$ არ არსებობს; $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$, $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, $tg\frac{3\pi}{2}$ არ არსებობს, $ctg\frac{3\pi}{2} = 0$.

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა განსაზღვრებიდან გვაქვს:

$$\sin\frac{\pi}{6} = AB = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}$$

მართკუთხა სამკუთხედში 30°-იანი კუთხის მოპირდაპირე კათეტის თვისების თანახმად (ნახ. 51);

$$\cos\frac{\pi}{6} = AO = \sqrt{OB^2 - AB^2} =$$

$$=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(პითაგორას თეორემის თანახმად);

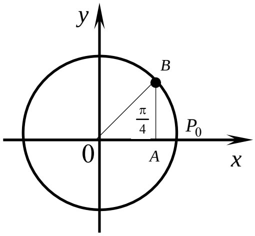
$$tg\frac{\pi}{6}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3};\ \ ctg\frac{\pi}{6}=\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}.$$

$\sin\frac{\pi}{4}=AB=OA=\cos\frac{\pi}{4}$, რადგან OAB სამკუთხედი ტოლფერდაა (ნახ. 52). პითაგორას თეორემის თანახმად

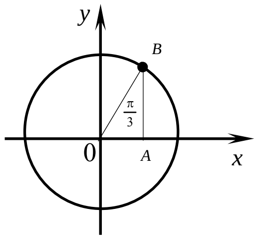
$$2AO^2=OB^2=1\Rightarrow OA=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ე. ი.

$$\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$



ნახ. 52



ნახ. 53

$$tg\frac{\pi}{4}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}=1;\ \ ctg\frac{\pi}{4}=\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}=1.$$

$$\cos\frac{\pi}{3}=AO=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2}$$

(მართკუთხა სამკუთხედში 30°-იანი კუთხის მოპირდაპირე კათეტის თვისების თანახმად (ნახ. 53));

$$\sin\frac{\pi}{3}=AB=\sqrt{OB^2-OA^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(პითაგორას თეორემის თანახმად);

$$tg\frac{\pi}{3}=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\ ;\ \ ctg\frac{\pi}{3}=\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ .$$

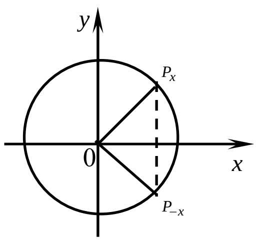
ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა გამოთვლილი მნიშვნელო-ბების საფუძველზე შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი:

α	$0=0^\circ$	$\frac{\pi}{6}=30^\circ$	$\frac{\pi}{4}=45^\circ$	$\frac{\pi}{3}=60^\circ$	$\frac{\pi}{2}=90^\circ$	$\pi=180^\circ$	$\frac{3\pi}{2}=270^\circ$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–
$ctg\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0

§53. $y=\sin x$ ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

1. $y=\sin x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(y)=R$, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე– $E(y)=[-1;1]$.

2. $y=\sin x$ ფუნქცია კენტია, რადგან ნებისმიერი x–ისათვის $\sin(-x)=-\sin x$, ვინაიდან აბსცისთა ღერძის მიმართ სიმეტრიული P_x და P_{-x} წერტილების ორდინატები განსხვავდებიან მხოლოდ ნიშნით (ნახ. 54).



ნახ. 54

3. $y=\sin x$ ფუნქცია პერიოდულია და მისი უმცირესი დადებითი პერიოდია 2π. მართლაც, რადგან, ნებისმიერი x–ისათვის $R_0^{x+2\pi}=R_0^x$, ამიტომ 2π წარმოადგენს ერთ-ერთ პერიოდს. ვაჩვენოთ, რომ იგი უმცირესი დადებითი პერიოდია. თუ დავუშვებთ, რომ $l\in\,]0;2\pi[$ არის პერიოდი, მაშინ ნებისმიერი x–ისათვის $\sin(x+l)=\sin x$. კერძოდ, როცა $x=0$, მივიღებთ ტოლობას

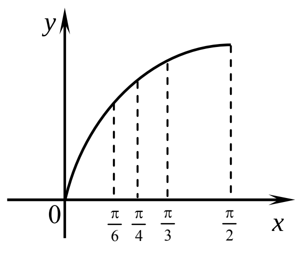
$$\sin l=0\,,$$

რომელიც მართებულია $]0;2\pi[$ შუალედის მხოლოდ ერთი $l=\pi$ მნიშვნელობისათვის, რადგან ეს რიცხვი არის ერთადერთი აღნიშნული შუალედიდან, რომლის შესაბამისი წერტილი ერთეულოვან წრეწირზე, აბსცისთა ღერძზე ძევს. მაგრამ π არ წარმოადგენს $\sin x$–ის პერიოდს, რადგან $\sin\frac{\pi}{2}=1$, ხოლო $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$.

4. $y=\sin x$ ფუნქცია ზრდადია $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში, რადგან როდესაც x იზრდება $-\frac{\pi}{2}$–დან $\frac{\pi}{2}$–მდე, P_x-ის ორდინატი იზრდება –1-დან 1-მდე. ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $\sin x$ ფუნქცია $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ შუალედში კლებულობს 1-დან –1-მდე. რადგან $\sin x$ პერიოდულია პერიოდით 2π, ამიტომ ცხადია, რომ იგი ზრდადია ნებისმიერ $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in Z$, სახის შუალედში, ხოლო კლებადია ნებისმიერ $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in Z$, სახის შუალედში.

განხილული თვისებების საფუძველზე ავაგოთ $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკი.

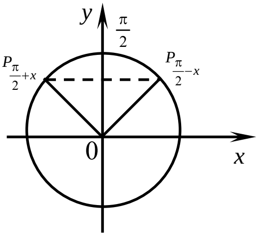
ვინაიდან $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში $\sin x$ ფუნქცია იზრდება 0-დან 1-მდე, ხოლო მისი მნიშვნელობები $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ და $\frac{\pi}{3}$–ზე შესაბამისად არის $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ და $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ამიტომ, ამ შუალედში $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკს აქვს სახე (ნახ. 55).



ნახ. 55

$\sin x$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია $x=\frac{\pi}{2}$ წრფის მიმართ, რადგან ნებისმიერი x–ისათვის

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right);$$

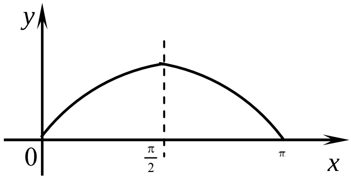


ნახ. 56

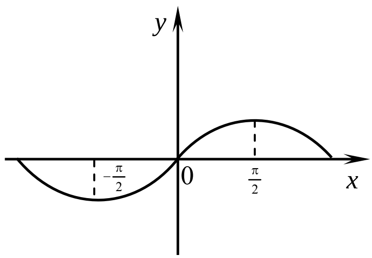
მართლაც, $P_{\frac{\pi}{2}-x}$ და $P_{\frac{\pi}{2}+x}$ წერტილები სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ (ნახ. 56), ამიტომ მათი ორდინატები ტოლია. აქედან გამომდინარე, $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკს $[0;\pi]$ შუალედში აქვს სახე (ნახ. 57).

$\sin x$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ, რადგან იგი კენტი ფუნქციაა. ამიტომ $[-\pi;\pi]$ შუალედში ამ ფუნქციის გრაფიკს აქვს სახე (ნახ. 58).

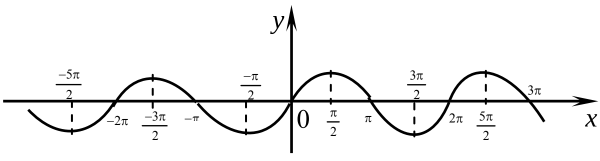
$\sin x$ ფუნქცია პერიოდულია პერიოდით 2π, ამიტომ საბოლოოდ მის გრაფიკს ექნება სახე (ნახ. 59). $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკს სინუსოიდა ეწოდება.



ნახ. 57



ნახ. 58



ნახ. 59

როგორც $\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის აგების სქემიდან ჩანს, სინუსოიდის ასაგებად საკმარისია ვიცოდეთ $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკი $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში.

§54. $y = \arcsin x$ ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

$y = \sin x$ ფუნქცია ზრდადია $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში, ამიტომ არსებობს მისი შექცეული ფუნქცია ამ შუალედში, რომელსაც არკსინუსი ეწოდება და $\arcsin x$ სიმბოლოთი აღინიშნება. რადგან $\sin x$ ფუნქცია $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში ღებულობს ყველა მნიშვნელობას [-1;1] შუალედიდან, ამიტომ $y = \arcsin x$ ფუნქციის განსაზღვრის არე $D(\arcsin x) = [-1;1]$, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე– $E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

ცხადია, თუ $-1 \le a \le 1$, მაშინ $\arcsin a$ წარმოადგენს იმ კუთხის სიდიდეს $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედიდან, რომლის სინუსი უდრის a–ს, ე. ი.

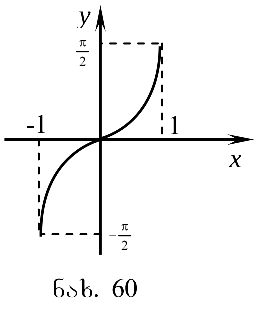
$$\sin(\arcsin a) = a\ .$$

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x\,,$$

ამიტომ $y = \arcsin x$ ფუნქცია კენტია.

$y = \arcsin x$ ფუნქცია ზრდადია, როგორც ზრდადი ფუნქციის შექცეული ფუნქცია და რადგან ურთიერთშექცეულ ფუნქციათა გრაფიკები სიმეტრიულია $y = x$ წრფის მიმართ, ამიტომ ამ ფუნქციის გრაფიკს აქვს სახე (ნახ. 60).

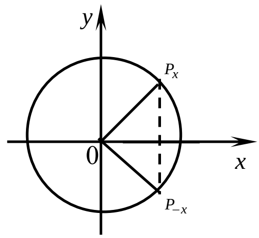


ნახ. 60

§55. $y=\cos x$ ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

1. $y=\cos x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(y)=R$, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე– $E(y)=[-1;1]$.

2. $y=\cos x$ ფუნქცია ლუწია, რადგან ნებისმიერი x–ისათვის $\cos(-x)=\cos x$, ვინაიდან აბსცისთა ღერძის მიმართ სიმეტრიული P_x და P_{-x} წერტილების აბსცისები ტოლია (ნახ. 61).



ნახ. 61

3. $y=\cos x$ ფუნქცია პერიოდულია და მისი უმცირესი დადებითი პერიოდია 2π. მართლაც, რადგან ნებისმიერი x–ისათვის $R_0^{x+2\pi}=R_0^x$, ამიტომ 2π წარმოადგენს ერთ-ერთ პერიოდს. ვაჩვენოთ, რომ იგი უმცირესი დადებითი პერიოდია. თუ დავუშვებთ, რომ $l\in\left]0;2\pi\right[$ არის პერიოდი, მაშინ ნებისმიერი x–ისათვის $\cos(x+l)=\cos x$. კერძოდ, როცა $x=0$, მივიღებთ ტოლობას

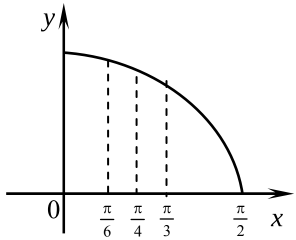
$$\cos l=1,$$

რომელიც არ არის მართებული l–ის არცერთი მნიშვნელობისათვის $\left]0;2\pi\right[$ შუალედიდან.

4. $y=\cos x$ ფუნქცია ზრდადია $[-\pi;0]$ შუალედში, რადგან როდესაც x იზრდება $-\pi$–დან 0-მდე, P_x-ის აბსცისა იზრდება -1-დან 1-მდე. ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $\cos x$ ფუნქცია $[0;\pi]$ შუალედში კლებულობს 1-დან –1-მდე. რადგან $\cos x$ პერიოდულია პერიოდით 2π, ამიტომ ცხადია, რომ იგი ზრდადია ნებისმიერ $[-\pi+2\pi k;2\pi k]$, $k\in Z$, სახის შუალედში, ხოლო კლებადია ნებისმიერ $[2\pi k;\pi+2\pi k]$, $k\in Z$, სახის შუალედში.

განხილული თვისებების საფუძველზე ავაგოთ $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკი.

ვინაიდან $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ შუალედში $y=\cos x$ ფუნქცია კლებულობს 1-დან 0-მდე, ხოლო მისი მნიშვნელობები $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{4}$ და $\dfrac{\pi}{3}$–ზე შესაბამისად არის $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ და



ნახ. 62

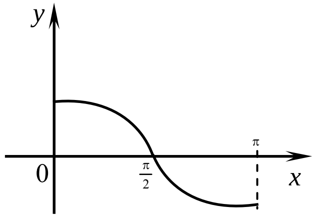
$\frac{1}{2}$, ამიტომ ამ შუალედში $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკს აქვს სახე (ნახ. 62).

$\cos x$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია $x=\frac{\pi}{2}$ წერტილის მიმართ, რადგან ნებისმიერი x-ისათვის

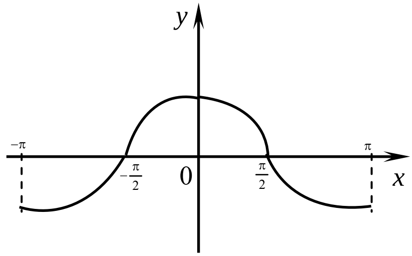
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right);$$

მართლაც $P_{\frac{\pi}{2}-x}$ და $P_{\frac{\pi}{2}+x}$ წერტილები სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ (ნახ. 56) და ამიტომ მათი აბსცისები განსხვავდებიან მხოლოდ ნიშნით. აქედან გამომდინარე, $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკს $[0;\pi]$ შუალედში აქვს სახე (ნახ. 63).

$\cos x$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ, რადგან იგი ლუწი ფუნქციაა. ამიტომ $[-\pi;\pi]$ შუალედში ამ ფუნქციის გრაფიკს აქვს სახე (ნახ. 64).

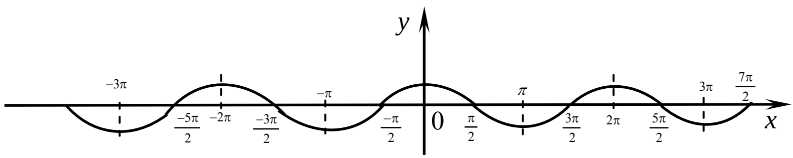


ნახ. 63



ნახ. 64

$\cos x$ ფუნქცია პერიოდულია პერიოდით 2π, ამიტომ საბოლოოდ მის გრაფიკს ექნება სახე (ნახ. 65).



ნახ. 65

$y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკს კოსინუსოიდა ეწოდება. როგორც ფუნქციის გრაფიკის აგების სქემიდან ჩანს,

კოსინუსოიდის აგებად საკმარისია ვიცოდეთ $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკი $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ შუალედში.

§56. $y=\arccos x$ ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

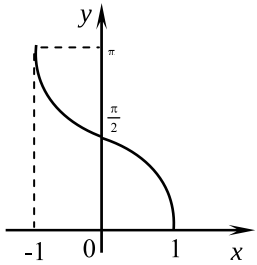
$y=\cos x$ ფუნქცია კლებადია $[0;\pi]$ შუალედში, ამიტომ არსებობს მისი შექცეული ფუნქცია ამ შუალედში, რომელსაც არკკოსინუსი ეწოდება და $\arccos x$ სიმბოლოთი აღინიშნება. რადგან $\cos x$ ფუნქცია $[0;\pi]$ შუალედში ღებულობს ყველა მნიშვნელობას [-1;1] შუალედიდან, ამიტომ $y=\arccos x$ ფუნქციის განსაზღვრის არე $D(\arccos x)=[-1;1]$, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე– $E(\arccos x)=[0;\pi]$. ცხადია, თუ $-1\le a\le 1$, მაშინ $\arccos a$ წარმოადგენს იმ კუთხის სიდიდეს $[0;\pi]$ შუალედიდან, რომლის კოსინუსი უდრის a–ს, ე. ი.

$$\cos(\arccos a)=a\ .$$

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x\ .$$

$y=\arccos x$ ფუნქცია კლებადია, როგორც კლებადი ფუნქციის შექცეული ფუნქცია და რადგან ურთიერთშექცეულ ფუნქციათა გრაფიკები სიმეტრიულია $y=x$ წრფის მიმართ, ამიტომ ამ ფუნქციის გრაფიკს აქვს სახე (ნახ. 66).



ნახ. 66

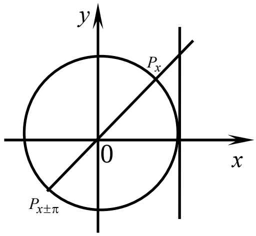
§57. $y=tgx$ ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

1. $y=tgx$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, გარდა $\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, სახის რიცხვებისა, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლეა R.

2. $y=tgx$ ფუნქცია კენტია, რადგან ნებისმიერი x–ისათვის განსაზღვრის არიდან

$$tg(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\frac{-\sin x}{\cos x}=-tgx\ .$$

3. $y = tgx$ ფუნქცია პერიოდულია და მისი უმცირესი დადებითი პერიოდია π. მართლაც, x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის განსაზღვრის არედან x და $x \pm \pi$ რიცხვები გამოისახებიან ერთეულოვანი წრეწირის P_x და $P_{x \pm \pi}$ წერტილებით, რომლებიც სიმეტრიულია კოორდინატთა O სათავის მიმართ (ნახ. 67), ამიტომ ამ რიცხვების შესაბამისი წერტილები ტანგენსების ღერძზე ერთი და იგივეა. ე. ი. $tg(x \pm \pi) = tgx$.



ნახ. 67

ამრიგად π წარმოადგენს ერთ-ერთ პერიოდს. ვაჩვენოთ, რომ იგი უმცირესი დადებითი პერიოდია. თუ დავუშვებთ, რომ $l \in \left]0;\pi\right[$ არის პერიოდი, მაშინ ნებისმიერი x –ისათვის

$$tg(x + l) = tgx .$$

კერძოდ, როცა $x = 0$, მივიღებთ

$$tgl = 0$$

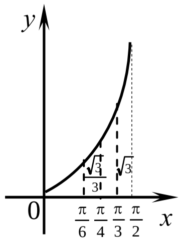
ტოლობას, რომელიც არ არის მართებული l –ის არცერთი მნიშვნელობისათვის $\left]0;\pi\right[$ შუალედიდან.

4. $y = tgx$ ფუნქცია ზრდადია $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ შუალედში, რადგან, როდესაც x იზრდება $-\dfrac{\pi}{2}$ –დან $\dfrac{\pi}{2}$ –მდე ტანგენსების ღერძზე მისი შესაბამისი წერტილის ორდინატი იზრდება $-\infty$ –დან $+\infty$ –მდე. რადგან tgx პერიოდულია პერიოდით π, ამიტომ, ცხადია, რომ იგი ზრდადია ნებისმიერ $\left]-\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right[$, $k \in Z$, სახის შუალედში.

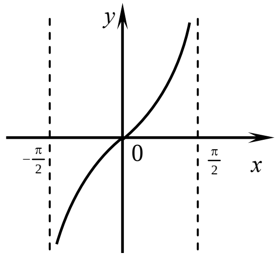
განხილული თვისებების საფუძველზე ავაგოთ $y = tgx$ ფუნქციის გრაფიკი.

ვინაიდან $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ შუალედში tgx ფუნქცია იზრდება 0-დან $+\infty$ –მდე, ხოლო მისი მნიშვნელობები $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{4}$ და $\dfrac{\pi}{3}$ –ზე შესაბამისად არის $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 1 და $\sqrt{3}$, ამიტომ ამ შუალედში ფუნქციის გრაფიკს აქვს სახე (ნახ. 68).

tgx ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ, რადგან იგი კენტი ფუნქციაა. ამიტომ $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ შუალედში ამ ფუნქციის გრაფიკს აქვს სახე (ნახ. 69).



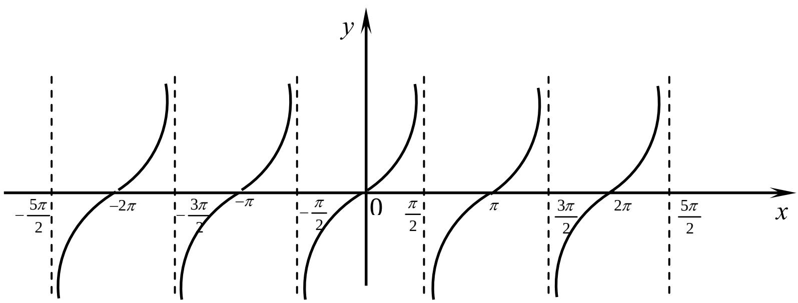
ნახ. 68



ნახ. 69

tgx ფუნქცია პერიოდულია პერიოდით π, ამიტომ მის გრაფიკს აქვს სახე (ნახ. 70).

$y = tgx$ ფუნქციის გრაფიკს ტანგენსოიდა ეწოდება.



ნახ. 70

§58. $y = arctgx$ ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

$y = tgx$ ფუნქცია ზრდადია $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ შუალედში, ამიტომ არსებობს მისი შექცეული ფუნქცია ამ შუალედში, რომელსაც არკტანგენსი ეწოდება და *arctgx* სიმბოლოთი აღინიშნება.

რადგან tgx ფუნქცია $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ შუალედში ღებულობს ყველა მნიშვნელობას R –დან, ამიტომ $y=arctgx$ ფუნქციის განსაზღვრის არე $D(arctgx)=R$, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე– $E(arctgx)=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. ცხადია, რომ ნებისმიერი a რიცხვისათვის $arctga$ წარმოადგენს იმ კუთხის სიდიდეს $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ შუალედიდან, რომლის ტანგენსი უდრის a –ს, ე. ი.

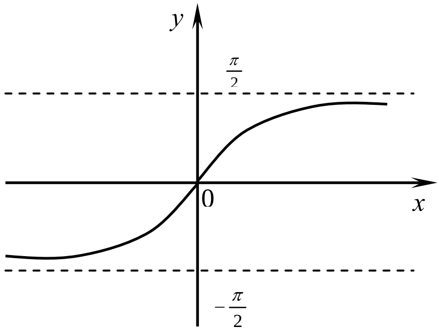
$$tg(arctga)=a.$$

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$arctg(-x)=-arctgx,$$

ამიტომ $y=arctgx$ ფუნქცია კენტია.

$y=arctgx$ ფუნქცია ზრდადია, როგორც ზრდადი ფუნქციის შექცეული ფუნქცია და რადგან ურთიერთშექცეულ ფუნქციათა გრაფიკები სიმეტრიულია $y=x$ წრფის მიმართ, ამიტომ ამ ფუნქციის გრაფიკს აქვს სახე (ნახ. 71).



ნახ. 71

§59. $y=ctgx$ ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

1. $y=ctgx$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე, გარდა πk, $k\in Z$, სახის რიცხვებისა, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლეა R.

2. $y=ctgx$ ფუნქცია კენტია, რადგან ნებისმიერი x–ისათვის განსაზღვრის არიდან

$$ctg(-x)=\frac{\cos(-x)}{\sin(-x)}=\frac{\cos x}{-\sin x}=-ctgx\,.$$

3. $y=ctgx$ ფუნქცია პერიოდულია და მისი უმცირესი დადებითი პერიოდია π. მართლაც x–ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის განსაზღვრის არიდან x და $x\pm\pi$ რიცხვები გამოისახებიან ერთეულოვანი წრეწირის P_x და $P_{x\pm\pi}$ წერტილებით, რომლებიც სიმეტრიულია კოორდინატთა O სათავის მიმართ (ნახ. 72), ამიტომ ამ რიცხვების შესაბამისი წერტილები კოტანგენსების ღერძზე ერთიდაიგივეა. ე. ი.

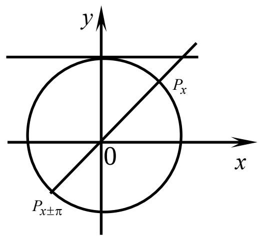
$$ctg(x\pm\pi)=ctgx\,.$$

ამრიგად, π წარმოადგენს ერთ-ერთ პერიოდს. ვაჩვენოთ, რომ იგი უმცირესი დადებითი პერიოდია. თუ დავუშვებთ, რომ $l\in\left]0;\pi\right[$ არის პერიოდი, მაშინ ნებისმიერი x–ისათვის

$$ctg(x+l)=ctgx\,.$$

კერძოდ, როცა $x=\frac{\pi}{2}$, მივიღებთ ტოლობას:

$$ctg\left(\frac{\pi}{2}+l\right)=0\,,$$



ნახ. 72

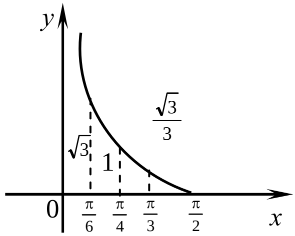
რომელიც არ არის მართებული l–ის არცერთი მნიშვნელობისათვის $\left]0;\pi\right[$ შუალედიდან.

4. $y=ctgx$ ფუნქცია კლებადია $\left]0;\pi\right[$ შუალედში, რადგან, როდესაც x იზრდება 0-დან π–მდე, კოტანგენსების ღერძზე მისი შესაბამისი წერტილის აბსცისა კლებულობს $+\infty$–დან $-\infty$–მდე. რადგან $ctgx$ პერიოდულია პერიოდით π, ამიტომ ცხადია, რომ იგი კლებადია ნებისმიერ $\left]\pi k;\pi+\pi k\right[$, $k\in Z$, სახის შუალედში.

განხილული თვისებების საფუძველზე ავაგოთ $y=ctgx$ ფუნქციის გრაფიკი.

ვინაიდან $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში $ctgx$ ფუნქცია კლებულობს $+\infty$–დან 0-მდე, ხოლო მისი მნიშვნელობები $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ და $\frac{\pi}{3}$–ზე

შესაბამისად არის $\sqrt{3}$, 1 და $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, ამიტომ ამ შუალედში ფუნქციის გრაფიკს აქვს სახე (ნახ. 73).



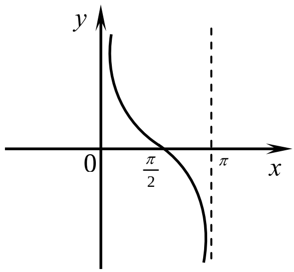
ნახ. 73

ctgx ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია $x=\dfrac{\pi}{2}$ წერტილის მიმართ, რადგან ნებისმიერი $x \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$, რიცხვისათვის

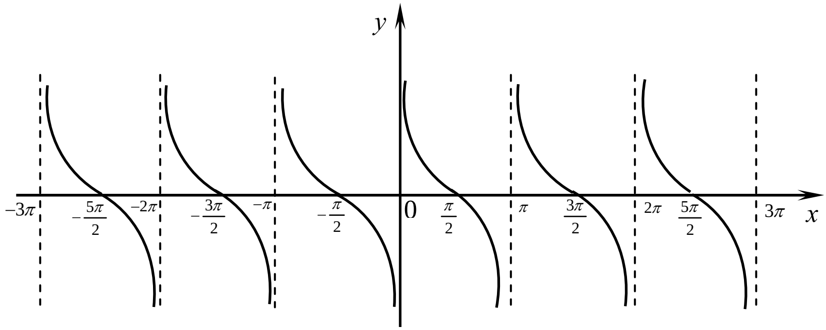
$$ctg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=-ctg\left(\frac{\pi}{2}+x\right).$$

აქედან გამომდინარე, $y=ctgx$ ფუნქციის გრაფიკს $]0;\pi[$ შუალედში აქვს სახე (ნახ. 74).

ctgx ფუნქცია პერიოდულია პერიოდით π, ამიტომ მის გრაფიკს აქვს სახე (ნახ. 75).



ნახ. 74



ნახ. 75

$y = ctgx$ ფუნქციის გრაფიკს კოტანგენსოიდა ეწოდება.

§60. $y = arcctgx$ ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

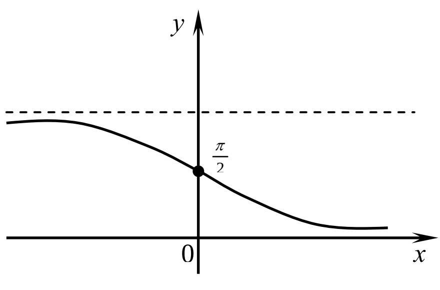
$y = ctgx$ ფუნქცია კლებადია $]0;\pi[$ შუალედში, ამიტომ არსებობს მისი შექცეული ფუნქცია ამ შუალედში, რომელსაც არკკოტანგენსი ეწოდება და $arcctgx$ სიმბოლოთი აღინიშნება. რადგან $ctgx$ ფუნქცია $]0;\pi[$ შუალედში ღებულობს ყველა მნიშვნელობას R–დან, ამიტომ $y = arcctgx$ ფუნქციის განსაზღვრის არე $D(arcctg) = R$, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე– $E(arcctg) =]0;\pi[$. ცხადია, ნებისმიერი a რიცხვისათვის $arcctga$ წარმოადგენს იმ კუთხის სიდიდეს $]0;\pi[$ შუალედიდან, რომლის კოტანგენსი უდრის a–ს, ე. ი.

$$ctg(arcctga) = a .$$

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$arcctg(-x) = \pi - arcctgx .$$

$y = arcctgx$ ფუნქცია კლებადია, როგორც კლებადი ფუნქციის შექცეული ფუნქცია და რადგან ურთიერთშექცეულ ფუნქციათა გრაფიკები სიმეტრიულია $y = x$ წრფის მიმართ, ამიტომ ამ ფუნქციის გრაფიკს აქვს სახე (ნახ. 76).



ნახ. 76

§61. დამოკიდებულება ერთი და იგივე არგუმენტის ტრიგონომეტრიოულ ფუნქციებს შორის

1. ვინაიდან ერთეულოვანი წრეწირის ნებისმიერი $P_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$ წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ პირობას $x_\alpha^2 + y_\alpha^2 = 1$, ხოლო $x_\alpha = \cos\alpha$, $y_\alpha = \sin\alpha$, ამიტომ გვაქვს:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \tag{1}$$

2. თუ $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$, მაშინ

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1. \tag{2}$$

მართლაც,

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1.$$

3. თუ $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, მაშინ გვაქვს იგივეობა

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \tag{3}$$

მართლაც

$$1 + tg^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

4. თუ $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, მაშინ გვაქვს იგივეობა

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \tag{4}$$

მართლაც

$$1 + ctg^2\alpha = 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

(1)–(4) ფორმულები საშუალებას გვაძლევს ერთ-ერთი ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობის მიხედვით ვიპოვოთ ამავე არგუმენტის დანარჩენი ტრიგონომეტრიული ფუნქციები, თუ ცნობილია რომელ მეოთხედშია არგუმენტი.

მაგალითი. ვიპოვოთ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ და $ctg\alpha$, თუ $tg\alpha = -\frac{3}{4}$, $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$. (2) ფორმულის თანახმად

$$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = -\frac{4}{3}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ α მოთავსებულია მეორე მეოთხედში, სადაც კოსინუსი უარყოფითია, (3) ფორმულიდან გვექნება

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = -\frac{4}{5}.$$

$\sin\alpha$ გამოითვლება შემდეგნაირად

$$\sin\alpha = tg\alpha\cdot\cos\alpha = \left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}.$$

§62. ორი არგუმენტის ჯამისა და სხვაობის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

მტკიცდება, რომ ნებისმიერი α და β–სათვის ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,,$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\,,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,.$$

ვაჩვენოთ, რომ თუ $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$, $\beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$ და $\alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi m$, $(k,n,m\in Z)$, მაშინ

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}.$$

მართლაც

$$\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} =$$
$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = tg(\alpha+\beta).$$

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ:

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad \alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi m,$$
$$(k,n,m\in Z).$$

ჯამისა და სხვაობის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა გამოსათვლელ ფორმულებს შეკრების ფორმულები ეწოდება.

§63. დაყვანის ფორმულები

როგორც ცნობილია, ნებისმიერი x რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს $x = 2\pi k + \alpha$ სახით, სადაც $0 \le \alpha < 2\pi$, $k \in Z$. აქედან გამომდინარე, რადგან სინუს და კოსინუს ფუნქციების პერიოდია 2π, ამ ფუნქციების მნიშვნელობათა გამოთვლა ნებისმიერი x არგუმენტისათვის დაიყვანება $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$ ფუნქციების მნიშვნელობების გამოთვლამდე, სადაც $\alpha \in [0;2\pi[$. უფრო მეტიც $\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციების მნიშვნელობათა გამოთვლა შეიძლება დავიყვანოთ $\sin\alpha -$ს და $\cos\alpha -$ს მოძებნამდე, სადაც $\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. ამის საშუალებას გვაძლევს ე. წ. დაყვანის ფორმულები, რომელთაც აქვთ შემდეგი სახე:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha,$$

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) = -\cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) = \sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = -\cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = -\sin\alpha.$$

ეს ფორმულები მართებულია ნებისმიერი $\alpha -$სათვის და მათი დამტკიცება შეიძლება შეკრების ფორმულების საშუალებით. მაგალითად,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha = 1\cdot\cos\alpha + 0\cdot\sin\alpha = \cos\alpha.$$

ანალოგიურად, რადგან ტანგენსისა და კოტანგენსის პერიოდია π, ხოლო ნებისმიერი x რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს $x = \pi k + \alpha$ სახით, სადაც $0 \le \alpha < \pi$, $k \in Z$, ამიტომ ამ ფუნქციების მნიშვნელობათა გამოთვლა ნებისმიერი x არგუმენტისათვის დაიყვანება $tg\alpha$ და $ctg\alpha$ ფუნქციების მნიშვნელობების მოძებნამდე, სადაც $\alpha \in [0;\pi[$. ისევე როგორც

სინუსისა და კოსინუსის შემთხვევაში tgx და $ctgx$ ფუნქციების მნიშვნელობათა გამოთვლა შეიძლება დავიყვანოთ $tg\alpha$–ს და $ctg\alpha$–ს მოძებნამდე, სადაც $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, დაყვანის ფორმულების საშუალებით, რომელთაც აქვთ სახე:

$$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -ctg\alpha\ ,\ ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -tg\alpha\ ,$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = ctg\alpha\ ,\ ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = tg\alpha\ .$$

დავამტკიცოთ ერთ-ერთი მათგანი

$$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -ctg\alpha\ .$$

დაყვანის ფორმულების დამახსოვრება ადვილად შეიძლება შემდეგი წესის მიხედვით:

თუ დაყვანის ფორმულაში $\frac{\pi}{2}$ აღებულია კენტ რიცხვჯერ და მას აკლდება, ან ემატება α, მაშინ დასაყვანი ფუნქცია იცვლება “კოფუნქციით”*, თუ $\frac{\pi}{2}$ აღებულია ლუწ რიცხვჯერ, მაშინ დასაყვანი ფუნქციის სახელწოდება უცვლელი რჩება. დაყვანილი ფუნქციის წინ იწერება ის ნიშანი, რა ნიშანიც აქვს დასაყვან ფუნქციას, თუ ჩავთვლით, რომ $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

განვიხილოთ მაგალითები

1. $\sin 1935^\circ = \sin\left(360^\circ \cdot 5 + 135^\circ\right) = \sin 135^\circ = \sin\left(90^\circ + 45^\circ\right) =$

$$= \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

2. $ctg\,\frac{29}{3}\pi = ctg\left(9\pi + \frac{2}{3}\pi\right) = ctg\,\frac{2}{3}\pi = ctg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) =$

$$= -tg\,\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\ .$$

---

* სინუსის, კოსინუსის, ტანგენსის და კოტანგენსის კოფუნქციები ეწოდება შესაბამისად კოსინუსს, სინუსს, კოტანგენსს და ტანგენსს.

§64. ორმაგი და ნახევარი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

თუ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$ ფორმულაში ჩავსვამთ $\beta=\alpha$, მივიღებთ

$$\sin 2\alpha=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos\alpha\cdot\sin\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha .$$

ამრიგად,

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha .$$

ანალოგიურად

$$\cos 2\alpha=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha ,$$

$$tg2\alpha=\frac{tg\alpha+tg\alpha}{1-tg\alpha tg\alpha}=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} ,$$

ე. ი.

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha , \qquad (1)$$

$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} ,\ \ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k ,\ \ \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n \quad (k,n\in Z) .$$

თუ (1) ფორმულის მარჯვენა მხარეს გამოვსახავთ მხოლოდ სინუსით ან მხოლოდ კოსინუსით, მივიღებთ

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha ,$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1 .$$

აქედან

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2} ,\ \ \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2} .$$

თუ მიღებულ ფორმულებში α–ს შევცვლით $\frac{\alpha}{2}$–ით, გვექნება

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2} ,$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2} ,$$

საიდანაც

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} , \qquad (2)$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} . \qquad (3)$$

თუ $\alpha\neq\pi(2k+1)$, $(k\in Z)$, (2) ტოლობის (3)-ზე გაყოფით მივიღებთ

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\ . \qquad (4)$$

(2)–(4) ფორმულებში ნიშანი "+" ან "–" უნდა ავიღოთ იმის მიხედვით, თუ რომელ მეოთხედშია $\frac{\alpha}{2}$.

ნახევარი არგუმენტის ტანგენსი მთელი არგუმენტის სინუსითა და კოსინუსით შეიძლება გამოისახოს ფორმულით

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},\ \ \alpha \neq \pi(2k+1),\ \ (k\in Z)$$

მართლაც,

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = tg\frac{\alpha}{2},$$

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \ \alpha\neq\pi k,\ \ (k\in Z).$$

§65. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა გამოსახვა ნახევარი არგუმენტის ტანგენსით

ხშირად მოსახერხებელია ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა გამოსახვა ნახევარი არგუმენტის ტანგენსით შემდეგი ფორმულების საშუალებით:

$$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}},\ \ \alpha\neq\pi(2k+1),\ \ (k\in Z) \qquad (1)$$

$$\cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}},\ \ \alpha\neq\pi(2k+1),\ \ (k\in Z) \qquad (2)$$

$$tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}},\ \ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \ \alpha\neq\pi(2n+1),\ \ (k,n\in Z) \qquad (3)$$

დავამტკიცოთ ეს ფორმულები:

$$\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=2\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}:\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha\ ;$$

$$\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}:\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha\ .$$

(3) ფორმულა მიიღება (1) ტოლობის გაყოფით (2)–ზე.

§66. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ნამრავლის გარდაქმნა ჯამად

გამოვიყვანოთ $\sin\alpha\cdot\cos\beta$, $\sin\alpha\cdot\sin\beta$ და $\cos\alpha\cdot\cos\beta$ ნამრავლების ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ჯამად გარდაქმნის ფორმულები.

თუ შევკრებთ

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

და

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

ტოლობებს, მივიღებთ:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cdot\cos\beta\,,$$

საიდანაც

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right].$$

ანალოგიურად

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta \qquad (1)$$

და

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta \qquad (2)$$

ტოლობების შეკრებით მივიღებთ:

$$\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta\,,$$

საიდანაც

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right].$$

ასევე, თუ (1) ტოლობას გამოვაკლებთ (2)-ს, მივიღებთ

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\cdot\sin\beta\,,$$

საიდანაც

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right].$$

§67. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ჯამის გარდაქმნა ნამრავლად

როგორც წინა პარაგრაფში ვნახეთ, მართებულია შემდეგი ფორმულები:

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cdot \cos y\,, \tag{1}$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cdot \cos y\,, \tag{2}$$

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2\sin x \cdot \sin y\,, \tag{3}$$

ადვილი საჩვენებელია აგრეთვე, რომ

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x \cdot \sin y\,, \tag{4}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$x + y = \alpha\,, \quad x - y = \beta\,, \tag{5}$$

საიდანაც

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2}\,, \quad y = \frac{\alpha-\beta}{2}\,, \tag{6}$$

(5) და (6) ტოლობების გათვალისწინებით (1)–(4) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,,$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,,$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,,$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\,.$$

განვიხილოთ ახლა ტანგენსების ჯამი $tg\alpha + tg\beta$.

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}\,.$$

ამრიგად

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}\,, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\,, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\,, \quad (k, n \in Z)\,.$$

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}\,, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\,, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\,, \quad (k, n \in Z)\,;$$

$$ctg\alpha + ctg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}, \;\; \alpha \neq \pi k, \;\; \beta \neq \pi n, \;\; (k, n \in Z);$$

$$ctg\alpha - ctg\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}, \;\; \alpha \neq \pi k, \;\; \beta \neq \pi n, \;\; (k, n \in Z).$$

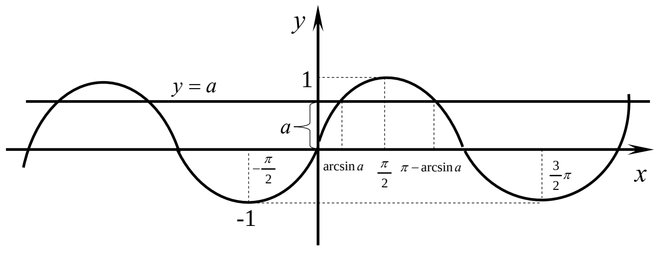
§68. ტრიგონომეტრიული განტოლებები

1. ***განვიხილოთ $\sin x = a$ განტოლება.*** რადგან ნებისმიერი x-სათვის $-1 \leq \sin x \leq 1$, ამიტომ, როცა $|a| > 1$, ამ განტოლებას ამონახსნი არა აქვს.

როცა $|a| \leq 1$, მაშინ $\sin x = a$ განტოლების ამოსახსნელად საკმარისია ვიპოვოთ მისი ყველა ამონახსნი ნებისმიერ 2π სიგრძის შუალედში და გამოვიყენოთ სინუსის პერიოდულობა. ასეთ შუალედად მოსახერხებელია ავიღოთ $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ და $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ შუალედებში $\sin x$ ფუნქცია მონოტონურია და თითოეულ მათგანზე ღებულობს ყველა მნიშვნელობას -1-დან 1-მდე (ნახ. 77). ამიტომ ამ შუალედებიდან თითოეულში განტოლებას ექნება ერთადერთი ამონახსნი. არკსინუსის განსაზღვრის თანახმად $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში მოთავსებული ამონახსნი იქნება $\arcsin a$.

რადგან $\pi - \arcsin a$ ეკუთვნის $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ შუალედს და $\sin(\pi - \arcsin a) = \sin(\arcsin a) = a$, ამიტომ $\pi - \arcsin a$ წარმოადგენს ამ შუალედში მოთავსებულ ამონახსნს (ნახ. 77).



ნახ. 77

იმისათვის, რომ ჩავწეროთ $\sin x = a$ განტოლების ყველა ამონახსნი, ვისარგებლოთ პერიოდულობით, ე. ი. მიღებული ორი ამონახსნიდან თითოეულს დავუმატოთ $2\pi n$, $(n \in Z)$, სახის რიცხვი. მივიღებთ, რომ ამონახსნთა სიმრავლე შედგება ორი უსასრულო ქვესიმრავლისაგან, რომლებიც განისაზღვრებიან ფორმულებით:

$$x = \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z,$$

$$x = \pi - \arcsin a + 2\pi n = -\arcsin a + \pi(2n+1), \quad n \in Z.$$

ამ სიმრავლეთა გაერთიანება მოგვცემს $\sin x = a$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეს, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in Z.$$

იმ შემთხვევაში, როცა a უდრის 0-ს, 1-ს ან -1-ს, $\sin x = a$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე შეიძლება უფრო მარტივი ფორმულით განისაზღვროს, კერძოდ:

$\sin x = 0$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეა

$$\{x = \pi k, \ k \in Z\};$$

$\sin x = 1$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეა

$$\left\{x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in Z\right\};$$

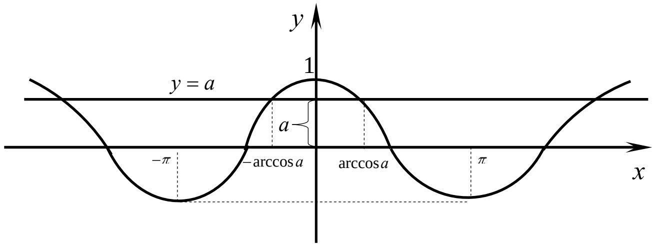
$\sin x = -1$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეა

$$\left\{x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in Z\right\}.$$

2. ***განვიხილოთ $\cos x = a$ განტოლება.*** რადგან ნებისმიერი x–ისათვის $-1 \le \cos x \le 1$, ამიტომ, როცა $|a| > 1$ ამ განტოლებას ამონახსნი არა აქვს.

როცა $|a| \le 1$, მაშინ $\cos x = a$ განტოლების ამოსახსნელად საკმარისია ვიპოვოთ მისი ყველა ამონახსნი ნებისმიერი 2π სიგრძის შუალედში და გამოვიყენოთ კოსინუსის პერიოდულობა. ასეთ შუალედად მოსახერხებელია ავიღოთ $[-\pi; \pi]$.

$[-\pi; 0]$ და $[0; \pi]$ შუალედებში $\cos x$ ფუნქცია მონოტონურია და თითოეულ მათგანზე ღებულობს ყველა მნიშვნელობას -1-დან 1-მდე (ნახ. 78). ამიტომ ამ შუალედებიდან თითოეულში განტოლებას ექნება ერთადერთი ამონახსნი. არკკოსინუსის განსაზღვრების თანახმად $[0; \pi]$ შუალედში მოთავსებული ამონახსნი იქნება $\arccos a$. რადგან კოსინუსი ლუწი ფუნქციაა, ამიტომ $[-\pi; 0]$ შუალედში მოთავსებული ამონახსნი იქნება $-\arccos a$.



ნახ. 78

იმისათვის, რომ ჩავწეროთ $\cos x = a$ განტოლების ყველა ამონახსნი, ვისარგებლოთ კოსინუსის პერიოდულობით, ე. ი. მიღებული ორი ამონახსნიდან თითოეულს დავუმატოთ $2\pi k$, $(k \in Z)$, სახის რიცხვი. მივიღებთ, რომ ამონახსნთა სიმრავლე შედგება შემდეგი ორი უსასრულო ქვესიმრავლისაგან:

$$\{x = \arccos a + 2\pi k,\ k \in Z\},$$

$$\{x = -\arccos a + 2\pi k,\ k \in Z\}.$$

მიღებული სიმრავლეების გაერთიანება მოგვცემს $\cos x = a$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეს

$$\{x = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in Z\}.$$

იმ შემთხვევაში, როცა a უდრის 0-ს, 1-ს ან -1-ს $\cos x = a$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე შეიძლება უფრო მარტივი ფორმულით განისაზღვროს, კერძოდ:

$\cos x = 0$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეა

$$\left\{x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z\right\};$$

$\cos x = 1$ განტოლების ამონახსთა სიმრავლეა

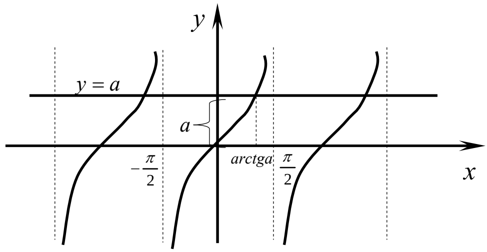
$$\{x = 2\pi k,\ k \in Z\};$$

$\cos x = -1$ განტოლების ამონახსთა სიმრავლეა

$$\{x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z\}.$$

3. ***განვიხილოთ $tgx = a$ განტოლება.*** ამ განტოლების ამოსახსნელად საკმარისია ვიპოვოთ მისი ყველა ამონახსნი ნებისმიერი π სიგრძის შუალედში და გამოვიყენოთ ტანგენსის პერიოდულობა. ასეთ შუალედად მოსახერხებელია ავიღოთ $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. ამ შუალედში tgx ფუნქცია ზრდადია და ღებულობს ყველა მნიშვნელობას $-\infty$ –დან $+\infty$ –მდე (ნახ. 79), ამიტომ

$\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ შუალედში განტოლებას ექნება ერთადერთი ამონახსნი. არკტანგენსის განსაზღვრების თანახმად ეს ამონახსნი იქნება $arctga$.



ნახ. 79

იმისათვის, რომ ჩავწეროთ $tgx = a$ განტოლების ყველა ამონახსნი, ვისრგებლოთ ტანგენსის პერიოდულობით, ე. ი. მიღებულ ამონახსნს დავუმატოთ πk, $(k \in Z)$, სახის რიცხვი. მივიღებთ, რომ $tgx = a$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეა

$$\{x = arctga + \pi k,\ k \in Z\}.$$

4. $tgx = a$ განტოლების ამოხსნის დროს ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $ctgx = a$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეა

$$\{x = arcctga + \pi k,\ k \in Z\}.$$

ზემოთ განხილული განტოლებები წარმოადგენენ უმარტივეს ტრიგონომეტრიულ განტოლებებს. საზოგადოდ, ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოსახსნელად საჭიროა იგივური გარდაქმნების საშუალებით იგი შეიცვალოს მისი ტოლფასი უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებით ან ასეთ განტოლებათა გაერთიანებით.

§69. ხარისხი ირაციონალური მაჩვენებლით

ჩვენთვის ცნობილია, თუ როგორ განისაზღვრება ხარისხი რაციონალური მაჩვენებლით. რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხების გამოყენებით კი განისაზღვრება ირაციონალურ მაჩვენებლიანი ხარისხი. თუ α რაიმე ირაციონალური რიცხვია, მაშინ ყოველთვის არსებობს β_1 და β_2 რაციონალური რიცხვები ისეთი, რომ

$$\beta_1 < \alpha < \beta_2 \qquad (1)$$

და ამასთან β_2 - β_1 რაგინდ მცირეა. მტკიცდება, რომ ნებისმიერი ნამდვილი a (a>0, a≠1) რიცხვისათვის არსებობს ერთადერთი γ რიცხვი, რომლისთვისაც უტოლობა $a^{\beta_1} < \gamma < a^{\beta_2}$ სრულდება ნებისმიერი β_1 და β_2-სათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1) პირობას. ასეთ γ რიცხვს ეწოდება a რიცხვის α ხარისხი, ე. ი. $\gamma = a^{\alpha}$.

განსაზღვრება. ნებისმიერი დადებითი α ირაციონალური რიცხვისათვის

$$0^{\alpha} = 0 .$$

ირაციონალურ მაჩვენებლიან ხარისხს გააჩნია რაციონალურ მაჩვენებლიანი ხარისხის ანალოგიური თვისებები. ამრიგად, ნებისმიერი ნამდვილი მაჩვენებლისათვის:

1. $(ab)^{\alpha} = a^{\alpha} b^{\alpha}$, 2. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$, 3. $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$,

4. $(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}$, 5. $\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}$,

სადაც $a > 0$, $b > 0$ და $\alpha, \beta \in R$.

§70. მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

$y = a^x$ სახის ფუნქციას, სადაც $a > 0$, $a \neq 1$, მაჩვენებლიანი ფუნქცია ეწოდება. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე კი– $]0;+\infty[$. $y = a^x$ ფუნქციის გრაფიკი Oy ღერძს კვეთს (0;1) წერტილში, რადგან $a^0 = 1$.

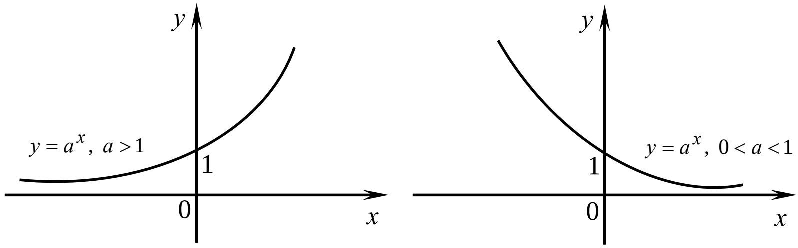
თუ $0 < a < 1$, მაშინ მაჩვენებლიანი ფუნქცია კლებადია. მართლაც, როცა $x_1 < x_2$, გვაქვს

$$a^{x_1} - a^{x_2} = a^{x_1}\left(1 - a^{x_2 - x_1}\right) > 0 ,$$

ვინაიდან $a^{x_1} > 0$, ხოლო $a^{x_2 - x_1} < 1$, რადგან $x_2 - x_1 > 0$.

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ თუ $a > 1$, მაშინ მაჩვენებლიანი ფუნქცია ზრდადია.

ზემოთ მოყვანილი თვისებები საშუალებას გვაძლევს ავაგოთ $y = a^x$ ფუნქციის გრაფიკი (ნახ. 80).



ნახ. 80

§71. ლოგარითმის ცნება

განვიხილოთ

$$a^x = b$$

განტოლება, სადაც x ცვლადია, ხოლო a და b ნამდვილი რიცხვებია, ამასთან $a > 0$ და $a \neq 1$.

თუ $b \le 0$, მაშინ მოცემულ განტოლებას ამონახსნი არ გააჩნია, რადგან ნებისმიერი $x-$ისათვის $a^x > 0$.

თუ $b > 0$, მაშინ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რადგან მაჩვენებლიანი ფუნქცია მონოტონურია და მისი მნიშვნელობათა სიმრავლეა $]0;+\infty[$.

$a^x = b$ განტოლების ამონახსნს, სადაც $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, უწოდებენ b რიცხვის ლოგარითმს a ფუძით.

განსაზღვრება. b რიცხვის ლოგარითმი a ფუძით ($a > 0, a \neq 1$) ეწოდება ხარისხის მაჩვენებელს, რომელშიც უნდა ავახარისხოთ a, რომ მივიღოთ b და $\log_a b$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

მაგალითად, $\log_5 25 = 2$, რადგან $5^2 = 25$; $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$, რადგან $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$.

ლოგარითმის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს

$$a^{\log_a b} = b$$

იგივეობა, რომელსაც ძირითადი ლოგარითმული იგივეობა ეწოდება.

იმ შემთხვევაში, როდესაც ლოგარითმის ფუძე $a=10$ ან $a=e$, b რიცხვის ლოგარითმი შესაბამისად $\lg b$ და $\ln b$ სიმბოლოთი აღინიშნება. $\lg b$–ს რიცხვის ათობითი ლოგარითმი, ხოლო $\ln b$–ს ნატურალური ლოგარითმი ეწოდება. პრაქტიკაში უფრო ხშირად გამოიყენება სწორედ ასეთი სახის ლოგარითმები, რომელთა მნიშვნელობების გამოსათვლელად არსებობს სპეციალური ცხრილები.

მოვიყვანოთ ლოგარითმის ძირითადი თვისებები:

1. $\log_a b$ გამოსახულებას აზრი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა $b>0$.

2. ერთის ლოგარითმი ნებისმიერი ფუძით ნულის ტოლია. მართლაც, რადგან $a^0=1$, ამიტომ $\log_a 1=0$.

3. თუ ლოგარითმის ფუძე ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვია, მაშინ ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვის ლოგარითმი დადებითია, ხოლო ერთზე მეტი რიცხვის ლოგარითმი კი–უარყოფითი.

4. თუ ლოგარითმის ფუძე ერთზე მეტი რიცხვია, მაშინ ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვის ლოგარითმი უარყოფითია, ხოლო ერთზე მეტი რიცხვის ლოგარითმი კი–დადებითი.

5. ფუძის ლოგარითმი ერთის ტოლია. მართლაც, რადგან $a^1=a$, ამიტომ $\log_a a=1$.

§72. ნამრავლის, ფარდობისა და ხარისხის ლოგარითმი

თეორემა 1. დადებით რიცხვთა ნამრავლის ლოგარითმი თანამამრავლთა ლოგარითმების ჯამის ტოლია, ე. ი.

$$\log_a(x_1x_2\ldots x_n)=\log_a x_1+\log_a x_2+\cdots+\log_a x_n,$$

სადაც $x_1>0, x_2>0, \ldots, x_n>0$.

დამტკიცება. ვთქვათ

$$\log_a x_1=y_1, \log_a x_2=y_2, \ldots, \log_a x_n=y_n,$$

მაშინ ლოგარითმის განსაზღვრების თანახმად

$$x_1=a^{y_1}, x_2=a^{y_2}, \ldots, x_n=a^{y_n}.$$

ამ ტოლობათა გადამრავლებით მივიღებთ

$$x_1x_2\ldots x_n=a^{y_1+y_2+\cdots+y_n},$$

საიდანაც

$$\log_a(x_1x_2\ldots x_n)=y_1+y_2+\cdots+y_n,$$

ე. ი.

$$\log_a(x_1x_2\ldots x_n)=\log_a x_1+\log_a x_2+\cdots+\log_a x_n .$$

თეორემა 2. ორი დადებითი რიცხვის ფარდობის ლოგარითმი უდრის გასაყოფისა და გამყოფის ლოგარითმების სხვაობას, ე. ი.

$$\log_a \frac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2 , \text{ სადაც } x_1>0 , \ x_2>0 .$$

დამტკიცება. ვთქვათ

$$\log_a x_1=y_1 , \ \log_a x_2=y_2 .$$

ლოგარითმის განსაზღვრების თანახმად

$$x_1=a^{y_1} , \ x_2=a^{y_2} .$$

ამ ტოლობათა გაყოფით მივიღებთ

$$\frac{x_1}{x_2}=a^{y_1-y_2} ,$$

საიდანაც

$$\log_a \frac{x_1}{x_2}=y_1-y_2 ,$$

ე. ი.

$$\log_a \frac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2 .$$

თეორემა 3. დადებითფუძიანი ხარისხის ლოგარითმი ხარისხის მაჩვენებლისა და ხარისხის ფუძის ლოგარითმის ნამრავლის ტოლია, ე. ი.

$$\log_a x^k=k\log_a x , \text{ სადაც } x>0 .$$

დამტკიცება. ვთქვათ

$$\log_a x=y ,$$

მაშინ ლოგარითმის განსაზღვრების თანახმად

$$x=a^y .$$

ამ ტოლობის ორივე მხარის k ხარისხში ახარისხებით მივიღებთ:

$$x^k=a^{ky} ,$$

საიდანაც

$$\log_a x^k=ky ,$$

ე. ი.

$$\log_a x^k=k\log_a x .$$

თუ რაიმე გამოსახულება შედგენილია დადებითი რიცხვებისაგან გამრავლების, გაყოფისა და ახარისხების

ოპერაციებით, მაშინ ზემოთ დამტკიცებული თვისებების თანახმად შეიძლება ამ გამოსახულების ლოგარითმის გამოსახვა მასში შემავალი რიცხვების ლოგარითმების საშუალებით. ასეთ გარდაქმნას გალოგარითმება ეწოდება.

მაგალითი. გავალოგარითმოთ a ფუძით $\dfrac{7a^2\sqrt{x}}{3b^3}$ გამოსახულება, სადაც $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $x>0$.

$$\log_a \frac{7a^2\sqrt{x}}{3b^3} = \log_a\left(7a^2\sqrt{x}\right) - \log_a\left(3b^3\right) = \log_a 7 + \log_a a^2 +$$

$$+\log_a x^{1/2} - \log_a 3 - \log_a b^3 = \log_a 7 + 2 +$$

$$+\frac{1}{2}\log_a x - \log_a 3 - 3\log_a b\,.$$

ხშირად საჭიროა გალოგარითმების შებრუნებული გარდაქმნის შესრულება, ე. ი. გამოსახულების ლოგარითმის საშუალებით თვით გამოსახულების პოვნა. ასეთ გარდაქმნას პოტენცირება ეწოდება.

მაგალითი. ვიპოვოთ x, თუ $\log_a x = 2\log_a b - \dfrac{1}{3}\log_a c + 1$.

$$\log_a x = \log_a b^2 - \log_a c^{1/3} + \log_a a = \log_a \frac{ab^2}{\sqrt[3]{c}}\,,$$

ე. ი.

$$\log_a x = \log_a \frac{ab^2}{\sqrt[3]{c}}\,.$$

აქედან

$$x = \frac{ab^2}{\sqrt[3]{c}}\,.$$

§73. ლოგარითმის ერთი ფუძიდან მეორეზე გადასვლა

გამოსახულებების გარდაქმნის დროს ხშირად საჭიროა ლოგარითმის ერთი ფუძიდან მეორეზე გადასვლა, რაც შესაძლებელია შემდეგი ფორმულის საშუალებით

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}\,,\quad (b>0)\,. \tag{1}$$

დავამტკიცოთ ეს ფორმულა.

გავალოგარითმოთ c ფუძით ძირითადი ლოგარითმული იგივეობა

$$a^{\log_a b} = b \ .$$

გვექნება

$$\log_c\left(a^{\log_a b}\right) = \log_c b \ .$$

აქედან

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b \ ,$$

საიდანაც

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \ .$$

თუ (1) ფორმულაში c–ს შევცვლით b–თი, მივიღებთ

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \ .$$

თუ მიღებულ ფორმულაში a–ს შევცვლით a^k–თი, გვექნება:

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{\log_b a^k} = \frac{1}{k \log_b a} = \frac{1}{k} \log_a b \ .$$

ამრიგად

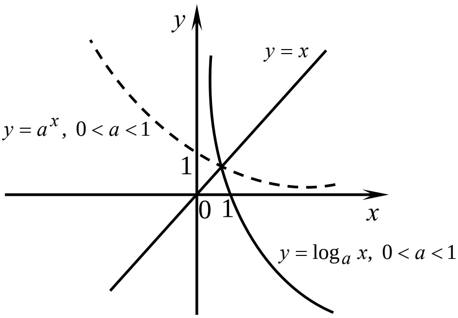
$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b \ , \ \ (b > 0, \ k \neq 0).$$

§74. ლოგარითმული ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

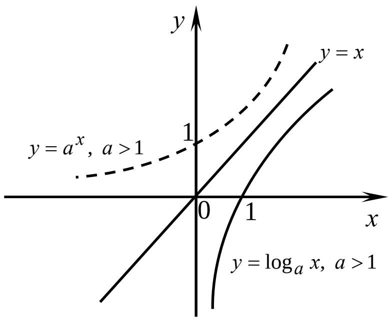
ვინაიდან $y = a^x$ ფუნქცია $(a > 0, \ a \neq 1)$ მონოტონურია, ამიტომ მას გააჩნია შექცეული ფუნქცია. $y = a^x$ ტოლობიდან განსაზღვრებით $x = \log_a y$. თუ ამ ტოლობაში ცვლადებს გადავანაცვლებთ, მივიღებთ $y = \log_a x$, რომელიც წარმოადგენს $y = a^x$ ფუნქციის შექცეულ ფუნქციას.

$y = \log_a x$ სახის ფუნქციას $(a > 0, \ a \neq 1)$, ლოგარითმული ფუნქცია ეწოდება. რადგან ლოგარითმული ფუნქცია წარმოადგენს მაჩვენებლიანი ფუნქციის შექცეულ ფუნქციას, ამიტომ $y = \log_a x$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია $y = a^x$ ფუნქციის გრაფიკისა $y = x$ წრფის მიმართ (ნახ. 81, 82).

მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებებიდან გამომდინარეობს მისი შექცეული ლოგარითმული ფუნქციის თვისებები:



ნახ. 81



ნახ. 82

1. ლოგარითმული ფუნქციის განსაზღვრის არეა $]0;+\infty[$, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე კი– R .

2. ლოგარითმული ფუნქციის გრაფიკი Ox ღერძს კვეთს (1;0) წერტილში.

3. თუ $0<a<1$, მაშინ $y=\log_a x$ ფუნქცია კლებადია, ხოლო თუ $a>1$–ზრდადი.

§75. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებები

1. განტოლებას, რომელიც ცვლადს შეიცავს ხარისხის მაჩვენებელში, მაჩვენებლიანი განტოლება ეწოდება.

$a^x=b \quad (a>0,\ a\neq 1)$ წარმოადგენს უმარტივეს მაჩვენებლიან განტოლებას. როცა $b>0$, ამ განტოლების ამონახსნს

წარმოადგენს $x=\log_a b$, ხოლო, როცა $b\le 0$ განტოლებას ამონახსნი არ აქვს.

ხშირად მაჩვენებლიანი განტოლება დაიყვანება $a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}$ $(a>0,\ a\ne 1)$ სახის განტოლებაზე, რომელიც $f(x)=\varphi(x)$ განტოლების ტოლფასია.

მაგალითი. ამოვხსნათ განტოლება

$$7^{x^2-\frac{5}{2}}=7\sqrt{7}.$$

$$7^{x^2-\frac{5}{2}}=7\sqrt{7}\Leftrightarrow 7^{x^2-\frac{5}{2}}=7^{\frac{3}{2}}\Leftrightarrow x^2-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x^2=4.$$

აქედან

$$x_1=-2,\ \ x_2=2.$$

2. განტოლებას, რომელიც ცვლადს შეიცავს ლოგარითმის ნიშნის ქვეშ, ლოგარითმული განტოლება ეწოდება.

$\log_a x=b$ $(a>0,\ a\ne 1)$ წარმოადგენს უმარტივეს ლოგარითმულ განტოლებას, რომლის ამონახსნია $x=a^b$.

ხშირად ლოგარითმული განტოლება დაიყვანება $\log_a f(x)=\log_a \varphi(x)$ $(a>0,\ a\ne 1)$ სახის განტოლებაზე. ასეთ შემთხვევაში საკმარისია ამოიხსნას $f(x)=\varphi(x)$ განტოლება და თითოეული ამონახსნი შემოწმდეს საწყის განტოლებაში ჩასმით.

მაგალითი. ამოვხსნათ განტოლება

$$\lg(x-2)+\lg(x+3)=\lg(5x-6).$$

ნამრავლის ლოგარითმის თვისების გამოყენებით გვექნება

$$\lg(x-2)(x+3)=\lg(5x-6),$$

აქედან

$$(x-2)(x+3)=5x-6\Leftrightarrow x^2+x-6=5x-6\Leftrightarrow x^2-4x=0,$$

ე. ი.

$$x_1=0,\ \ x_2=4.$$

საწყის განტოლებაში ჩასმით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მოცემულ განტოლებას აქვს მხოლოდ ერთი ამონახსნი $x=4$.

§76. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული უტოლობები

1. უტოლობას, რომელიც ცვლადს შეიცავს ხარისხის მაჩვენებელში, მაჩვენებლიანი უტოლობა ეწოდება.

$a^x > b$ და $a^x < b$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ წარმოადგენენ უმარტივეს მაჩვენებლიან უტოლობებს. განვიხილოთ თითოეული მათგანი:

ა) $a^x > b$.

თუ $b \leq 0$, მაშინ ამ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა R.

თუ $b > 0$, მაშინ a^x ფუნქციის მონოტონურობის გამო $x < \log_a b$, როდესაც $0 < a < 1$ და $x > \log_a b$, როდესაც $a > 1$.

ბ) $a^x < b$.

თუ $b \leq 0$, მაშინ ამ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელია.

თუ $b > 0$, მაშინ a^x ფუნქციის მონოტონურობის გამო $x > \log_a b$, როდესაც $0 < a < 1$ და $x < \log_a b$, როდესაც $a > 1$.

$a^{f(x)} < a^{\varphi(x)}$ სახის უტოლობის ამოხსნა $(a > 0,\ a \neq 1)$ აგრეთვე დამყარებულია მაჩვენებლიანი ფუნქციის მონოტონურობაზე. კერძოდ, თუ $0 < a < 1$, მაშინ მაჩვენებლიანი ფუნქცია კლებადია და

$$a^{f(x)} < a^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) > \varphi(x),$$

ხოლო, თუ $a > 1$, მაშინ მაჩვენებლიანი ფუნქცია ზრდადია და

$$a^{f(x)} < a^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) < \varphi(x).$$

მაგალითი 1. ამოვხსნათ უტოლობა

$$2^{x^2-2x+4} > 2^{3x-2}.$$

$$2^{x^2-2x+4} > 2^{3x-2} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 > 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0.$$

აქედან

$$x \in]-\infty;2[\cup]3;+\infty[.$$

მაგალითი 2. ამოვხსნათ უტოლობა

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-x+4} > \left(\frac{3}{7}\right)^{5x-4}.$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-x+4} > \left(\frac{3}{7}\right)^{5x-4} \Leftrightarrow x^2 - x + 4 < 5x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 < 0.$$

აქედან

$$x \in]2;4[.$$

2. უტოლობას, რომელიც ცვლადს შეიცავს ლოგარითმის ნიშნის ქვეშ, ლოგარითმული უტოლობა ეწოდება.

$\log_a x > b$ და $\log_a x < b$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ წარმოადგენენ უმარტივეს ლოგარითმულ უტოლობებს. განვიხილოთ თითოეული მათგანი:

ა) $\log_a x > b$.

თუ $0 < a < 1$, მაშინ $\log_a x$ ფუნქცია კლებადია, მისი განსაზღვრის არეა $]0;+\infty[$, ამიტომ $0 < x < a^b$.

თუ $a > 1$, მაშინ $\log_a x$ ფუნქცია ზრდადია, ამიტომ $x > a^b$.

ბ) $\log_a x < b$.

თუ $0 < a < 1$, მაშინ $\log_a x$ ფუნქცია კლებადია, ამიტომ $x > a^b$.

თუ $a > 1$, მაშინ $\log_a x$ ფუნქცია ზრდადია, მისი განსაზღვრის არეა $]0;+\infty[$, ამიტომ $0 < x < a^b$.

$\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$ სახის უტოლობის ამოხსნა $(a > 0,\ a \neq 1)$ აგრეთვე დამყარებულია ლოგარითმული ფუნქციის მონოტონურობაზე. კერძოდ, თუ $0 < a < 1$, მაშინ ლოგარითმული ფუნქცია კლებადია და

$$\log_a f(x) < \log_a \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > \varphi(x) \\ f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > \varphi(x) \\ \varphi(x) > 0, \end{cases}$$

ხოლო, თუ $a > 1$, ლოგარითმული ფუნქცია ზრდადია და

$$\log_a f(x) < \log_a \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < \varphi(x) \\ f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < \varphi(x) \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

მაგალითი 3. ამოვხსნათ უტოლობა

$$\log_5 (x+6)(x-2) < \log_5 3x.$$

$$\log_5 (x+6)(x-2) < \log_5 3x \Leftrightarrow \begin{cases} (x+6)(x-2) < 3x \\ (x+6)(x-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 12 < 0 \\ (x+6)(x-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)(x-3) < 0 \\ (x+6)(x-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 3 \\ x < -6 \text{ ან } x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]2;3[.$$

§77. კომბინატორიკის ელემენტები

ხშირად საჭიროა სასრული სიმრავლის ელემენტებისაგან სხვადასხვა კომბინაციის შედგენა და რაიმე წესით შედგენილი ყველა შესაძლო კომბინაციის რაოდენობის გამოანგარიშება. ასეთ ამოცანებს კომბინატორულს უწოდებენ, ხოლო მათემატი-

კის ნაწილს, რომელიც დასახელებული ამოცანების ამოხსნას შეისწავლის–კომბინატორიკას.

გადანაცვლება. ერთიდაიგივე სასრული სიმრავლის ელემენტები შეიძლება დავალაგოთ რიგით იმის მიხედვით, თუ სიმრავლის რომელ ელემენტს ავირჩევთ პირველ ელემენტად, რომელს–მეორედ და ა. შ. დალაგებული სიმრავლის აღსანიშნავად მის ელემენტებს მოვათავსებთ მრგვალ ფრჩხილებში მოცემული რიგის მიხედვით.

განსაზღვრება. სასრულ სიმრავლეში დადგენილ რიგს მისი ელემენტების გადანაცვლება ეწოდება.

n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო გადანაცვლება-თა რიცხვი P_n–ით აღინიშნება. ცხადია იგი დამოკიდებულია მხოლოდ სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობაზე.

თუ სიმრავლე შედგება ერთი ელემენტისაგან, მაშინ შესაძლებელია ერთადერთი გადანაცვლება, ე. ი. $P_1=1$. თუ სიმრავლე შედგება ორი ელემენტისაგან–$\{a,b\}$, მაშინ შესაძლე-ბელია მხოლოდ ორი გადანაცვლება: (a,b) და (b,a), ე. ი. $P_2=2$. თუ სიმრავლე შედგება სამი ელემენტისაგან–$\{a,b,c\}$, მაშინ შესაძლებელია მხოლოდ ექვსი გადანაცვლება: (a,b,c), (a,c,b), (c,a,b), (c,b,a), (b,a,c) და (b,c,a), ე. ი. $P_3=6$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ $P_1=1$, $P_2=1\cdot 2$, $P_3=1\cdot 2\cdot 3$. მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით დავამ-ტკიცოთ, რომ

$$P_n=1\cdot 2\cdot 3\ldots n\,. \tag{1}$$

როგორც ზემოთ ვნახეთ, როდესაც $n=1$ ეს ფორმულა მარ-თებულია. დავუშვათ, რომ იგი მართებულია $n=k$–სათვის, ე. ი. $P_k=1\cdot 2\cdot 3\ldots k$, ახლა ვაჩვენოთ, რომ ფორმულა მართებულია $n=k+1$–სათვის, ე. ი.

$$P_{k+1}=1\cdot 2\cdot 3\ldots k(k+1).$$

მართლაც, იმისათვის, რომ მივიღოთ $k+1$ ელემენტისაგან შედგენილი ყველა შესაძლო გადანაცვლება, საჭიროა თითოეულ k ელემენტიან ადრინდელ გადანაცვლებას მივუერთოთ ახალი ($k+1$)-ე ელემენტი, რომელიც შეიძლება დავაყენოთ 1-ელ, მე-2, მე-3,…,k-ურ და ($k+1$)–ე ადგილზე. ამრიგად, ყოველი k ელემენტიანი გადანაცვლება წარმოქმნის $k+1$ ახალ გადანაცვლებას, ამიტომ $k+1$ ელემენტიანი სიმრავლის ყოველ შესაძლო გადანაცვლებათა რიცხვი იქნება $P_k\cdot(k+1)$, ე. ი.

$$P_{k+1}=P_k(k+1)=1\cdot 2\cdot 3\dots k(k+1).$$

ამრიგად, მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის თანახმად (1) ფორმულა მართებულია ნებისმიერი n–ისათვის.

$1\cdot 2\cdot 3\dots n$ ნამრავლი $n!$ სიმბოლოთი აღინიშნება (იკითხება "n-ფაქტორიალი"), მიღებულია აგრეთვე, რომ 0!=1 და 1!=1. ამიტომ n ელემენტიანი სიმრავლის გადანაცვლებათა რიცხვის გამოსათვლელი ფორმულა შეიძლება შემდეგნაირად ჩაიწეროს

$$P_n=n!.$$

წყობა. განსაზღვრება. n ელემენტიანი სიმრავლის ნებისმიერ m ელემენტიან დალაგებულ ქვესიმრავლეს $(m\le n)$ ეწოდება წყობა n ელემენტისაგან m–ად.

n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო m ელემენტიან წყობათა რიცხვი A_n^m სიმბოლოთი აღინიშნება.

ცხადია, რომ $A_n^0=1$, რადგან არსებობს ერთადერთი ცარიელი ქვესიმრავლე.

ადვილი მისახვედრია, რომ $A_n^1=n$. მართლაც, n-დან ერთი ელემენტი n ხერხით შეიძლება ავირჩიოთ, ხოლო ამ ერთი ელემენტისაგან მიიღება ერთადერთი დალაგებული სიმრავლე.

დავამტკიცოთ ახლა, რომ, როცა $1\le m<n$

$$A_n^{m+1}=(n-m)A_n^m.$$

იმისათვის, რომ n ელემენტისაგან შევადგინოთ ყველა შესაძლო $m+1$ ელემენტიანი წყობა, შეიძლება მოვიქცეთ შემდეგნაირად: ჯერ ავარჩიოთ რაიმე m რაოდენობის ელემენტი და მოვათავსოთ ისინი პირველ m ადგილზე, ამის შესრულება შეიძლება A_n^m ხერხით. $(m+1)$-ე ადგილზე შეიძლება მოვათავსოთ ნებისმიერი ელემენტი დარჩენილი $n-m$ ელემენტიდან. ამრიგად, ყოველი m ელემენტიანი წყობა წარმოქმნის $n-m$ რაოდენობის $m+1$ ელემენტიან წყობას. მაშასადამე, სულ გვექნება $(n-m)A_n^m$ ხერხი.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $A_n^1=n$ და ვისარგებლებთ დამტკიცებული ფორმულით, გვექნება:

$$A_n^1=n,$$
$$A_n^2=(n-1)A_n^1=n(n-1),$$
$$A_n^3=(n-2)A_n^2=n(n-1)(n-2)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A_n^m=(n-m+1)A_n^{m-1}=n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1).$$

ვინაიდან

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}\,.$$

მივიღებთ

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}\,.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$A_n^n=P_n=n!\,.$$

ჯუფთება. განსაზღვრება. n ელემენტიანი სიმრავლის ნებისმიერ m ელემენტიან ქვესიმრავლეს $(m\le n)$ ეწოდება ჯუფთება n ელემენტიდან m–ად.

ცხადია, რომ მოცემული სიმრავლის ორი m ელემენტიანი ჯუფთება სხვადასხვაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ისინი განხვავდებიან ერთი ელემენტით მაინც, ხოლო m ელემენტიანი წყობები რომ განსხვავდებოდნენ, საკმარისია ისინი განსხვავდებოდნენ დალაგებით.

n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო m ელემენტიან ჯუფთებათა რიცხვი C_n^m სიმბოლოთი აღინიშნება.

დავამტკიცოთ, რომ

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{P_m}\,.$$

იმისათვის, რომ მოცემული n ელემენტისაგან შევადგინოთ ყველა შესაძლო m ელემენტიანი წყობა, შეიძლება მოვიქცეთ შემდეგნაირად: ჯერ n ელემენტიდან გამოვყოთ რაიმე m ელემენტი, რაც C_n^m ხერხით შეიძლება შესრულდეს, გამოყოფილი m ელემენტი დავალაგოთ, რაც P_m ხერხით შეიძლება შესრულდეს. ამგვარად მივიღებთ $C_n^m P_m$ დალაგებულ სიმრავლეს, ე. ი.

$$A_n^m=C_n^m P_m\,,$$

საიდანაც

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{P_m}\,.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}\quad \text{და}\quad P_m=m!$$

მივიღებთ

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ ჯუფთებათა რიცხვის შემდეგი თვისებები:

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$;
2. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$;
3. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

§78. ნიუტონის ბინომიალური ფორმულა

მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური n –ისათვის მართებულია ნიუტონის შემდეგი ფორმულა:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^m a^{n-m} b^m + \cdots + C_n^n b^n.$$

როცა $n=1$, $n=2$ და $n=3$ ფორმულა მართებულია, რადგან:

$$(a+b)^1 = a+b = C_1^0 a + C_1^1 b;$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3.$$

დავუშვათ ახლა, რომ ნიუტონის ფორმულა მართებულია $n = k$ – სათვის, ე. ი.

$$(a+b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \cdots + C_k^{k-1} ab^{k-1} + C_k^k b^k$$

და ვაჩვენოთ, რომ იგი მართებულია $n = k+1$–სათვისაც, მართლაც

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k (a+b) = (C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \cdots + C_k^{k-1} ab^{k-1} +$$
$$+ C_k^k b^k)(a+b) = C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + C_k^2 a^{k-1} b^2 + \cdots + C_k^{k-1} a^2 b^{k-1} +$$
$$+ C_k^k ab^k + C_k^0 a^k b + C_k^1 a^{k-1} b^2 + C_k^2 a^{k-2} b^3 + \cdots + C_k^{k-1} ab^k +$$
$$+ C_k^k b^{k+1} = C_k^0 a^{k+1} + \left(C_k^0 + C_k^1\right) a^k b + \left(C_k^1 + C_k^2\right) a^{k-1} b^2 + \cdots +$$
$$+ \left(C_k^{k-1} + C_k^k\right) ab^k + C_k^k b^{k+1}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $C_k^0 = C_{k+1}^0$, $C_k^k = C_{k+1}^{k+1}$ და გამოვიყენებთ ფორმულას

$$C_k^m + C_k^{m+1} = C_{k+1}^{m+1}$$

მივიღებთ:

$$(a+b)^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + C_{k+1}^2 a^{k-1} b^2 + \cdots + C_{k+1}^k ab^k + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1}$$

ამრიგად, მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის თანახმად ნიუტონის ფორმულა მართებულია ნებისმიერი ნატურალური $n-$ ისათვის.

ნიუტონის ფორმულის C_n^m კოეფიციენტებს ბინომურ კოეფიციენტებს უწოდებენ.

განვიხილოთ ნიუტონის ფორმულიდან გამომდინარე ძირითადი შედეგები:

1. ნიუტონის ფორმულის მიხედვით $(a+b)^n-$ის დაშლაში შედის $n+1$ შესაკრები.

2. ნიუტონის ფორმულაში $a-$ს ხარისხის მაჩვენებელი კლებულობს $n-$დან 0-მდე, ხოლო $b-$ს ხარისხის მაჩვენებელი იზრდება 0-დან $n-$მდე. დაშლის ნებისმიერ შესაკრებში $a-$სა და $b-$ს ხარისხის მაჩვენებელთა ჯამი $n-$ის, ე. ი. ბინომის ხარისხის მაჩვენებლის ტოლია.

3. დაშლის ბოლოებიდან თანაბრად დაშორებული ბინომური კოეფიციენტები თანატოლია (რადგან $C_n^m = C_n^{n-m}$).

4. ნიუტონის ფორმულაში შესაკრებების ზოგადი სახით ჩაწერისათვის მოსახერხებელი იქნება, თუ $(k+1)-$ე შესაკრებს აღვნიშნავთ T_k-თი, მაშინ:

$$T_k = C_n^k a^{n-k} b^k\ ,\ \ k = 0,1,\ldots,n\ .$$

§79. სტატისტიკის ელემენტები

სხვადასხვა სახის დაკვირვებების შედეგად მიღებულ მონაცემებს, რომლებიც რიცხვებით არის წარმოდგენილი, სტატისტიკური მონაცემები ეწოდება.

ეს მონაცემები შეიძლება ეხებოდეს თითქმის ყველაფერს, რაც დაკვირვების საგანი შეიძლება იყოს. მაგალითად სპორტს, ხელოვნებას, ბიზნესს, კლიმატს ქვეყნისა და ხალხის ცხოვრებას, მოსწავლის სწავლას სკოლაში, ... ე.ი. მონაცემები არის ცნობები, ან მახასიათებელი თვისებები, რომლებიც აუცილებელია რაიმე დასკვნის გამოსატანად.

სწორედ, ასეთი მონაცემების შეგროვებას, დამუშავებას (განხილვას), ხელსაყრელი ფორმით წარმოდგენას და გამოყენებას შეისწავლის სტატისტიკა, ე.ი. სტატისტიკის საგანია რაიმე მოვლენის (პროცესის) შესახებ ინფორმაციის შეგროვება, დამუშავება და გამოყენება.

მაგალითად სამედიცინო დასკვნა: „მოწევა საშიშია ჯანმრთელობისათვის“ - თამბაქოს მწეველი ადამიანების ჯანმრთე-

ლობის შესახებ სათანადო მონაცემების შეგროვებისა და დამუშავების შედეგია, ე.ი. სტატისტიკური გამოკვლევების ჩატარების შედეგია.

სტატისტიკის გამოყენების თვალსაჩინო მაგალითია სასუქების გამოყენების საკითხის შესწავლა სოფლის მეურნეობაში. ამ შემთხვევაში გროვდება მონაცემები გამოყენებული სასუქის ოდენობისა და მოსავლიანობის ზრდას შორის დამოკიდებულების შესახებ. აქ შეისწავლება აგრეთვე საკითხი, თუ როგორ აისახება მოსავლიანობის ამ გზით გაზრდა პროდუქციის ხარისხზე. ამ მონაცემების ანალიზი ხელს უწყობს სასუქის ოპტიმალური ოდენობის დადგენას.

ინფორმაციის შეგროვება ხშირად შერჩევის წესით შეიძლება მოხდეს. მაგალითად, არჩევნების შედეგების პროგნოზირება ხშირად ამომრჩეველთა ნაწილის გამოკითხვით ხდება. ეს წესი გამოიყენება აგრეთვე გამოშვებულ პროდუქციაზე მოთხოვნის განსაზღვრის მიზნით. შერჩევითი გამოკითხვით მონაცემების შეგროვება გარკვეულ წესებს უნდა ექვემდებარებოდეს.

რიცხვით მონაცემთა რაიმე ერთობლიობის დასახასიათებლად, მონაცემთა ერთობლიობის შესადარებლად, გამოიყენება შემდეგი რიცხვითი მახასიათებლები:

1) სიხშირე – ცდათა მოცემულ სერიალში რაღაც მოვლენის მოხდენათა რაოდენობა.

2) ფარდობითი სიხშირე – მოვლენის სიხშირის შეფარდება ცდათა რაოდენობასთან.

3) დიაპაზონი (გაბნევის დიაპაზონი, განი) – რიცხვით მონაცემთა ერთობლიობაში უდიდეს და უმცირეს რიცხვებს შორის სხვაობა. ე. ი. მონაცემთა გაბნევის დიაპაზონი მონაცემთა გაფანტულობის საზომია.

4) მონაცემთა საშუალო – ყველა დასახელებული რიცხვის ჯამისა და მათი რაოდენობის შეფარდება.

5) მოდა – რიცხვი (რიცხვები), რომელიც ამ მონაცემებში ყველაზე ხშირად გვხვდება. თუ ყველა მონაცემი განსხვავებულია, მაშინ ამ ერთობლიობას მოდა არა აქვს.

6) მედიანა – რიცხვით მონაცემთა მედიანა არის ზრდის მიხედვით დალაგებული (რომელსაც ვარიაციული მწკრივი ეწოდება) ამ მონაცემების შუა რიცხვი, თუ ერთობლიობაში რიცხვების რაოდენობა კენტია; ხოლო თუ ერთობლიობაში რიცხვების რაოდენობა ლუწია, მაშინ მედიანა ორი შუა რიცხვის არითმეტიკული საშუალოა.

7) რიცხვით მონაცემთა სტანდარტული გადახრა, ანუ საშუალო კვადრატული გადახრა – მონაცემთა თითოეული

რიცხვისა და ამ მონაცემთა საშუალოს სხვაობის კვადრატების საშუალოდან კვადრატული ფესვი.

სტანდარტული გადახრა საშუალოს მიმართ მონაცემთა გაფანტულობის საზომია და საშუალოსთან მონაცემების „თავმოყრას" ახასიათებს (ე.ი. მონაცემთა საშუალოდან ამ მონაცემების გადახრას „ზომავს").

ვთქვათ რაიმე ორი ექსპერიმენტის რიცხვითი მონაცემებია (რომელიც დალაგებულია ზრდის მიხედვით):

I. 5; 5; 5; 6; 8; 8; 12;   II. 6; 8; 8; 10; 11; 11.

ამ მონაცემთა სიხშირეთა და ფარდობითი სიხშირეთა ცხრილია:

I.

	5	6	8	12
სიხშირე	3	1	2	1
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

II.

	6	8	10	11
სიხშირე	1	2	1	2
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

პირველის დიაპაზონია 7; მეორის – 5.

ადვილია შემოწმება, რომ ამ მონაცემთა საშუალოებია: I – 7; II – 9.

მოდაა: I – 5; II – 8 და 11.

მედიანა: I – 6;   II – 9.

ახლა ვიპოვოთ ამ მონაცემთა სტანდარტული გადახრა. მონაცემთა თითოეული რიცხვისა და საშუალოს სხვაობების სიხშირეთა ცხრილია

I.

სხვაობები	–2	–1	1	5
სიხშირეები	3	1	2	1

II.

სხვაობები	–3	–1	1	2
სიხშირეები	1	2	1	2

სხვაობების კვადრატების სიხშირეთა ცხრილია

I.

სხვაობების კვადრატი	4	1	1	25
სიხშირეები	3	1	2	1

II.	სხვაობების კვადრატი	9	1	1	4
	სიხშირეები	1	2	1	2

კვადრატების საშუალოა I – $\frac{40}{7}$, II – $\frac{10}{3}$.

ამდენად სტანდარტული გადახრებია: I – $\sqrt{\frac{40}{7}} \approx 2{,}4$, II – $\sqrt{\frac{10}{3}} \approx 1{,}8$.

სტატისტიკური მონაცემების თვალსაჩინოდ (ხელსაყრელი ფორმით) წარმოდგენისათვის გამოიყენება სხვადასხვა ხერხი – ცხრილური, წერტილოვანი, ხაზოვანი (პოლიგონი), სვეტოვანი (ჰორიზონტალური ან ვერტიკალური) და წრიული დიაგრამები.

მაგალითი. ქ. თბილისში შემთხვევით შემოწმებულ 12 ოჯახში ბავშვთა რაოდენობების შესაბამისი მონაცემებია:

2, 1, 1, 3, 2, 2, 1, 1, 3, 4, 1, 4.

მონაცემები წარმოვადგინოთ წერტილოვანი, სვეტოვანი, ხაზოვანი და წრიული დიაგრამებით.

ამოხსნა. ამ მონაცემთა ვარიაციული მწკრივია

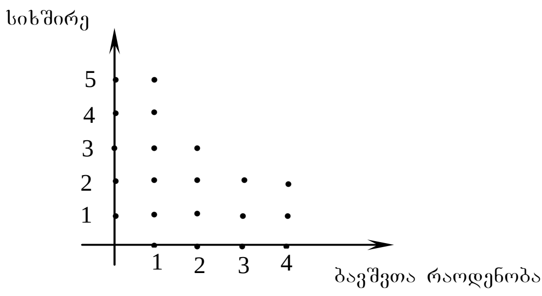
1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4

ხოლო სიხშირეთა ცხრილია

ბავშვთა რაოდენობა ოჯახში	1	2	3	4
სიხშირე	5	3	2	2

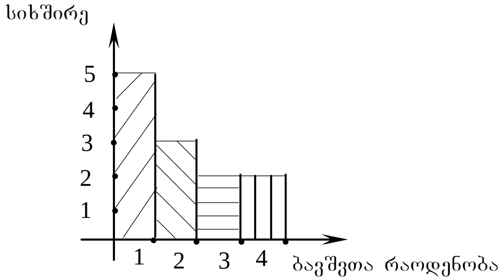
ამ მონაცემთა დიაგრამებია:

1) წერტილოვანი (ნახ. 83)



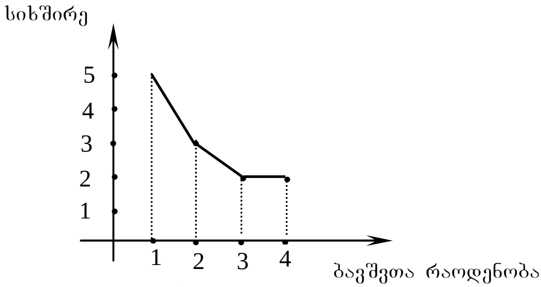
ნახ. 83

2) სვეტოვანი (ნახ. 84)



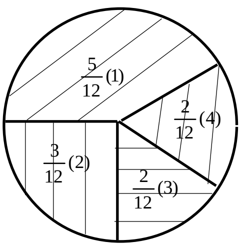
ნახ. 84

3) ხაზოვანი (ნახ. 85)



ნახ. 85

4) წრიული (ნახ. 86)



ნახ. 86

(1) – ერთ ბავშვიანი ოჯახების სექტორი

$$\frac{5}{12}\cdot 360° = 150°$$

(2) – ორ ბავშვიანი ოჯახების სექტორი

$$\frac{3}{12}\cdot 3600 = 90°$$

(3) – სამ ბავშვიანი ოჯახების სექტორი

$$\frac{2}{12}\cdot 360° = 60°$$

(4) – ოთხ ბავშვიანი ოჯახების სექტორი

$$\frac{2}{12}\cdot 360° = 60°$$

§80. ხდომილობის ალბათობა. ფარდობითი სიხშირე

ალბათობის თეორია არის მეცნიერება, რომელიც შეისწავლის მასობრივ შემთხვევით მოვლენათა რაოდენობრივი ხასიათის კანონზომიერებებს.

ალბათობის თეორიის პირველად ცნებას ხდომილობა წარმოადგენს.

მაგალითად, მონეტის აგდებისას შესაძლო შედეგი ორია: გერბი და საფასური. საფასური შეიძლება მოვიდეს ან შეიძლება არც მოვიდეს. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ საფასურის მოსვლა შემთხვევითი ხდომილობაა. ასევე, ერთი კამათლის გაგორებისას შესაძლო შედეგების რაოდენობა ექვსია. მაგრამ ბეში (5) შეიძლება მოვიდეს, შეიძლება არც მოვიდეს, ე.ი. ბეშის მოსვლა შემთხვევითი ხდომილობაა. შემთხვევითი ხდომილობაა აგრეთვე კამათელზე კენტი რიცხვის მოსვლა. მისი ხელშემწყობია მხოლოდ სამი შესაძლო შედეგი: 1-ის, 3-ისა და 5-ის მოსვლა.

ამრიგად, ხდომილობა შემთხვევითია თუ მას ერთსა და იმავე პირობებში შეიძლება ჰქონდეს ან არ ჰქონდეს ადგილი.

ზოგი ხდომილობა ისეთია, რომ მას აუცილებლად ექნება ადგილი, თუ ცდას ჩავატარებთ. ასეთ ხდომილობას აუცილებელ ხდომილობას უწოდებენ.

მაგალითად, თუ ყუთში მოთავსებულია მხოლოდ წითელი ფერის ბირთვები, მაშინ ცხადია, ხდომილობა – „ყუთიდან ამოღებული ბირთვი წითელი ფერისაა“ - იქნება აუცილებელი ხდომილობა.

ხდომილობას, რომელსაც არ შეიძლება ჰქონდეს ადგილი რაიმე ცდის ჩატარების დროს, შეუძლებელი ხდომილობა ეწოდება.

ყუთიდან ლურჯი ფერის ბირთვის ამოღება შეუძლებელი ხდომილობაა, თუ ყუთში მხოლოდ შავი ფერის ბირთვებია.

ერთი კამათლის გაგორებისას წინასწარ შეუძლებელია თქმა, რა რიცხვი მოვა, მაგრამ შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ თითოეული რიცხვის მოსვლა თანაბრადაა მოსალოდნელი (სავარაუდო). ასეთ შესაძლო შედეგებს თანაბრად მოსალოდნელი (ტოლშესაძლებელი, ტოლალბათური) ეწოდება. მონეტის აგდებისას გერბის მოსვლა, საფასურის მოსვლა-ტოლალბათური შესაძლო შედეგებია.

ვთქვათ ყუთში 30 წითელი და 3 ლურჯი ბურთია. თუ ყუთიდან შემთხვევით ამოვიღებთ ერთ ბურთს, მაშინ უფრო სავარაუდოა, უფრო მოსალოდნელია, რომ ამოღებული ბურთი წითელი იქნება. ამიტომ ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ

წითელი ბურთის ამოღება მეტალბათური ხდომილობაა, ლურჯი ბურთის ამოღება კი – ნაკლებალბათურია.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, მონეტის აგდებისას შესაძლო შედეგი ორია: გერბი ან საფასური. ერთ-ერთი აუცილებლად მოვა, მაგრამ ერთდროულად ორივეს მოსვლა შეუძლებელია. ასევე, ერთი კამათლის გაგორებისას შესაძლო შედეგების რაოდენობა ექვსია. ყოველი გაგორებისას ამ რიცხვებიდან მოვა მხოლოდ ერთი და მისი მოსვლა გამორიცხავს დანარჩენის მოსვლას. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ეს შესაძლო შედეგები წყვილ-წყვილად არათავსებადია (ურთიერთგამომრიცხავია).

ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ ცდებს, რომელთა შესაძლო შედეგები ტოლშესაძლებელი (ტოლალბათური) და წყვილ-წყვილად არათავსებადია.

როგორც აღვნიშნეთ ხდომილობა ცდის რაიმე სავარაუდო შედეგია. ერთი კამათლის გაგორებისას ექვსი შესაძლო შედეგია, მაგრამ ამ ექვსი შესაძლო შედეგის მიხედვით სხვადასხვა ხდომილობის დასახელება შეიძლება. მაგალითად: „ერთისა და ოთხის არ მოსვლა“ ხდომილობაა, რომლის ხელშემწყობია ოთხი შესაძლო შედეგი. სახელდობრ: 2-ის, 3-ის, 5-ისა და 6-ის მოსვლა.

ამრიგად, რაიმე ხდომილობის ხელშემწყობი შესაძლო შედეგია ისეთი შედეგი, რომლითაც მოცემული ხდომილობა ხორციელდება.

რაიმე ხდომილობის განხორციელების შესაძლებლობა რიცხვით გამოისახება. ამ რიცხვს ხდომილობის ალბათობა ეწოდება.

ვთქვათ, რაიმე ექსპერიმენტის (ცდის) შესაძლო შედეგების რაოდენობაა n, ხოლო რაიმე A ხდომილობის ხელშემწყობი შესაძლო შედეგების რაოდენობაა m, მაშინ A ხდომილობის ალბათობა, რომელიც აღინიშნება $p(A)$ სიმბოლოთი, გამოითვლება ფორმულით

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ m=0, მაშინ A შეუძლებელი ხდომილობაა და $P(A)=0$; ხოლო თუ $m=n$, მაშინ A აუცილებელი ხდომილობაა და $P(A)=1$. (P არის პირველი ასო სიტყვისა Probabilite, რომელიც ფრანგულად ალბათობას ნიშნავს).

მონეტის აგდებისას გერბის მოსვლის ალბათობაა $\frac{1}{2}$ (შესაძლო შედეგია ორი, მათგან ხელშემწყობია ერთი).

კამათლის გაგორებისას სამისა და ხუთის არ მოსვლის ალბათობაა $\frac{2}{3}$ (შესაძლო შედეგია ექვსი, მათგან ხელშემწყობია ოთხი).

ცხადია, ნებისმიერი A ხდომილობისათვის $0 \le m \le n$, ამიტომ $0 \le P(A) \le 1$.

ამრიგად, თუ რაიმე ცდის შესაძლო შედეგების სიმრავლე სასრულია და ისინი ტოლშესაძლებელია (ტოლალბათურია), მაშინ ცდის ჩაუტარებლადაც შეიძლება ვიპოვოთ, ამ შედეგების მიხედვით, დასახელებული რაიმე ხდომილობის ალბათობა. ე.ი. ალბათობა არის რიცხვი, რომლითაც ცდის რაიმე შედეგის განხორციელების შანსი წარმოიდგინება.

ცდათა მოცემულ სერიალში A ხდომილობის მოხდენათა რაოდენობას A ხდომილობის სიხშირე ეწოდება.

A ხდომილობის სიხშირის შეფარდებას ცდათა რაოდენობასთან A ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე ეწოდება.

თუ ცდათა რაოდენობაა n, ხოლო მოხდენათა სიხშირეა m, მაშინ ფარდობითი სიხშირე $P_n(A)$ სიმბოლოთი აღინიშნა, ე.ი.

$$P_n(A) = \frac{m}{n}.$$

ხდომილობის ალბათობის განმსაზღვრელი ფორმულა არ მოითხოვს ცდების რეალურ ჩატარებას. თუმცა, ცდების ჩატარებით შეიძლება შევამოწმოთ თეორიულად მიღებული რიცხვების კანონზომიერება.

ფარდობითი სიხშირით შეიძლება შეფასდეს ხდომილობის ალბათობა. მას სტატისტიკურ ალბათობას უწოდებენ. ეს მეთოდი გამოიყენება მაშინ, როცა შეუძლებელია მოცემული ხდომილობის სასურველი (ხელშემწყობი) შედეგების რაოდენობის მითითება.

§81. ელემენტარულ ხდომილობათა სრული სისტემა (ხდომილობათა სივრცე). ხდომილობათა შედარება

რაიმე ცდის ყველა იმ შესაძლო შედეგს, რომლებიც წყვილ-წყვილად არათავსებადია, ამ ცდის ელემენტარული ხდომილობები ეწოდება. ელემენტერული ხდომილობების სიმრავლეს კი

ელემენტარულ ხდომილობათა სრული სისტემა (ხდომილობათა სივრცე).

შევნიშნოთ, რომ ამ განსაზღვრებაში არ მოითხოვება ხდომილობათა ტოლშესაძლებლობა.

მოვიყვანოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. მონეტის აგდების ცდის შესაბამისი ელემენტარულ ხდომილობათა სრული სისტემაა სიმრავლე {გ; ს}, სადაც „გ“ აღნიშნავს გერბს, ხოლო „ს“- საფასურს.

მაგალითი 2. კამათლის გაგორებისას ცდის შესაბამისი ელემენტარულ ხდომილობათა სრული სისტემაა სიმრავლე {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

მაგალითი 3. ორი მონეტის აგდებისას ელემენტარულ ხდომილობათა სრული სისტემაა: {გგ, გს, სგ, სს}, აქ ყოველ წყვილში პირველი ასო ერთ-ერთი მონეტის აგდების შესაძლო შედეგია, მეორე ასო კი მეორე მონეტისა.

მაგალითი 4. ვთქვათ, ექსპერიმენტია ორი სხვადასხვა (წითელი და თეთრი) კამათლის გაგორება და მოსულ რიცხვებზე დაკვირვება. ამოვწეროთ ამ ცდასთან დაკავშირებული ელემენტარულ ხდომილობათა სრული სისტემა (სივრცე).

წ \ თ	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

აქ, მაგალითად, (5;3) წყვილი შეესაბამება ელემენტარულ ხდომილობას: წითელ კამათელზე 5 მოვიდა, თეთრზე კი 3.

ამ ექსპერიმენტის ხდომილობათა სრული სისტემა შეიძლება ჩავწეროთ ასე

$$S = \{(x; y);\ 1 \le x \le 6,\ 1 \le y \le 6\}.$$

აქედან ჩანს, რომ შედეგების რაოდენობაა 6·6=36. ამიტომ ყოველი ელემენტარული ხდომილობის ალბათობაა $\frac{1}{36}$.

ამ ექსპერიმენტთან დაკავშირებით განვიხილოთ შემდეგი ამოცანები:

1) რას უდრის „წყვილის“ (კამათელზე ერთნაირი რიცხვების) მოსვლის ალბათობა?

ამ ხდომილობის შესაბამისი ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლეა:

$$A=\{(1;1),\ (2;2),\ (3;3),\ (4;4),\ (5;5),\ (6;6)\}.$$

A არის S-ის ქვესიმრავლე $(A\subset S)$. ცხადია, A ხდომილობის ალბათობაა $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

2) განვიხილოთ ხდომილობები: A იყოს ხდომილობა „მოსულ $(x;y)$ წყვილში $x+y=9$“, B – „მოსულ $(x;y)$ წყვილში $x+y<13$“; C – „მოსულ $(x;y)$ წყვილში $x+y\geq 15$“. მაშინ

$$A=\{(3;6),\ (4;5),\ (5;4),\ (6;3)\},\ B=S,\ \ C=\varnothing.$$

$$P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9},\ \ P(B)=1,\ \ P(C)=0.$$

3) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ „წითელ“ კამათელზე მოსული რიცხვი 3-ით მეტია „თეთრ“ კამათელზე მოსულ რიცხვზე?

ამ ხდომილობის შესაბამისი ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლეა

$$A=\{(4;1);\ (5;2);\ (6;3)\}$$

ამ ხდომილობის ალბათობაა $P(A)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

4) A იყოს ხდომილობა „მოსულ $(x;y)$ წყვილში $x\cdot y\geq 24$“. ამ ხდომილობის შესამაბისი ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლეა

$$A=\{(4;6);\ (5;5);\ (5;6);\ (6;4);\ (6;5);\ (6;6)\},$$

ამიტომ $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

მაგალითი 5. მოსწავლემ პროგრამით გათვალისწინებული 25 საკითხიდან მოამზადა 15. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მოსწავლეს შეხვდება ბილეთი, რომლის სამივე საკითხი მომზადებული აქვს?

25 საკითხიდან 3-საკითხიანი ბილეთების შედგენა შეიძლება $C_{25}^{3}-$ნაირად. ე.ი. ხდომილობათა სრული სისტემის ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობაა C_{25}^{3}. მომზადებული 15 საკითხიდან შედგენილი ბილეთების რაოდენობაა C_{15}^{3}, ეს არის მოსწავლისათვის სასურველი (ხელშემწყობი) ბილეთების

რაოდენობა. ამიტომ ალბათობის განსაზღვრებიდან გამომდინარე, ალბათობა იმისა, რომ მოსწავლეს შეხვდება ბილეთი, რომლის სამივე საკითხი მომზადებული აქვს იქნება

$$\frac{C_{15}^3}{C_{25}^3} = \frac{15\cdot14\cdot13}{1\cdot2\cdot3} : \frac{25\cdot24\cdot23}{1\cdot2\cdot3} = \frac{91}{460} .$$

მაგალითი 6. ვთქვათ, რაიმე ავადმყოფობის მოსარჩენად ექვსი ტიპის წამალი გამოიყენება – I, II,...,VI. ექიმმა გადაწყვიტა გამოიკვლიოს ამ ექვსიდან რომელიმე ოთხი წამლის მოქმედება. იგი 6-დან ალალბედზე ირჩევს 4 წამალს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ არჩევანი I წამალზე შეჩერდება?

ხდომილობათა სრული სისტემა დასახელებული ექვსი წამლიდან შედგენილი ყველა შესაძლო ოთხეულის სიმრავლეა. ე.ი. ხდომილობათა სრული სისტემა შედგება $C_6^4 = C_6^2 = \frac{6\cdot5}{1\cdot2} = 15$ ელემენტარული ხდომილობისგან. პირობის თანახმად, თითოეული ოთხეულის შერჩევა, მოცემული 15-დან, ტოლშესაძლებელია, ამიტომ თითოეული ელემენტარული ხდომილობის ალბათობაა $\frac{1}{15}$.

რამდენი ოთხეული შეიცავს I წამალს? ანუ რამდენი ელემენტარული ხდომილობაა „ხელშემწყობი" საძებნი A ხდომილობისათვის? I წამლის გარდა უნდა შეირჩეს კიდევ 3 წამალი დარჩენილი 5-დან, მათი რაოდენობაა $C_5^3 = C_5^2 = \frac{5\cdot4}{1\cdot2} = 10$. მაშასადამე

$$P(A) = \frac{C_5^3}{C_6^4} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} .$$

ამრიგად, თუ S არის მოცემული ექსპერიმენტთან დაკავშირებული ხდომილობათა სრული სისტემა (სივრცე), მაშინ ყოველი A ხდომილობა, რომელიც ამ ექსპერიმენტის რაიმე შედეგს წარმოადგენს, ამ S სიმრავლის ქვესიმრავლეა და შედგება მოცემული ხდომილობის ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილობებისაგან.

თუ S-ის თითოეული ელემენტარული ხდომილობის ალბათობებია $P_1, P_2, \cdots, P_n$, მაშინ $P_1 + P_2 + \cdots + P_n = 1$. გამომდინარე აქედან, თუ ხდომილობათა სივრცე n ტოლშესაძლებელი შედეგისგან შედგება, მაშინ $P_1 = P_2 = \cdots = P_n = \frac{1}{n}$.

S სიმრავლის ყოველი A ხდომილობის (რომელიც S-ის ქვესიმრავლეა) ალბათობა A-ში შემავალ ელემენტარულ ხდომილობათა ალბათობების ჯამის ტოლია.

თუ S სისტემის A ხდომილობის მოხდენისას ხდება ამავე სისტემის რაიმე B ხდომილობაც, მაშინ ვიტყვით, რომ A იწვევს B-ს და ამას ასე ჩავწერთ: $A \subset B$ ან $B \supset A$. ამასთან, თუ $A \subset B$ და $B \subset A$, მაშინ ვიტყვით, რომ ეს ორი ხდომილობა ტოლია (ტოლძალოვანია) და დავწერთ $A = B$. ე.ი. ორი ხდომილობა ტოლია ნიშნავს იმას, რომ ისინი ერთი და იმავე ელემენტარული ხდომილობებისაგან შედგება.

მაგალითად, თუ კამათლის გაგორებისას A არის 3-ის ან 5-ის მოსვლა, ხოლო B – კენტი რიცხვის მოსვლა, მაშინ ცხადია $A \subset B$, ამ შემთხვევაში $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, ე.ი. $P(A) < P(B)$. საზოგადოდ, როცა $A \subset B,$ მაშინ $P(A) \leq P(B)$; ტოლობას მხოლოდ მაშინ აქვს ადგილი, როცა $A = B$.

§82. ოპერაციები ხდომილობებზე

ვთქვათ, S არის მოცემული ექსპერიმენტის შესაბამისი ხდომილობათა სრული სისტემა (სივრცე). მისი ელემენტები ამ ექსპერიმენტის შესაბამისი ელემენტარული ხდომილობებია – თითოეული მათგანი მოცემული ექსპერიმენტის გარკვეულ შედეგს შეესაბამება. ეს შედეგები არ შეიძლება ერთდროულად მოხდეს – ისინი არათავსებადია. S-ის ყოველი ქვესიმრავლე მოცემული ექსპერიმენტის შესაბამისი ხდომილობაა. ერთ-ერთი ქვესიმრავლე ცარიელი სიმრავლეა Ø; იგი არცერთ ელემენტარულ ხდომილობას არ შეიცავს, მისი ალბათობა ნულია, p(Ø)=0; ქვესიმრავლეა აგრეთვე თვით S სიმრავლეც – იგი აუცილებელი ხდომილობაა; $P(S) = 1$. ოპერაციები ხდომილობებზე ისე განისაზღვრება, როგორც სიმრავლეზე ოპერაციები.

ორი A და B ხდომილობის ჯამი (გაერთიანება) ეწოდება ისეთ ხდომილობას, რომელიც ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ხდება ერთი მაინც A და B ხდომილობებიდან. აღინიშნება ასე $A + B$ ან $A \bigcup B$.

***მაგალითი* 1.** ვთქვათ ექსპერიმენტია კამათლის გაგორება. A იყოს ხდომილობა: „4-ზე მეტი რიცხვის მოსვლა“, ე.ი. A არის სიმრავლე $\{5;6\}$. B იყოს ხდომილობა – „3-ზე მეტი და 6-ზე ნაკლები რიცხვის მოსვლა“, ე.ი. $B = \{4;5\}$. ამიტომ $A + B = \{4;5;6\}$,

ეს კი არის ხდომილობა: „3-ზე მეტი რიცხვის მოსვლა“. ცხადია, $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; $P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $P(A+B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. როგორც აქედან ჩანს $P(A+B)<P(A)+P(B)$.

ამ მაგალითში A და B ხდომილობებს საერთო ელემენტარული ხდომილობა აქვს – „5-ის მოსვლა“; ისინი თავსებადი ხდომილობებია.

თუ A და B რაიმე არათავსებადი ხდომილობებია, მაშინ

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

***მაგალითი* 2.** ყუთიდან, რომელშიც არის 6 თეთრი, 10 შავი და 4 წითელი ბირთვი, შემთხვევით იღებენ ერთ-ერთს. A იყოს ხდომილობა ამოღებული ბირთვი თეთრია, B-ამოღებული ბირთვი წითელია. ვიპოვოთ A და B ხდომილობების ჯამის ალბათობა.

A და B არათავსებადი ხდომილობებია, ამიტომ $P(A+B)=P(A)+P(B)$; $P(A)=\frac{6}{20}$, $P(B)=\frac{4}{20}$. ე.ი. $P(A+B)=\frac{6}{20}+\frac{4}{20}=\frac{1}{2}$.

ორი A და B ხდომილობის ნამრავლი (თანაკვეთა) ეწოდება ისეთ ხდომილობას, რომელიც ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ხდება როგორც A, ისე B ხდომილობა. აღინიშნება ასე AB ან $A\bigcap B$.

***მაგალითი* 3.** ვთქვათ, ექსპერიმენტი ორი სხვადასხვა კამათლის გაგორებაა (იხ. §83-ის მაგალითი 4); როგორც ვიცით შესაბამისი ხდომილობათა სრული სისტემაა

$$S=\{(x;y),\ 1\le x\le 6,\ 1\le y\le 6\}.$$

განვიხილოთ S სრული სისტემის სხვადასხვა ხდომილობები.

1) ვთქვათ A არის იმ ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლე (S-ის ქვესიმრავლე), რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $x\ge 5$; ე.ი. A შედგება 12 ელემენტარული ხდომილობისგან, ამიტომ $P(A)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$.

B იყოს ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $y\le 3$. B შედგება 18 ელემენტარულ ხდომილობისგან, $P(B)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$.

$A \cdot B$ არის ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლე, რომლისთვისაც ერთდროულად სრულდება პირობები $x \geq 5$ და $y \leq 3$. ე.ი.

$$A \cdot B = \{(5;1);\ (5;2);\ (5;3);\ (6;1);\ (6;2);\ (6;3)\}.$$

ამდენად

$$P(A \cdot B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

2) ახლა განვიხილოთ ზემოთ განხილულ ცდასთან დაკავშირებული კიდევ ორი ხდომილობა:

A იყოს იმ ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლე, რომლისთვისაც $x \neq 3$. ე.ი. A შედგება 30 ელემენტარული ხდომილობისგან, ამიტომ $P(A) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

B იყოს იმ ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლე, რომლისთვისაც $x + y = 9$. ცხადია $B = \{(3;6),(4;5),(5;4),(6;3)\}$.

$$P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

$A \cdot B$ არის იმ ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლე, რომლისთვისაც ერთდროულად სრულდება ორი პირობა: $x \neq 3$, $x + y = 9$. ეს ხდომილობა სამი ელემენტარული ხდომილობისგან შედგება: $\{(4;5),(5;4),(6;3)\}$

$$P(A \cdot B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{9} \cdot \frac{5}{6}.$$

მაშასადამე ამ შემთხვევაში $P(A \cdot B) \neq P(A) \cdot P(B)$.

თუ ადგილი აქვს ტოლობას $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$, მაშინ A და B ხდომილობებს დამოუკიდებელი ხდომილობები ეწოდება. წინააღმდეგ შემთხვევაში ამ ხდომილობებს დამოკიდებული ხდომილობები ეწოდება.

ზემოთ განხილული მაგალითი 1-დან და მაგალითი 2-დან გამომდინარეობს, რომ $P(A + B) \leq P(A) + P(B)$. ტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა A და B არათავსებადი ხდომილებებია.

მტკიცდება, რომ თუ A და B ნებისმიერი ხდომილობებია, მაშინ

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

ამ ტოლობის მართებულობა შეიძლება შევამოწმოთ ზემოთმოყვანილ მაგალით 1-ზე.

ორი A და B ხდომილობის სხვაობა ეწოდება ისეთ ხდომილობას, რომელიც ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ხდება A და არ ხდება B. აღინიშნება ასე $A-B$ ან $A\setminus B$.

ვთქვათ, S ხდომილობათა რაიმე სრული სისტემაა და $A\subset S$. A-ს საწინააღმდეგო ხდომილობა, რომელიც აღინიშნება $\overline{A}$ სიმბოლოთი, ეწოდება $S\setminus A$ ხდომილობას. ე.ი. $\overline{A}$ ხდომილობა ხორციელდება მაშინ, როცა არ ხორციელდება A და $\overline{A}$ არ ხორციელდება მაშინ, როცა ხორციელდება A. ცხადია A და $\overline{A}$ არათავსებადი ხდომილობებია, ე.ი. $A+\overline{A}=S$; გამომდინარე აქედან $P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1$, საიდანაც $P(A)=1-P(\overline{A})$.

მაგალითად, თუ A არის კამათელზე 2-ზე მეტი რიცხვის მოსვლა, ე.ი. $A=\{3,4,5,6\}$; მაშინ $\overline{A}$ არის 2-ზე მეტი რიცხვის არ მოსვლა, ან 2-ზე არაუმეტესი რიცხვის მოსვლა, ე.ი. $\overline{A}=\{1,2\}$. ამ მაგალითში $P(A)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$; $P(\overline{A})=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

რამოდენიმე ხდომილობის ჯამი და ნამრავლი განისაზღვრება ორის ანალოგიურად.

$A_1,A_2,\cdots,A_n$ ხდომილობების ჯამი ეწოდება ისეთ ხდომილობას, რომელიც ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ხდება ერთი მაინც $A_K\,(K=1,2,\cdots,n)$ ხდომილობებიდან და აღინიშნება ასე:

$$A_1+A_2+\cdots+A_n \text{ ან } \bigcup_{K=1}^{n} A_K\,.$$

თუ $A_1,A_2,\cdots,A_n$ ხდომილობებიდან ყოველი ორი არათავსებადია, მაშინ

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)\,.$$

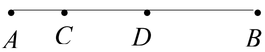
$A_1,A_2,\cdots,A_n$ ხდომილობების ნამრავლი ეწოდება ისეთ ხდომილობას, რომელიც ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ხდება ყოველი $A_K\,(K=1,2,\cdots,n)$ და აღინიშნება ასე:

$$A_1\cdot A_2\cdot\,\cdots\,\cdot A_n \text{ ან } \bigcap_{K=1}^{n} A_K\,.$$

§83. გეომეტრიული ალბათობა

ალბათობის კლასიკური განსაზღვრება მოითხოვს, რომ ელემენტარულ ხდომილობათა სრული სისტემა შედგებოდეს სასრული რაოდენობის ტოლშესაძლებელი ხდომილობებისაგან. პრაქტიკაში კი ხშირად ვხვდებით ცდებს, რომელთა ტოლშესაძლებელ შედეგთა სიმრავლე უსასრულოა. ასეთ შემთხვევაში სარგებლობენ ალბათობის გეომეტრიული განსაზღვრებით.

ვთქვათ მოცემული გვაქვს AB მონაკვეთი, რომლის სიგრძე (ნახ. 87) უდრის d-ს $\left(|AB| = d\right)$ და ამ მონაკვეთზე მდებარე CD მონაკვეთი $|CD| = \delta$. ალბათობა იმისა, რომ AB მონაკვეთზე შემთხვევით შერჩეული წერტილი მოხვდეს ამ მონაკვეთზე მდებარე CD მონაკვეთზე გამოითვლება ფორმულით

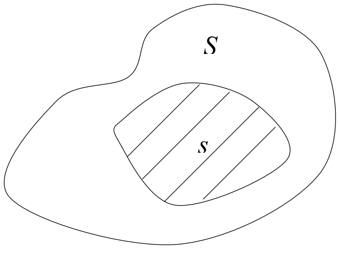


ნახ. 87

$$P = \frac{\delta}{d}. \tag{1}$$

აქ AB მონაკვეთი ხდომილობათა სრული სისტემის (სივრცის) როლშია, დასახელებულ ხდომილობას AB მონაკვეთის ქვესიმრავლეს – CD მონაკვეთს ვუთანაბრებთ.

ანალოგიურად, ვთქვათ მოცემული გვაქვს S ფართობის მქონე რაიმე ბრტყელი ფიგურა (ნახ. 88) და ამ ფიგურის რაიმე ნაწილი, რომლის ფართობია s. ალბათობა იმისა, რომ მოცემულ ფიგურაზე შემთხვევით შერჩეული წერტილი მოხვდება ამ ფიგურის აღებულ ნაწილში გამოითვლება ფორმულით



ნახ. 88)

$$P = \frac{s}{S}. \tag{2}$$

(1) და (2) გეომეტრიული ალბათობის ფორმულებია.

განვიხილოთ მაგალითები, რომელთა ამოხსნა მოხერხებულია ალბათობის გეომეტრიული განსაზღვრების გამოყენებით.

***მაგალითი* 1.** მონაკვეთი სამ ტოლ ნაწილადაა დაყოფილი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამ მონაკვეთზე შემთხვევით შერჩეული წერტილი შუა ნაწილში არ მოხვდება.

ე.ი. უნდა გამოვთვალოთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული წერტილი მოხვდება პირველ ან მესამე ნაწილში. თანახმად (1) ფორმულისა ეს ალბათობა $P=\dfrac{2}{3}$.

მაგალითი 2. ვთქვათ MN არის ABC სამკუთხედის შუახაზი $(MN \parallel AC)$. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ABC სამკუთხედში შემთხვევით შერჩეული წერტილი BMN სამკუთხედში მოხვდება.

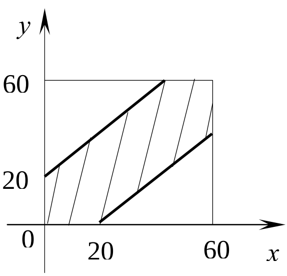
(2) ფორმულის გამოყენებით

$$P=\frac{S_{BMN}}{A_{ABC}}=\frac{1}{4}.$$

მაგალითი 3 (შეხვედრის ამოცანა). ორი მეგობარი შეთანხმდა, რომ ისინი შეხვდებოდნენ ერთმანეთს 10-დან 11 საათამდე, ამასთან, შეხვედრის ადგილზე თითოეული მოსული ელოდება მეორეს 20 წუთს და მიდის. რას უდრის მათი შეხვედრის ალბათობა, თუ თითოეული მოდის ალალბედზე დათქმული დროის (10 საათიდან 11 საათამდე დროის შუალედში) განმავლობაში და მათი მოსვლის მომენტები არ არის დამოკიდებული ერთმანეთზე?

დროის მთელი შუალედი წუთების გამოყენებით ასე გამოვსახოთ [0;60]. პირველის მოსვლის დრო აღვნიშნოთ x-ით, მეორესი კი y-ით. იმისათვის, რომ ისინი შეხვდნენ ერთმანეთს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $|x-y|\le 20$; ამასთან $0\le x\le 60$ და $0\le y\le 60$.

$(x;y)$ წყვილს შევუსაბამოთ წერტილი საკოორდინატო სიბრტყეზე. ყველა შესაძლო შემთხვევათა ერთობლიობა მოგვცემს კვადრატს (ნახ. 89), რომლის გვერდის სიგრძეა 60, ხოლო იმ $(x;y)$ წერტილების სიმრავლე, რომლებიც გამოიწვევენ შეხვედრას წარმოდგენილია კვადრატის დაშტრიხული ნაწილით; მისი ფართობია $S=60^2-40^2$.



ნახ. 89

საძიებელი ალბათობა „გეომეტრიულ ენაზე“ შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ: რა არის ალბათობა იმისა, რომ კვადრატში შერჩეული $(x;y)$ წერტილი მოხვდება დაშტრიხულ ნაწილში?

(2) ფორმულის ძალით

$$P=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}.$$

ა მ ო ც ა ნ ა თ ა   კ რ ე ბ უ ლ ი

§1. არითმეტიკული გამოთვლები

1.1. დაშალეთ მარტივ მამრავლებად:
88; 96; 124; 144; 460; 588.

1.2. იპოვეთ მამრავლებად დაშლის ხერხით შემდეგი რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი:
34 და 48; 120 და 150; 14, 20 და 48; 36, 54 და 72.

1.3. იპოვეთ მამრავლებად დაშლის ხერხით შემდეგი რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადი:
8 და 28; 64 და 96; 240 და 360; 48, 72 და 80.

1.4. 1) მოცემული ნატურალური რიცხვის 7-ზე გაყოფის დროს ნაშთი უდრის 3-ს. რას უდრის ნაშთი 7-ზე გაყოფის დროს, თუ მოცემულ რიცხვს გავადიდებთ 2-ით?
2) რაიმე ნატურალური რიცხვის 11-ზე გაყოფის დროს ნაშთი უდრის 5-ს. რას მივიღებთ ნაშთში 11-ზე გაყოფის დროს, თუ მოცემულ რიცხვს გავადიდებთ 4-ით?
3) რაიმე ნატურალური რიცხვის 4-ზე გაყოფის დროს ნაშთი უდრის 3-ს. რას მივიღებთ ნაშთში 4-ზე გაყოფის დროს, თუ მოცემულ რიცხვს გავადიდებთ 2-ით?
4) რაიმე ნატურალური რიცხვის 3-ზე გაყოფის დროს ნაშთი უდრის 1-ს. რას მივიღებთ ნაშთში 3-ზე გაყოფის დროს, თუ მოცემულ რიცხვს გავადიდებთ 7-ით?

1.5. 1) მოცემული ნატურალური რიცხვის 3-ზე გაყოფის დროს მიიღება განაყოფი 31 და ნაშთი 2. რას უდრის ნაშთი იგივე რიცხვის 7-ზე გაყოფის დროს?
2) რიცხვის 6-ზე გაყოფის დროს ნაშთია 5. რას უდრის ნაშთი ამავე რიცხვის 12-ზე გაყოფის დროს?
3) რიცხვის 3-ზე გაყოფის დროს ნაშთია 2, ხოლო 5-ზე გაყოფის დროს კი – 3. რას უდრის ნაშთი ამავე რიცხვის 15-ზე გაყოფის დროს?
4) რიცხვის 2-ზე გაყოფის დროს ნაშთია 1, ხოლო 7-ზე გაყოფის დროს კი 6. რას უდრის ნაშთი ამავე რიცხვის 14-ზე გაყოფის დროს?

1.6. 1) რა უმცირესი ნატურალური რიცხვი უნდა დავუმატოთ 4766-ს, რომ მიღებული რიცხვი უნაშთოდ გაიყოს 3-ზე?
2) რა უმცირესი ნატურალური რიცხვი უნდა დავუმატოთ 47831-ს, რომ მიღებული რიცხვი უნაშთოდ გაიყოს 9-ზე?
3) რა უმცირესი ნატურალური რიცხვი უნდა დავუმატოთ

87898-ს, რომ მიღებული რიცხვი უნაშთოდ გაიყოს 3-ზე?
4) რა უმცირესი ნატურალური რიცხვი უნდა დავუმატოთ 35987-ს, რომ მიღებული რიცხვი უნაშთოდ გაიყოს 9-ზე?

1.7. 1) 6 ერთნაირ ფანქარში გადაიხადეს 73 თეთრზე მეტი და 81 თეთრზე ნაკლები. რამდენი თეთრი ღირდა ერთი ფანქარი?
2) 37 ერთნაირ საშლელში გადაიხადეს 12 ლარზე მეტი და 12,5 ლარზე ნაკლები. რამდენი თეთრი ღირდა ერთი საშლელი?
3) მოსწავლეებმა ექსკურსიისათვის შეაგროვეს თანხა, რომელიც მეტია 350 ლარზე და ნაკლებია 370 ლარზე. თითოეულმა მოსწავლემ გადაიხადა 17 ლარი. რამდენი მოსწავლე წასულა ექსკურსიაზე?
4) რედაქციის თანამშრომლებმა შეაგროვეს გარკვეული თანხა, რომელიც მეტია 335 ლარზე და ნაკლებია 355 ლარზე. თითოეულმა გადაიხადა 15 ლარი. რამდენი თანამშრომელია რედაქციაში?

შეასრულეთ მოქმედებები (№№1.8-1.18):

1.8. 1) $\frac{5}{8}+\frac{7}{12}$; 2) $\frac{2}{5}+\frac{5}{8}+\frac{1}{12}$; 3) $3\frac{3}{4}+4\frac{17}{24}$; 4) $2\frac{4}{15}+1\frac{5}{12}+4\frac{3}{5}$.

1.9. 1) $7\frac{2}{3}-3\frac{5}{12}$; 2) $8\frac{3}{4}-5\frac{7}{16}$; 3) $\frac{5}{6}-\frac{4}{9}$; 4) $8-\frac{13}{20}$.

1.10. 1) $3\frac{3}{4}+\frac{4}{5}:\frac{8}{15}$; 2) $4\frac{7}{8}-6\frac{1}{4}:3\frac{1}{8}$;

3) $3\frac{3}{5}:1\frac{11}{25}-1\frac{7}{8}$; 4) $\left(3\frac{1}{4}-2\frac{5}{6}\right):1\frac{1}{8}$.

1.11. 1) $\left(13\frac{1}{4}-10\frac{5}{6}:\frac{2}{3}\right)\cdot1\frac{1}{3}$; 2) $\left(1\frac{3}{7}+3\frac{1}{3}:2\frac{2}{9}\right)\cdot2\frac{2}{41}$;

3) $\left(5\frac{2}{3}\cdot1\frac{4}{5}-8\frac{3}{5}\right):1\frac{3}{10}$; 4) $\left(2\frac{1}{3}+3\frac{1}{2}\right):\left(-4\frac{1}{6}+3\frac{1}{7}\right)$.

1.12. 1) $6:\frac{3}{5}+8\cdot\frac{3}{4}-1\frac{1}{2}\cdot6+\frac{7}{10}\cdot20-12:\frac{6}{7}$;

2) $\left(5\frac{1}{5}+3\frac{3}{10}-4\frac{4}{15}\right)\cdot\frac{15}{127}+\left(4\frac{1}{4}+3\frac{5}{6}-2\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{12}{13}$;

3) $\left(5\frac{5}{12}+3\frac{7}{36}-1\frac{11}{18}\right):1\frac{2}{5}-\left(4\frac{5}{6}+2\frac{7}{24}-5\frac{13}{18}\right)\cdot1\frac{43}{101}$;

4) $\left(25\frac{7}{8}+14\frac{1}{3}:9\frac{5}{9}-6\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{10}\right):5\frac{7}{16}+2\frac{1}{5}\cdot 2\frac{3}{11}$.

1.13. 1) $(2{,}4:0{,}03-3{,}5\cdot 6):\frac{59}{60}$; 2) $(2{,}4-(0{,}4-3{,}2):0{,}7)\cdot 5$;

3) $3{,}1:\left(5\frac{1}{3}-4{,}2:3\frac{1}{2}\right)$; 4) $\left(0{,}5:1{,}5-3\frac{1}{3}\cdot 0{,}6\right):\left(1-3\frac{1}{2}\right)$.

1.14. 1) $\dfrac{1\frac{7}{8}\cdot 4\frac{4}{5}-3\frac{3}{5}:2{,}4}{3\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}}-\dfrac{3\frac{1}{2}:2{,}8+5\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{17}}{12-8{,}75}$;

2) $\dfrac{\left[\left(3\frac{4}{5}+1\frac{2}{3}\right):8{,}2-\frac{3}{8}\right]:1\frac{1}{6}}{\frac{4}{19}\cdot\left(2\frac{3}{4}-1\frac{4}{5}\right)}+\dfrac{1{,}75+3\frac{1}{5}}{4\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{8}}$;

3) $\dfrac{\left(85\frac{7}{30}-83\frac{5}{18}\right):2\frac{2}{3}}{0{,}04}$; 4) $\dfrac{\left(6\frac{3}{5}-3\frac{3}{14}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{(21-1{,}25):2{,}5}$.

1.15. 1) $\left(16\frac{1}{2}-13\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{18}{33}+2{,}2[0,(24)-0,(09)]+\frac{2}{11}$;

2) $\left[2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}+\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}\right]\cdot\dfrac{0{,}1(6)+0,(3)}{0,(3)+1{,}1(6)}$;

3) $\dfrac{0{,}8(3)-0{,}4(6)}{1\frac{5}{6}}\cdot\dfrac{1{,}125+1\frac{3}{4}-0{,}41(6)}{0{,}59}$;

4) $\dfrac{\left(2\frac{38}{45}-\frac{1}{15}\right):13\frac{8}{9}+3\frac{3}{65}\cdot 0,(26)}{\left(18\frac{1}{2}-13,(7)\right)\cdot\frac{1}{85}}\cdot 0{,}5$.

1.16. 1) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}:\left(-1\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}$; 2) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}:\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$;

3) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}:\frac{3}{5}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}\cdot\frac{3}{4}$; 4) $\left(5^{-1}-3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right):\left(5\cdot 3^{0}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right)$.

1.17. 1) $(2^{-1}\cdot 2^{-2}-2^{-3}\cdot 2^{-4}):(2^{-2}\cdot 2^{0}-2^{-5}\cdot 2^{-1})$;

2) $\left(5\cdot 3^{-4}-3^{-2}\cdot 3^{-3}\right):\left(4\cdot 3^{-3}+3^{-2}\cdot 3^{-4}\right)$;

3) $\dfrac{4^{-1}-3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}}{5-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}}$; 4) $\dfrac{2^{-3}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{2}}{10^{-1}+\left(\dfrac{1}{8}\right)^{0}}$.

1.18. 1) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dots+\dfrac{1}{100\cdot 101}$; 2) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dots+\dfrac{1}{99\cdot 101}$;

3) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dots+\dfrac{1}{18\cdot 20}$; 4) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 6}+\dots+\dfrac{1}{17\cdot 20}$.

1.19. განსაზღვრეთ პროპორციის უცნობი წევრი:

1) $x:12=10:5$; 2) $15:8=45:x$; 3) $\dfrac{2{,}7}{1{,}8}=\dfrac{x}{0{,}4}$; 4) $x:2\dfrac{2}{3}=6\dfrac{3}{4}:1{,}8$.

გამოთვალეთ (№№1.20; 1.21):

1.20. 1) 9000-ის $\dfrac{5}{6}$ ნაწილი; 2) 169-ის $\dfrac{11}{13}$ ნაწილი;

3) 89,2-ის $\dfrac{3}{223}$ ნაწილი; 4) $33\dfrac{1}{3}$-ის 0,01 ნაწილი.

1.21. 1) 140-ის 35%; 2) 215-ის 16%; 3) 280-ის 0,5%; 4) 280-ის $8\dfrac{1}{3}$%.

იპოვეთ რიცხვი, რომლის (№№1.22; 1.23):

1.22. 1) $\dfrac{2}{3}$ ნაწილი არის 50; 2) $\dfrac{4}{15}$ ნაწილი არის $85\dfrac{1}{3}$;

3) 0,04 ნაწილი არის 88,4. 4) 0,2 ნაწილი არის 24,45.

1.23. 1) 22% არის 33; 2) 30% არის 6;

3) $3\dfrac{1}{3}$% არის $33\dfrac{1}{3}$; 4) 12,3% არის 135,3.

1.24. 1) 2000-ის რა ნაწილს შეადგენს 225?

2) $33\dfrac{1}{3}$-ის რა ნაწილს შეადგენს 2?

3) $99\dfrac{1}{3}$-ის რა ნაწილს შეადგენს $16\dfrac{5}{9}$?

4) 510,3-ის რა ნაწილს შეადგენს 17,01?

1.25. 1) 500-ის რამდენი პროცენტია 352?

2) 340-ის რამდენი პროცენტია 68?

3) 885,6-ის რამდენი პროცენტია 239,112?

4) $231\frac{1}{6}$-ის რამდენი პროცენტია 97,09?

1.26. 1) 450 დაყავით 7-ისა და 8-ის პროპორციულ ნაწილებად;
2) 960 დაყავით 11-ისა და 13-ის პროპორციულ ნაწილებად;
3) 130 დაყავით $\frac{2}{3}$-ისა და $\frac{3}{2}$-ის პროპორციულ ნაწილებად;
4) 261 დაყავით $\frac{5}{6}$-ისა და $\frac{7}{9}$-ის პროპორციულ ნაწილებად.

1.27. 1) 720 დაყავით შემდეგი სამი რიცხვის პროპორციულ ნაწილებად: 5; 4 და 3;
2) 3630 დაყავით შემდეგი სამი რიცხვის პროპორციულ ნაწილებად: 0,6; 1 და 0,4;
3) 880 დაყავით შემდეგი სამი რიცხვის პროპორციულ ნაწილებად: $\frac{5}{3}$; $\frac{11}{6}$ და $\frac{13}{12}$;
4) 432 დაყავით შემდეგი ოთხი რიცხვის პროპორციულ ნაწილებად: 0,6; 1; 0,8 და 3.

1.28. 1) მუდმივი სიჩქარით მოძრავმა მატარებელმა 5 საათში გაიარა მთელი გზის $\frac{5}{6}$ ნაწილი. რამდენ საათში გაივლის ის მთელ გზას?
2) მოსწავლემ წიგნის $\frac{3}{4}$ ნაწილი წაიკითხა 6 დღეში. რამდენ დღეში წაიკითხავს ის წიგნის დარჩენილ ნაწილს?
3) ფერმერმა ნაკვეთის $\frac{8}{9}$ ნაწილი მოხნა 16 საათში. რამდენ საათში მოხნავს ის მთელ ფართობს?
4) ავტომობილმა მთელი გზის $\frac{6}{7}$ ნაწილის გავლის დროს დახარჯა 18 ლიტრი ბენზინი. რამდენი ლიტრი ბენზინი დაიხარჯება დარჩენილი გზის გავლისას?

1.29. 1) ავტომობილმა მთელი გზის 60% გაიარა 9 საათში. რამდენ საათში გაივლის ის გზის დარჩენილ ნაწილს?
2) ავზის 75% წყლით გაივსო 12 საათში. რამდენ საათში გაივსება ავზი მთლიანად?
3) ფერმერმა ნაკვეთის 40%-ზე მოსავალი აიღო 8 საათში. რამდენ საათში აიღებს ის მოსავალს ნაკვეთის დარჩენილ ნაწილზე?
4) კალათში მოთავსებული ვაშლების რაოდენობის 45%

შეადგენს 27 ვაშლს. რამდენი ვაშლია კალათაში?

1.30. 1) ფერმერმა ნაკვეთის $\frac{4}{5}$ ნაწილი მოხნა ტრაქტორით, ხოლო დარჩენილი ნაწილი კი დაამუშავა ხელით, რაზედაც მან დახარჯა 6-ჯერ მეტი დრო, ვიდრე იმუშავა ტრაქტორით. რამდენჯერ მეტია შრომის ნაყოფიერება ტრაქტორით მუშაობის შემთხვევაში ხელით მუშაობასთან შედარებით?

2) გზა ქალაქიდან სოფლამდე შედგებოდა აღმართისა და დაღმართისაგან. აღმართის გავლას, რომლის სიგრძე შეადგენდა მთელი გზის $\frac{1}{7}$ ნაწილს, ველოსიპედისტმა მოანდომა 2-ჯერ მეტი დრო, ვიდრე დაღმართის გავლას. რამდენჯერ მეტი იყო ველოსიპედისტის სიჩქარე დაღმართზე აღმართზე სიჩქარესთან შედარებით?

3) ტურისტმა მთელი გზის $\frac{1}{9}$ ნაწილი გაიარა ფეხით, ხოლო დარჩენილი გზა კი იმგზავრა ავტობუსით. ფეხით სიარულის დროს მან დახარჯა 3-ჯერ მეტი დრო, ვიდრე ავტობუსით. რამდენჯერ მეტია ავტობუსის სიჩქარე ფეხით მოძრაობის სიჩქარესთან შედარებით?

4) მგზავრმა მთელი გზის $66\frac{2}{3}\%$ იფრინა თვითმფრინავით, ხოლო დარჩენილი გზა იმგზავრა ავტომობილით. ავტომობილით მგზავრობის დროს მან დახარჯა 4-ჯერ მეტი დრო, ვიდრე ფრენის დროს. რამდენჯერ მეტია თვითმფრინავის სიჩქარე ავტომობილის სიჩქარესთან შედარებით?

1.31. 1) მოსწავლის მიერ წიგნის წაკითხული გვერდების რაოდენობა 3-ჯერ მეტია წიგნის წაუკითხავი გვერდების რაოდენობაზე. წიგნის რამდენი პროცენტი წაუკითხავს მოსწავლეს?

2) ფერმერის მიერ მოხნული ნაკვეთის ფართობი 4-ჯერ მეტია დარჩენილ მოუხნავ ფართობზე. მთელი ნაკვეთის რამდენი პროცენტი მოუხნავს ფერმერს?

3) ავტომობილმა დახარჯა 9-ჯერ მეტი ბენზინი, ვიდრე დარჩა ბენზინის ავზში. ბენზინის მთელი რაოდენობის რამდენი პროცენტი დარჩა ავზში?

4) მგზავრმა გაიარა 8-ჯერ მეტი მანძილი, ვიდრე დარჩა გასავლელი. მთელი გზის რა ნაწილი გაიარა მგზავრმა?

1.32. 1) მიწის ნაკვეთი ნახაზზე 1:10000 მასშტაბითაა მოცემული. ცნობილია, რომ ნახაზზე ორ წერტილს შორის მანძილია

3,7 სმ. იპოვეთ შესაბამისი მანძილი ნაკვეთზე.

2) რუკაზე ქალაქებს შორის მანძილი 12 სმ-ია. რა მანძილია სინამდვილეში ამ ქალაქებს შორის, თუ რუკის მასშტაბია 1:800000?

3) ნახაზზე 125 მეტრს შეესაბამება 5 სმ. რა მანძილია ორ წერტილს შორის სინამდვილეში, თუ ნახაზზე იგი 7 სმ-ია?

4) ნახაზზე სტადიონის ზომებია 5 სმ და 8 სმ. სინამდვილეში სტადიონის მცირე განზომილებაა 20 მ. იპოვეთ სტადიონის მეორე განზომილება.

1.33. 1) სურათის სიგრძეა 50 სმ, სიგანე 40 სმ. სურათის ფართობი გაადიდეს 5-ჯერ. რამდენი კვადრატული მეტრი გახდა სურათის ფართობი?

2) მიკროსკოპი ყოველი საგნის ფართობს ადიდებს 10^6-ჯერ. რამდენი კვადრატული სანტიმეტრი ფართობით გამოჩნდება მიკროსკოპში 0,00001 $მმ^2$ ფართობის მქონე სხეული?

3) ევრაზიის რუკის მასშტაბია 1:7000000, ხოლო ამიერკავკასიის რუკისა კი 1:3500000. რამდენჯერ მეტია ამიერკავკასიის რუკაზე საქართველოს ფართობი ევრაზიის რუკაზე მოცემულ საქართველოს ფართობზე?

4) საქართველოს ფართობია 70000 კვადრატული კილომეტრი, ხოლო საქართველოს რუკის მასშტაბია 1:500000. რამდენი კვადრატული სანტიმეტრი უკავია საქართველოს რუკაზე?

1.34. 1) ერთი რიცხვი შეადგენს მეორის 30%-ს. მეორე რიცხვის რა ნაწილს შეადგენს პირველი რიცხვი?

2) ერთი რიცხვი შეადგენს მეორე რიცხვის 85%-ს. მეორე რიცხვის რა ნაწილს შეადგენს პირველი რიცხვი?

3) ერთი რიცხვი შეადგენს მეორე რიცხვის 80%-ს. პირველი რიცხვის რამდენ პროცენტს შეადგენს მეორე რიცხვი?

4) ერთი რიცხვი შეადგენს მეორის $\frac{2}{7}$ ნაწილს, პირველი რიცხვის რამდენ პროცენტს შეადგენს მეორე რიცხვი?

1.35. 1) ქსოვილის ფასმა მოიმატა თავისი ფასის $\frac{1}{3}$-ით. ახალი ფასის რა ნაწილს შეადგენს ძველი ფასი?

2) პროდუქციის ფასმა მოიმატა თავისი ფასის 25%-ით. ახალი ფასის რამდენ პროცენტს შეადგენს ძველი ფასი?

3) ქსოვილის ფასმა მოიკლო თავისი ფასის $\frac{2}{5}$-ით. ძველი ფასის რა ნაწილს შეადგენს ახალი ფასი?

4) პროდუქციის ფასმა მოიკლო თავისი ფასის 20%-ით. ახალი ფასის რამდენ პროცენტს შეადგენს ძველი ფასი?

1.36. 1) ხუთი კომბაინი დღეში იღებს 300 ჰა მოსავალს. რამდენ ჰექტარზე აიღებს მოსავალს ერთ დღეში შვიდი ისეთივე კომბაინი?

2) სამი ტრაქტორი ყანას 8 საათში ხნავს. რამდენი ტრაქტორი მოხნავს იგივე ყანას 6 საათში?

3) ხუთ კალატოზს კედელი ამოჰყავს 6 სთ-ში. რამდენი კალატოზი ააშენებს იგივე კედელს 10 სთ-ში?

4) ავტომობილი 6 სთ-ში გადის 300 კმ მანძილს. რამდენ საათში გაივლის ის 750 კმ-ს, თუ იგივე სიჩქარით იმოძრავებს?

5) სამი ტრაქტორი 5 დღეში 150 ჰა მიწას ხნავს. რამდენ ჰექტარ მიწას მოხნავს 4 ტრაქტორი 7 დღეში?

6) ხუთი ოსტატი 3 საათში 150 დეტალს ამზადებს. რამდენ დეტალს დაამზადებს 7 ოსტატი 4 საათში?

1.37. 1) ოთხი კომბაინი 5 საათში ხორბალს იღებს 60 ჰა ფართობზე. რამდენ საათში აიღებს 9 კომბაინი მოსავალს 216 ჰა ფართობის მქონე ნაკვეთზე?

2) შვიდი ტრაქტორი 3 დღეში 210 ჰა მიწას ხნავს. რამდენი ტრაქტორი მოხნავს 150 ჰა მიწას 5 დღეში?

3) ორმა სატვირთო მანქანამ 3 სთ-ში 30 კმ მანძილზე 450 ტ ტვირთი გადაზიდა. რამდენ ტონა ტვირთს გადაზიდავს 7 ასეთივე მანქანა 2 სთ-ში 25 კმ მანძილზე?

4) ხუთმა სატვირთო მანქანამ 4 სთ-ში 20 კმ მანძილზე 100 ტ ტვირთი გადაზიდა. რამდენი ასეთი მანქანაა საჭირო 1000 ტ ტვირთის გადასაზიდად 50 კმ მანძილზე 5 სთ-ის განმავლობაში?

1.38. 1) კალათიდან, რომელშიც იდო 15 წითელი და 20 ყვითელი ვაშლი, ამოიღეს 17 ვაშლი. დარჩა თუ არა კალათში ერთიდაიგივე ფერის ორი ვაშლი?

2) კალათიდან, რომელშიც იდო 6 წითელი და 7 ყვითელი ვაშლი, ამოიღეს 5 ვაშლი. დარჩა თუ არა კალათში სხვადასხვა ფერის ორი ვაშლი?

3) ყუთიდან, რომელშიც 4 თეთრი და 3 შავი ბირთვია, ამოიღეს 3. არის თუ არა ამოღებულ ბირთვებში ერთიდაიგივე ფერის ორი ბირთვი მაინც?

4) კალათიდან, რომელშიც იყო 7 თეთრი და 5 ყვითელი ვაშლი, ამოიღეს 8 ვაშლი. არის თუ არა ამოღებულ ვაშლებში სხვადასხვა ფერის თითო ვაშლი მაინც?

1.39. 1) ყუთში 6 თეთრი და 4 წითელი ბურთულაა. ბურთულების რა უდიდესი რაოდენობა შეგვიძლია

ამოვიღოთ ყუთიდან, რომ ყუთში აუცილებლად დარჩეს: ა) თითოეული ფერის თითო ბურთულა მაინც; ბ) ერთი ფერის ორი ბურთულა და მეორე ფერის ერთი ბურთულა მაინც; გ) თითოეული ფერის ორ-ორი ბურთულა მაინც; დ) რომელიმე ერთი ფერის ორი ბურთულა მაინც.

2) ყუთში 20 ბურთულაა: 8-წითელი, 7-თეთრი და 5-შავი. ბურთულების რა უდიდესი რაოდენობა შეგვიძლია ამოვიღოთ ყუთიდან, რომ ყუთში დარჩეს: ა) ოთხი ცალი ერთი ფერის ბურთულა და დანარჩენი ორი ფერის ბურთულებიდან თითოეული ფერის თითო ბურთულა მაინც; ბ) ოთხი ცალი ერთი ფერის ბურთულა და დანარჩენი ორი ფერის ბურთულებიდან თითოეული ფერის ორ-ორი ბურთულა მაინც; გ) ოთხი ცალი ერთი ფერის ბურთულა და დანარჩენი ორი ფერის ბურთულებიდან თითოეული ფერის სამ-სამი ბურთულა მაინც; დ) ოთხი ცალი ერთი ფერის ბურთულა და დანარჩენი ორი ფერის ბურთულებიდან თითოეული ფერის ოთხ-ოთხი ბურთულა მაინც.

3) ყუთში არის 3 ლურჯი, 4 წითელი და 5 შავი ბურთი. რა უმცირესი რაოდენობის ბურთი უნდა ამოვიღოთ ყუთიდან, რომ ამოღებულ ბურთებში აუცილებლად იყოს: ა) 3 მაინც ერთი ფერის ბურთი; ბ) სამივე ფერის ბურთები; გ) ორი სხვადასხვა ფერის თითო ბურთი მაინც; დ) თითოეული ფერის სამ-სამი ბურთი მაინც.

4) კალათში 120 ბურთულაა. აქედან 32 ლურჯი, 26 წითელი, 14 მწვანე, 28 თეთრი. დანარჩენი ბურთულები არის ყავისფერი, ყვითელი და ჭრელი. რა უმცირესი რაოდენობის ბურთულები უნდა ამოვიღოთ კალათიდან, რომ მათ შორის ერთი ფერის 20 ბურთულა მაინც იყოს?

1.40. 1) საათი, რომელიც დღე-ღამეში წინ მიდის 6 წუთით, გაასწორეს. დროის რა უმცირესი მონაკვეთის შემდეგ აჩვენებს საათი ისევ სწორ დროს?

2) საათი, რომელიც ყოველ 3 საათში 2 წუთით ჩამორჩება, გაასწორეს. დროის რა უმცირესი მონაკვეთის შემდეგ უჩვენებს საათი ისევ სწორ დროს?

3) განსაზღვრეთ უმცირესი კუთხე, რომლებსაც ერთმანეთთან შეადგენენ საათის ისრები: ა) 2 სთ 40 წთ-ზე; ბ) 4 სთ 48 წთ-ზე.

4) განსაზღვრეთ უმცირესი კუთხე, რომლებსაც ერთმანეთთან შეადგენენ საათის ისრები, თუ საათის ჩვენებაა: ა) 3 სთ 40 წთ; ბ) 5 სთ 48 წთ.

1.41. 1) ჭიქაში მყოფი ყოველი ბაქტერია ერთ წამში იყოფა ორ

ბაქტერიად. თუ ჭიქაში თავიდან მოვათავსებთ ერთ ბაქტერიას, ჭიქა გაივსება ერთ წუთში. რამდენ წამში გაივსება ჭიქა, თუ თავიდან ჭიქაში მოვათავსებთ ორ ბაქტერიას?

2) ჭიქაში მყოფი ყოველი ბაქტერია ერთ წამში იყოფა ორ ბაქტერიად. თუ ჭიქაში თავიდან მოვათავსებთ ერთ ბაქტერიას, ჭიქა გაივსება ერთ წუთში. რამდენ წამში გაივსება ჭიქის ნახევარი, თუ თავიდან ჭიქაში მოვათავსებთ ოთხ ბაქტერიას?

3) ჭიქაში მყოფი ყოველი ბაქტერია ერთ წამში იყოფა სამ ბაქტერიად. თუ ჭიქაში თავიდან მოვათავსებთ ერთ ბაქტერიას, ჭიქა აივსება ერთ წუთში. რამდენ წამში აივსება ჭიქის მესამედი, თუ თავიდან ჭიქაში ერთი ბაქტერიაა?

4) რაკეტამ, ყოველ საათში (დაწყებული მეორედან) გადიოდა რა ორჯერ მეტ მანძილს იმაზე, რაც მას ჰქონდა გავლილი ამ დრომდე, მთელი გზა გაიარა 10 სთ-ში. მოძრაობის დაწყებიდან რამდენ საათში ჰქონდა მას გავლილი მთელი გზის მეცხრედი?

1.42. ჩაწერეთ გაშლილი ფორმით მოცემული რიცხვი

1) 327; 2) 4029;
3) 5203; 4) 71002

1.43. ჩაწერეთ გაშლილი ფორმით ორობით სისტემაში მოცემული რიცხვი

1) 1101_2 2) 11111_2
3) 10101_2 4) 110010_2

1.44. ჩაწერეთ ორობით სისტემაში

1) 7; 2) 9; 3) 16; 4) 60;
5) 110; 6) 129; 7) 502; 8) 813.

1.45. ჩაწერეთ ათობით სისტემაში რიცხვი

1) 1011_2 2) 11010_2
3) 100111_2 4) 11000110_2

1.46. რომელია მეტი

1) 10001_2 თუ 19 2) 110101_2 თუ 51
3) 1001010_2 თუ 75 4) 111111_2 თუ 111
5) 10000000_2 თუ 100 6) 101010_2 თუ 43

1.47. რამდენ ციფრს შეიცავს მოცემული რიცხვის ჩანაწერი ორობით სისტემაში?

1) 18; 2) 82;

3) 128; 4) 1023.

1.48. რამდენ ციფრს შეიცავს მოცემული რიცხვის ჩანაწერი ათობით სისტემაში
1) 1010_2 2) 1000000_2
3) 1110000_2 4) 1111110101_2

1.49. გამოთვალეთ
1) $1110_2 + 101_2$ 2) $10111_2 + 11001_2$
3) $11011_2 + 11101_2$ 4) $1110_2 - 1011_2$
5) $101100_2 - 11001_2$ 6) $1101001_2 - 1011111_2$

1.50. ჩაწერეთ ათობით სისტემაში უდიდესი რიცხვი, რომელიც ორობით სისტემაში შეიძლება ჩაიწეროს:
1) ოთხი ციფრით; 2) ექვსი ციფრით.

1.51. ჩაწერეთ ათობით სისტემაში უმცირესი რიცხვი, რომელიც ორობით სისტემაში შეიძლება ჩაიწეროს:
1) ხუთი ციფრით; 2) შვიდი ციფრით.

1.52. იპოვეთ უმცირესი სამნიშნა რიცხვი, რომლის ჩანაწერი ორობით სისტემაში შეიცავს:
1) მხოლოდ ერთ ერთიანს; 2) მხოლოდ ერთიანებს.

1.53. იპოვეთ უდიდესი სამნიშნა რიცხვი, რომლის ჩანაწერი ორობით სისტემაში შეიცავს:
1) მხოლოდ ერთ ერთიანს; 2) მხოლოდ ერთიანებს.

§2. მოქმედებები ერთწევრებზე და მრავალწევრებზე მრავალწევრის მამრავლებად დაშლა

შეასრულეთ მოქმედებანი (№№2.1-2.33):

2.1. 1) $5a-2a$; 2) $8x-10x$; 3) $-8m-5m$; 4) $-2q+2q$.

2.2. 1) $15ab+4ab-10ab$; 2) $-6xy-xy+8xy$;
3) $-4m^3+10m^3-8m^3$; 4) $-25k^4-32k^4+48k^4$.

2.3. 1) $2d^2-1\frac{1}{2}d^2-3\frac{1}{2}d^2$; 2) $5q^4-1\frac{1}{2}q^4+6\frac{1}{2}q^4$;
3) $\frac{3}{4}a^5-\frac{1}{2}a^5-\frac{5}{8}a^5$; 4) $\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{6}x^3+\frac{1}{2}x^3$.

2.4. 1) $0{,}8c^2-1{,}2c^2-0{,}1c^2$; 2) $1{,}5n^6-0{,}9n^6+2n^6$;
3) $3a^3b^2-2a^3b^2+4a^3b^2$; 4) $4x^2y-7x^2y+5x^2y$.

2.5. 1) $11x^2+4x-x^2-4x$; 2) $-a-5-2a+3$;

3) $2y^2-3y+2y-y^2$; 4) $-m^2-n^2+2m^2-n^2$.

2.6. 1) $\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}y$;

2) $-1\frac{2}{3}ab^3+2a^3b-4\frac{1}{2}a^2b-ab^3-\frac{1}{2}a^2b-a^3b$;

3) $0{,}3c^3-0{,}1c^2-0{,}5c^3$;

4) $-9{,}387m-3{,}89n+8{,}197m-1{,}11n-0{,}002m$.

2.7. 1) $8a+(3b+5a)$; 2) $(4x+2)+(-x-1)$;

3) $(15a+2b)+(4a-3b)$; 4) $(4a^2b-3ab^2)+(-a^2b+2ab^2)$.

2.8. 1) $(x^2+2xy+y^2)+(2xy-x^2-y^2)$;

2) $(5m^2-5m+3)+(-4m^2-5m-3)$; 3) $(2y^2-4y-1)+(-1+4y-2y^2)$;

4) $(10a-6b+5c-4d)+(9a-2b-4c+2d)$.

2.9. 1) $5a-(+2a)$; 2) $-10x+(+2x)$;

3) $5x^2y-(-2x^2y)$; 4) $4ab-(+4ab)$.

2.10. 1) $(12c+16d)-(6c-7d)$; 2) $(11x^3-2x^2)-(x^3-x^2)$;

3) $(3a^3b-13b^2)-(3a^3b+6b^2)$; 4) $(4x^2y+8xy^2)-(3x^2y-5xy^2)$.

2.11. 1) $(+2b)\cdot(-3c)$; 2) $(-6p)\cdot\left(-\frac{2}{3}q\right)$;

3) $\left(+\frac{3}{4}a\right)\cdot\left(+\frac{2}{3}b\right)$; 4) $(-0{,}3x)\cdot(-5y)$.

2.12. 1) $(+a^2)\cdot(+a)$; 2) $(-x^2)\cdot(-x^3)$; 3) $(+p^2)\cdot(-p^4)$; 4) $(+y^n)\cdot(y^2)$.

2.13. 1) $2x^2\cdot 3x^3$; 2) $(-6p^2)\cdot(-2p^4)$; 3) $(-8d)\cdot(-2d^3)$; 4) $(-5b^2)\cdot(+4b^2)$.

2.14. 1) $a^{n+1}\cdot a^2$; 2) $c^{n+1}\cdot c^{n-1}$; 3) $x^{2n+1}\cdot x^{n+2}$; 4) $a^{3k-2}\cdot a^{2k+3}$.

2.15. 1) $(-0{,}6x^2y^3)\cdot(+0{,}5x^2y^3)$; 2) $(+2{,}4k^2b^4)\cdot(-0{,}5k^3)$;

3) $\left(-1\frac{1}{2}x^2y^3z\right)\cdot\left(-1\frac{1}{3}xy^2z^3\right)$; 4) $(-2{,}5m^3n^2p)\cdot(-3{,}4m^2n^3pq^2)$.

2.16. 1) $(a+b)\cdot m$; 2) $(-5x+4y)\cdot 2z$; 3) $3b\cdot(-2a-4b)$; 4) $-6x(5y-2x)$.

2.17. 1) $(2x^2-5xy+y^2)\cdot 2xy$; 2) $\left(-1\frac{1}{2}p^2-\frac{3}{4}pq+q^2\right)\cdot(-2pq)$;

3) $(a^m-2a^2)\cdot a^n$; 4) $(3x^{n+1}-2x^n)\cdot 5x$.

2.18. 1) $2(a-3b)+3(a-2b)$; 2) $a(a+b)-b(a-b)$;

3) $6\cdot(3p+4q)-8\cdot(5p-q)+(p-q)$;

4) $-3\cdot(a-b)-2\cdot(a+b)-(3a-2b)+5\cdot(a-2b)$.

2.19. 1) $(2x+1)\cdot(x+4)$; 2) $(5p-3q)\cdot(4p-q)$;

3) $(5p-3q)\cdot(4p-q)$; 4) $(2a+3b)\cdot(2a-5b)$.

2.20. 1) $\left(-7x^2-8y^2\right)\cdot\left(-x^2+3y^2\right)$; 2) $\left(4z^2-1\right)\cdot\left(z^2+5\right)$;

3) $\left(8a^2-3ab\right)\cdot\left(3a^2-ab\right)$; 4) $\left(5ab^3+4b^3\right)\cdot\left(3ab^3-4a^2\right)$.

2.21. 1) $\left(7x^3y^2-xy\right)\cdot\left(-2x^2y^2+5xy^3\right)$; 2) $\left(x^2+2xy-5y^2\right)\cdot\left(2x^2-3y\right)$;

3) $\left(a^2-5ab+3b^2\right)\cdot\left(a^2-2ab\right)$; 4) $\left(a^2+ab+b^2\right)\cdot(a-b)$.

2.22. 1) $8ab:4b$; 2) $15mn:(-5n)$; 3) $(-6xy):(-4x)$; 4) $(-10pq):6q$.

2.23. 1) $6abc:(-3c)$; 2) $(-24xyz):(-8y)$;

3) $15ab:(-5ab)$; 4) $(-4xyz):(-4xz)$.

2.24. 1) $a^5:a^3$; 2) $-z^7:z^5$; 3) $y^3:(-y)$; 4) $d^{10}:(-d^8)$.

2.25. 1) $a^4:\left(-a^4\right)$; 2) $-b^{2n}:b^n$; 3) $a^{m+1}:a^m$; 4) $x^{n+1}:x^{n-1}$.

2.26. 1) $16x^3y^2:4x^2y$; 2) $20m^4n^3:5m^2n^3$;

3) $4a^2b^2c:(-5abc)$; 4) $-6a^3b^2c:\left(-2a^2bc\right)$.

2.27. 1) $(3ab+4ac):a$; 2) $(15xy-10xz):5x$;

3) $\left(8a^2-4a\right):4a$; 4) $\left(16m^3n+24m^2n^2\right):8m^2n$.

2.28. 1) $\left(4c^2d-12c^4d^3\right):\left(-4c^2d\right)$; 2) $\left(9xy^2-15x^3y^4\right):\left(-3xy^2\right)$;

3) $\left(10m^3n^5+20m^2n^3\right):5m^2n^3$; 4) $\left(18p^4q^3-27p^3q^2\right):9p^2q$.

2.29. 1) $\left(m^2\right)^4$; 2) $\left(-2x^3\right)^2$; 3) $\left(-4a^2\right)^3$ 4) $\left(-3a^5\right)^2$.

2.30. 1) $\left(-3y^4\right)^2$; 2) $\left(\frac{1}{2}b^2\right)^2$; 3) $\left(-0{,}3x^3\right)^3$; 4) $\left(-0{,}7x^5\right)^2$.

2.31. 1) $\left(ab^2c^3\right)^2$; 2) $5\left(x^2y\right)^3$; 3) $\left(-2a^2bc\right)^3$; 4) $\left(-2a^3bc^2\right)^4$.

2.32. 1) $5\left(-a^3b^2c\right)^3$; 2) $-3\left(2a^2b^3\right)^2$; 3) $2\left(-3x^4y^3\right)^3$; 4) $-\frac{1}{2}\left(-5a^3b^4c^2\right)^2$.

2.33. 1) $\left(a^k\right)^3$; 2) $\left(x^{n+1}\right)^2$; 3) $\left(-x^n\right)^2$; 4) $\left(-x^n\right)^3$.

2.34. ტოლია თუ არა:

1) $-x^2$ და $(-x)^2$? 2) $-x^3$ და $(-x)^3$?

3) $-(2a)^4$ და $(-2a)^4$? 4) $-(2a)^5$ და $(-2a)^5$?

შეასრულეთ მოქმედებები შემოკლებული გამრავლების ფორმულების გამოყენებით (№№2.35.-2.53):

2.35. 1) $(x+1)(x-1)$; 2) $(1+a)(1-a)$;
3) $(a+3b)(a-3b)$; 4) $(2m-3n)(3n+2m)$.

2.36. 1) $(2a+3)(2a-3)$; 2) $(3p+1)(3p-1)$;
3) $(5x+3y)(5x-3y)$; 4) $\left(2d-\frac{1}{2}\right)\left(2d+\frac{1}{2}\right)$.

2.37. 1) $(2xy-1)(2xy+1)$; 2) $(5a^2-3b)(5a^2+3b)$;
3) $(a^n+b^n)(a^n-b^n)$; 4) $(x^k-y)(x^k+y)$.

2.38. 1) $(0{,}2t-0{,}5u)(0{,}2t+0{,}5u)$; 2) $(0{,}1m^3-0{,}3n)(0{,}1m^3+0{,}3n)$;
3) $(1{,}2cd+2{,}3x)(1{,}2cd-2{,}3x)$; 4) $\left(0{,}3m+\frac{1}{3}n\right)\left(0{,}3m-\frac{1}{3}n\right)$.

2.39. 1) $(c+1)^2$; 2) $(a^2+1)^2$; 3) $(x^2+y^2)^2$; 4) $(z^3-u^3)^2$.

2.40. 1) $(m^3+n^2)^2$; 2) $(2m^3+3n)^2$; 3) $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2$; 4) $\left(b+\frac{1}{3}\right)^2$.

2.41. 1) $\left(x-\frac{1}{5}\right)^2$; 2) $\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)^2$; 3) $\left(\frac{a}{4}+\frac{b}{3}\right)^2$; 4) $\left(2\frac{1}{3}m+1\frac{1}{2}n\right)^2$.

2.42. 1) $\left(\frac{3}{4}a^2-0{,}5b^3\right)^2$; 2) $(4a^2b+5a^2b^2)^2$;
3) $\left(\frac{3}{5}a^3b-\frac{2}{3}a^3b^4\right)^2$; 4) $(a^{n+1}+a^n)^2$.

2.43. 1) $\left(\frac{5}{6}m^2n^3-\frac{3}{5}mn\right)^2$; 2) $\left(1\frac{3}{4}p^4q^2+1\frac{2}{3}p^3q^3\right)^2$;
3) $(1{,}2x^2y-0{,}5x^3y^2)^2$; 4) $(-2{,}5m^2n^3-0{,}2m^3n^2)^2$.

2.44. 1) $(2x^m-3y^n)^2$; 2) $\left(a^{n+1}+\frac{1}{2}b^2\right)^2$;
3) $\left(\frac{1}{2}a^{n-1}b^2+a^{n+1}\right)^2$; 4) $\left(\frac{2}{3}x^{m-2}-\frac{3}{4}x^{2m-1}\right)^2$.

2.45. 1) $(2a+3b+c)^2$; 2) $(3x-2y+t)^2$;
3) $(2a^2-3b^3-2c)^2$; 4) $(a-2b-3c+d)^2$.

2.46. 1) $(x+y)^2-(x-y)^2$; 2) $(x+4)^2+4(x+1)^2$;

3) $3(2-y)^2+4(y-5)^2$; 4) $5(3-5a)^2-5(3a-7)(3a+7)$.

2.47. 1) $(m+1)^2+3(m-1)^2-5(m+1)(m-1)$;

2) $-(3+x)^2+5(1-x)^2-3(1-x)(1+x)$;

3) $\left[(3x+y)^2-(x+3y)^2\right]\cdot 2xy$; 4) $\left[\left(m^2+2m\right)^2+\left(2m^2-m\right)^2\right]\cdot 45m^2$.

2.48. 1) $(2+a)(2-a)\left(4-a^2\right)$; 2) $(x+y)(x-y)\left(x^2+y^2\right)$;

3) $(x+3)(x-3)(x-3)(x+3)$; 4) $(a+2)^2(a-2)^2$.

2.49. 1) $(a+b+c)(a+b-c)$; 2) $(x-y+z)(x-y-z)$;

3) $(x+2y+3z)(x-2y+3z)$; 4) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$.

2.50. 1) $(m+n)^3$; 2) $(c-d)^3$; 3) $(2+a)^3$; 4) $(3-b)^3$.

2.51. 1) $(x-2)^3$; 2) $(a+2b)^3$; 3) $(2a-3b)^3$; 4) $\left(4m+\frac{1}{3}n\right)^3$.

2.52. 1) $\left(\frac{2}{3}x-3y\right)^3$; 2) $\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\right)^3$; 3) $\left(a^2+b^2\right)^3$; 4) $\left(2a^3-3b^2\right)^3$.

2.53. 1) $(a+1)\left(a^2-a+1\right)$; 2) $(x-2)\left(x^2+2x+4\right)$;

3) $(2a+3b)\left(4a^2-6ab+9b^2\right)$; 4) $\left(1+m^2\right)\left(1-m^2+m^4\right)$.

დაამტკიცეთ შემდეგ ტოლობათა მართებულობა (№№2.54; 2.55):

2.54. 1) $(1+a)(1-a)\left(1+a^2\right)=1-a^4$; 2) $5a^2-3(a+1)(a-1)=2a^2+3$;

3) $7\left(n^2-2\right)-4(n+3)(n-3)=3n^2+22$; 4) $(a-b)^2+4ab=(a+b)^2$.

2.55. 1) $(a-b)^2=(b-a)^2$; 2) $(-a-b)^2=(a+b)^2$;

3) $a^3+3ab(a+b)+b^3=(a+b)^3$; 4) $a^3-3ab(a-b)-b^3=(a-b)^3$.

დაშალეთ მრავალწევრები მამრავლებად საერთო მამრავლის ფრჩხილებს გარეთ გატანის ხერხით (№№2.56-2.71):

2.56. 1) $2x+2y$; 2) $5m-5n$; 3) $10p-5q$; 4) $12c+8d$.

2.57. 1) $ax-ay$; 2) $mn+n$; 3) $ab+b$; 4) $mx-m$.

2.58. 1) $-2a-5ab$; 2) $10+5b$; 3) $7ab+7ac$; 4) $5mn-5m$.

2.59. 1) a^2-ab; 2) x^2+x^3; 3) x^4-x^2; 4) $3x^2-6x^3$.

2.60. 1) $a^3b^2+a^2b^3$; 2) $a^2x^2-ax^3$; 3) $6a^2x+12ax^3$; 4) $9a^3-6a^2b$.

2.61. 1) $4x^3y^3-8x^2y^2$; 2) $8m^2n^3+10mn^2$; 3) a^m+a^{m+1}; 4) $x^{m+1}-x^m$.

2.62. 1) $5x^{m+2}+10x^2$; 2) $a^nb^{2n}-a^nb^n$; 3) $15x^{2n+3}-25x^{n+1}$; 4) $3a^{2n-1}+27a^{n+3}$.

2.63. 1) a^3-2a^2-a; 2) $m^4+3m^3-m^2$; 3) $5x-15xy+10ax$; 4) $3ab+9ac-12ad$.

2.64. 1) $15x^3y^2+10x^3y-20x^2y^3$; 2) $3ab^3+6ab^2-18ab$; 3) $-4x^2y+6x^2y^2-8x^4y^3$; 4) $-3m^4n^2-6m^3n^3+9m^2n^4$.

2.65. 1) $a(x+y)+b(x+y)$; 2) $x(a+3)-y(a+3)$; 3) $a(x-4)+b(x-4)$; 4) $m(a+1)-n(a+1)$.

2.66. 1) $x(a-b)+y(b-a)$; 2) $a(m-n)-b(n-m)$; 3) $p(x-y)-q(y-x)$; 4) $2m(x-3)-5n(3-x)$.

2.67. 1) $2a(x-y)-(y-x)$; 2) $(p-q)+2a(q-p)$; 3) $3x(x-1)-(1-x)$; 4) $2k(a-b)-(b-a)$.

2.68. 1) $3a(x-1)-2b(x-1)+c(x-1)$; 2) $x(p-a)-y(p-a)-z(p-a)$; 3) $p(a^2+b^2)+q(a^2+b^2)-r(a^2+b^2)$; 4) $a(m^2+1)-b(m^2+1)-c(m^2+1)$.

2.69. 1) $x(p-a)+y(a-p)-z(p-a)$; 2) $m(n-2)+p(n-2)+(2-n)$;
3) $x(a+b+c)-y(a+b+c)+z(a+b+c)$;
4) $2a(x+y-z)-3b(x+y-z)-5c(x+y-z)$.

2.70. 1) $3(x+y)+(x+y)^2$; 2) $5(a-b)+2(a-b)^2$; 3) $4(x+y)(x-y)+(x+y)^2$; 4) $2(a-b)^2-(a+b)(a-b)$.

2.71. 1) $(a+b)^3-a(a+b)^2$; 2) $(a^2+b^2)^2-a^2(a^2+b^2)$; 3) $(a-b)^3+b(a-b)^2$; 4) $(x+y)-(x+y)^2$.

დაშალეთ მრავალწევრები მამრავლებად დაჯგუფების ხერხით (№№2.72-2.76):

2.72. 1) $a(x-y)+bx-by$; 2) $ac+bc+a(a+b)$; 3) $a(x-c)+bc-bx$; 4) $m(p+q)-pn-qn$.

2.73. 1) $ax+ay+bx+by$; 2) $ax-ay+bx-by$; 3) $a^2+ab+ac+bc$; 4) $x^2+xy+ax+ay$.

2.74. 1) x^3+3x^2+3x+9; 2) $x^2-xy-2x+2y$;

3) $m^2+mn-5m-5n$; 4) $a^2-ab-3a+3b$.

2.75. 1) $10ay-5by+2ax-bx$; 2) $4x^2-4xz-3x+3z$;

3) $5ax-6bx-5ay+6by$; 4) $10a^2+21xy-14ax-15ay$.

2.76. 1) $ax^2-bx^2-bx+ax-a+b$; 2) $ax^2+bx^2-bx-ax+a+b$;

3) $ax^2+bx^2+ax-cx^2+bx-cx$; 4) $ax^2+bx^2-bx-ax+cx^2-cx$.

დაშალეთ მრავალწევრები მამრავლებად შემოკლებული გამრავლების ფორმულების გამოყენებით (№№2.77-2.93):

2.77. 1) $25-x^2$; 2) c^2-36; 3) $1-m^2$; 4) $4x^2-9$.

2.78. 1) $36q^2-25$; 2) $1-81x^2$; 3) $\frac{1}{4}a^2-b^2$; 4) $\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{4}y^2$.

2.79. 1) a^2b^2-4; 2) $49-p^2q^2$; 3) $a^2x^2-\frac{1}{4}b^2$; 4) $1-0{,}01a^2$.

2.80. 1) $x^4y^2-z^2$; 2) a^6-4; 3) a^4-b^4; 4) $1-16a^4$.

2.81. 1) $(3a-4b)^2-9p^2$; 2) $(a-3b)^2-16c^2$;

3) $(2m-1)^2-100n^2$; 4) $(x-y)^2-x^2y^2$.

2.82. 1) $(x+1)^2-\frac{1}{4}x^2$; 2) $(c-2)^2-\frac{4}{9}c^2$;

3) $(a+3)^2-0{,}25$; 4) $(b-c)^2-0{,}04b^2$.

2.83. 1) $p^2-(q-r)^2$; 2) $a^2-(2b+c)^2$;

3) $16a^2-(x-y)^2$; 4) $49c^2-(a-b)^2$.

2.84. 1) $a^4b^2-\left(c^2-d\right)^2$; 2) $9a^2b^4-(c-d)^2$;

3) $\frac{1}{4}x^2-(a-b)^2$; 4) $\frac{4}{25}y^2-(x-y)^2$.

2.85. 1) $(1+x)^2-(y+z)^2$; 2) $\left(m^2+n^2\right)^2-\left(p^2+1\right)^2$;

3) $(4+7a)^2-(8b-9c)^2$; 4) $(m+n)^2-(4-5b)^2$.

2.86. 1) $9(m+n)^2-(m-n)^2$; 2) $4(a-b)^2-(a+b)^2$;

3) $16(a+b)^2-9(x+y)^2$; 4) $9(a-b)^2-4(x-y)^2$.

2.87. 1) a^2+6a+9; 2) a^2-6a+9;

3) $4a^2+4a+1$; 4) $9m^2-6m+1$.

2.88. 1) $a^4+2a^2b+b^2$; 2) $x^4-2bx^2+b^2$;

3) $25m^4-10m^2n+n^2$; 4) $9p^4+6p^2q+q^2$.

2.89. 1) $-x^4-2nx^2-n^2$; 2) $-9c^2+12cd^2-4d^4$;

3) $4a^4-4a^2b^2+b^4$; 4) $36p^4+12p^2q^2+q^4$.

2.90. 1) $m^3+6m^2n+12mn^2+8n^3$; 2) $a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3$;

3) $125m^3+75m^2+15m+1$; 4) $64-96a+48a^2-8a^3$.

2.91. 1) p^3+q^3; 2) p^3-q^3; 3) a^3+8; 4) a^3+27.

2.92. 1) $27a^6-1$; 2) $64a^6b^3-d^3$; 3) x^3-8x^6; 4) $27x^3-8y^3$.

2.93. 1) $\frac{1}{64}a^6-b^3$; 2) $\frac{1}{8}a^6b^9-\frac{1}{27}c^6$; 3) $\frac{8}{27}a^6b^3-1$; 4) $\frac{27}{125}a^3b^{12}-\frac{1}{8}c^6$.

დაშალეთ მრავალწევრები მამრავლებად (№№2.94-2.100):

2.94. 1) $2x^2+4xy+2y^2$; 2) $6p^2-12p+6$;

3) $3xy^2+6xy+3x$; 4) $12x^5y+24x^4y+12x^3y$.

2.95. 1) $(a^2+1)^2-4a^2$; 2) $81-(x^2+6x)^2$;

3) $9(5n-4p)^2-64n^2$; 4) $100x^2-4(7x-2y)^2$.

2.96. 1) $x^2+2xy+y^2-1$; 2) $9-x^2+2xy-y^2$;

3) $4a^2-20ab+25b^2-36$; 4) $25x^2-4a^2+12ab-9b^2$.

2.97. 1) a^2-b^2-a+b; 2) x^2-y^2+x+y;

3) $m^3-m^2n-mn^2+n^3$; 4) $x^3+x^2y-xy^2-y^3$.

2.98. 1) $a^2+2ab+b^2-ac-bc$; 2) $xz-yz-x^2+2xy-y^2$;

3) $m^2+2mn+n^2-p^2+2pq-q^2$; 4) $a^2+2ab+b^2-c^2-2cd-d^2$.

2.99. 1) $x^5-x^3+x^2-1$; 2) $m^5+m^3-m^2-1$;

3) $a^3+a^2b-ab^2-b^3$; 4) $x^3-x^2y-xy^2+y^3$.

2.100. 1) x^2-5x+6; 2) $a^2-7ab+12b^2$; 3) x^2-x-12; 4) $a^2+2ab-15b^2$.

2.101. შეასრულეთ გაყოფა:

1) $(2x^3-5x^2+8x-3):(x^2-2x+3)$;

2) $(6x^4+5x^3-11x^2+9x-5):(3x^2+4x-5)$;

3) $(5x^3+6x^2-x+78):(x+3)$;

4) $(x^6-2x^5-4x^4+3x^3-3x^2+11x-6):(x^2+x-2)$.

2.102. დაშალეთ მამრავლებად:

1) x^3-5x^2+2x+8; 2) x^3-2x^2-x-6;

3) $x^4-3x^3-2x^2+8x-6$; 4) $x^4-2x^3+3x^2-5x-2$.

2.103. გაყოფის შეუსრულებლად იპოვეთ ნაშთი:

1) $(5x^4-3x^3+7x^2+1):(x-2)$; 2) $(7x^6+2x^4-x^3+2x+1):(x+1)$;

3) $(3x^4+3x^3-5x^2+6x+7):(x-1)$; 4) $(x^3+5x^2-3x-4):(2x+1)$.

2.104. p-ს რა მნიშვნელობისათვის გაიყოფა უნაშთოდ $3x^3-16x^2+9x+p$ მრავალწევრი $(x+3)$-ზე?

2.105. p-ს რა მნიშვნელობისათვის მოგვცემს $3x^4-4x^3+2x+p$ მრავალწევრის $(x-1)$-ზე გაყოფა ნაშთს $R=5$?

2.106. p და q რიცხვების რა მნიშვნელობისათვის იყოფა $2x^4-3x^3+px^2+qx+p$ მრავალწევრი (x^2-1)-ზე უნაშთოდ?

2.107. p და q რიცხვების რა მნიშვნელობისათვის იყოფა $px^3+qx^2-37x+14$ მრავალწევრი (x^2+x-2)-ზე უნაშთოდ?

§3. მოქმედებები რაციონალურ გამოსახულებებზე

შეკვეცეთ წილადები (№№3.1-3.10):

3.1. 1) $\dfrac{5a-5b}{10a}$; 2) $\dfrac{3x+3y}{6x}$; 3) $\dfrac{4m-4n}{8a+8b}$; 4) $\dfrac{6p+6q}{12x+12y}$.

3.2. 1) $\dfrac{ac-bc}{ac+bc}$; 2) $\dfrac{a^2}{a^2+ab}$; 3) $\dfrac{k^2+k}{kx-ky}$; 4) $\dfrac{a^2+3ab}{a^2b+3ab^2}$.

3.3. 1) $\dfrac{x-y}{x^2-y^2}$; 2) $\dfrac{a^2-b^2}{ax-bx}$; 3) $\dfrac{a^3-2a^2}{a^2-4}$; 4) $\dfrac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$.

3.4. 1) $\dfrac{3x^2+4xy}{9x^2y-16y^3}$; 2) $\dfrac{x^2-2xy}{2y^2-xy}$; 3) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$; 4) $\dfrac{1-x^3}{3+3x+3x^2}$.

3.5. 1) $\dfrac{3x^2-3xy}{3(x-y)^2}$; 2) $\dfrac{20a^2-45b^2}{(2a+3b)^2}$;

3) $\dfrac{3a^2-6ab+3b^2}{6a^2-6b^2}$; 4) $\dfrac{5m^2+10mn+5n^2}{15m^2-15n^2}$.

3.6. 1) $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$; 2) $\frac{p^3-q^3}{p^2-q^2}$; 3) $\frac{2x^3-2y^3}{5x^2-5y^2}$; 4) $\frac{3m^2-3n^2}{6m^3+6n^3}$.

3.7. 1) $\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$; 2) $\frac{a^4-x^4}{a^2-x^2}$; 3) $\frac{a^3-b^3}{a^4-b^4}$; 4) $\frac{x^4-y^4}{x^3+y^3}$.

3.8. 1) $\frac{ax+ay-bx-by}{ax-ay-bx+by}$; 2) $\frac{ab+ac+b^2+bc}{ax+ay+bx+by}$;

3) $\frac{(a+b)^2-c^2}{a+b+c}$; 4) $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$.

3.9. 1) $\frac{1-3y+3y^2-y^3}{z-zy+x-xy}$; 2) $\frac{5a^3+a^2b+5ab^2+b^3}{5ab+b^2}$;

3) $\frac{3x^2y-xy^2}{3x^3-3xy^2-x^2y+y^3}$; 4) $\frac{a^2b+ab^2}{a^3+b^3+3ab(a+b)}$.

3.10. 1) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+9}$; 2) $\frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}$; 3) $\frac{a^2+3a+2}{a^2+6a+5}$; 4) $\frac{x^2+2x+1}{x^2+8x+7}$.

შეასრულეთ მოქმედებები წილადებზე (№№3.11-3.31):

3.11. 1) $\frac{a+b}{3}+\frac{a}{3}$; 2) $\frac{m-n}{a}+\frac{m+n}{a}$; 3) $\frac{5x+1}{2}-\frac{x}{2}$; 4) $\frac{x-1}{4}+\frac{x+2}{4}-\frac{x-3}{4}$.

3.12. 1) $\frac{x+4}{a-2}+\frac{x+3}{a-2}$; 2) $\frac{1-m}{p-q}-\frac{1-3m}{p-q}$; 3) $\frac{a+1}{a-1}+\frac{a-2}{1-a}$; 4) $\frac{x+y}{x-y}-\frac{y+2x}{y-x}$.

3.13. 1) $\frac{x}{5}-\frac{y}{8}$; 2) $\frac{x}{3}+\frac{3x}{10}+\frac{4x}{15}$; 3) $\frac{4a-5b}{12}-\frac{3a-2b}{18}$; 4) $\frac{2b^2-3a^2}{5}-\frac{5a^2-b^2}{4}$.

3.14. 1) $\frac{3}{a}+\frac{5}{b}$; 2) $\frac{7}{x}-\frac{4}{a}$; 3) $\frac{m}{xy}-\frac{n}{xz}$; 4) $\frac{2p}{ax}+\frac{3q}{bx}$.

3.15. 1) $\frac{5x}{mn}-\frac{3y}{mp}$; 2) $\frac{2a-3b}{a}+\frac{4a^2-5b^2}{ab}$;

3) $\frac{2b^2+3ax}{bx}-\frac{2ab+5bx}{ax}$; 4) $\frac{3c^2+5ab}{ac}+\frac{b^2-3ac}{bc}$.

3.16. 1) $\frac{3a}{x^2}-\frac{3}{x}$; 2) $\frac{5n}{a^2}-\frac{2m}{a^3}$; 3) $\frac{1}{m^4n^3}+\frac{2}{m^3n^4}$; 4) $\frac{a}{2x}-\frac{b}{3x^2}$.

3.17. 1) $\frac{2a-3b}{a^2b}-\frac{4a-5b}{ab^2}$; 2) $\frac{5a^2-3b}{a^2b}+\frac{6a-2b^2}{a^2b^2}$;

3) $\dfrac{2a^2+3a-5}{a^2b}+\dfrac{4a-1}{ab}$; 4) $\dfrac{5x^2-2x-1}{x^2y}-\dfrac{3x-2}{xy}$.

3.18. 1) $\dfrac{5}{2x-2}+\dfrac{3}{4x-4}$; 2) $\dfrac{3x}{4x+4y}-\dfrac{x}{8x+8y}$;

3) $\dfrac{7x}{3x+3y}-\dfrac{2x}{3x-3y}$; 4) $\dfrac{3m}{an+am}+\dfrac{2n}{bn+bm}$.

3.19. 1) $\dfrac{7a}{x^2-9}+\dfrac{5a}{x-3}+\dfrac{a}{x+3}$; 2) $\dfrac{4}{x+2}+\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{x+2}{x^2-4}$;

3) $\dfrac{m}{1-a}-\dfrac{m}{1+a}+\dfrac{m}{1-a^2}$; 4) $\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{a-2}-\dfrac{4}{a^2-4}$.

3.20. 1) $\dfrac{7a-1}{2a^2+6a}+\dfrac{5-3a}{a^2-9}$; 2) $\dfrac{a-b}{5a+5b}-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$;

3) $\dfrac{a+b}{a}-\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b^2}{a^2-ab}$; 4) $\dfrac{7}{2x-4}-\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{12}{x^2-4}$.

3.21. 1) $\dfrac{3}{a+2}+\dfrac{a+1}{a^2-9}-\dfrac{a-1}{(a+3)(a+2)}$; 2) $\dfrac{5}{x-3}-\dfrac{x-2}{x^2-9}+\dfrac{x-1}{2x+6}$;

3) $\dfrac{1}{2x+2}-\dfrac{x-1}{3x^2+6x+3}$; 4) $\dfrac{4}{3m-3n}+\dfrac{3m-n}{2m^2-4mn+2n^2}$.

3.22. 1) $\dfrac{1+a}{a-3}-\dfrac{1-2a}{3+a}-\dfrac{a(1-a)}{9-a^2}$; 2) $\dfrac{(x-1)x}{x^2-25}-\dfrac{x-3}{x+5}+\dfrac{x-2}{5-x}$;

3) $\dfrac{1}{p-3}-\dfrac{3}{2p+6}-\dfrac{p}{2p^2-12p+18}$; 4) $\dfrac{7}{m}-\dfrac{4}{m-2n}-\dfrac{m-n}{4n^2-m^2}$.

3.23. 1) $\dfrac{4a^2-3a+5}{a^3-1}-\dfrac{1-2a}{a^2+a+1}+\dfrac{6}{1-a}$;

2) $\dfrac{3}{a^2+2ab+b^2}-\dfrac{4}{a^2-2ab+b^2}+\dfrac{5}{a^2-b^2}$;

3) $\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{3ab}{a^3-b^3}-\dfrac{b-a}{a^2+ab+b^2}$; 4) $\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{4a^2b-ab^2}{b^3-a^3}+\dfrac{b^2}{a^2+ab+b^2}$.

3.24. 1) $\dfrac{9xy}{5ab}\cdot\dfrac{3ab}{4yz}\cdot\dfrac{4bz}{3axy}$; 2) $\dfrac{2ax}{yz}:\dfrac{3bx}{ay}:\dfrac{9b^2z}{8a^2xy}$;

3) $\left(\dfrac{8b^2cd}{9a^5}:\dfrac{7cd}{12a^3}\right)\cdot\dfrac{28a^4}{3b^2}$; 4) $\dfrac{3p^2mq}{2a^2b^2}\cdot\dfrac{3abc}{8x^2y^2}:\dfrac{9a^2b^2c^3}{28pxy}$.

3.25. 1) $\frac{x^2-y^2}{6x^2y^2}:\frac{x+y}{3xy}$; 2) $\frac{x^2+xy}{x}:\frac{xy+y^2}{y}$;

3) $\frac{4p^2-9q^2}{p^2q^2}:\frac{2ap+3aq}{2pq}$; 4) $\frac{x^2-xy}{x^2+xy}\cdot\frac{x^2y+xy^2}{xy}$.

3.26. 1) $\frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot\frac{a^4}{(a+b)^2}$; 2) $\frac{a^2-25}{a^2-3a}:\frac{a^2+5a}{a^2-9}$;

3) $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{3a+3b}{4a-4b}$; 4) $\frac{5-5a}{(1+a)^2}:\frac{10-10a^2}{3+3a}$.

3.27. 1) $\frac{ax+ay}{x^2-2xy+y^2}\cdot\frac{2x+2y}{ax^2+2axy+ay^2}$; 2) $\frac{x^2+xy}{5x^2-5y^2}:\frac{x^2-xy}{3x^3+3y^3}$;

3) $\frac{a^4-x^4}{a^3-x^3}:\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$; 4) $\frac{5x^2-10xy}{x^2+4y^2}\cdot\frac{x^4-16y^4}{15(x-2y)^2}$.

3.28. 1) $(x^2-1)\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-1\right)$; 2) $\left(\frac{a}{x-a}-\frac{a}{x+a}\right)\cdot\frac{x^2+2ax+a^2}{2a^2}$;

3) $\left(\frac{x}{x-a}-\frac{a}{x+a}\right):\left(\frac{x+a}{a}-\frac{x-a}{x}\right)$; 4) $\left(m+1-\frac{1}{1-m}\right):\left(m-\frac{m^2}{m-1}\right)$.

3.29. 1) $\left(\frac{3a}{1-3a}+\frac{2a}{3a+1}\right):\frac{6a^2+10a}{1-6a+9a^2}$; 2) $\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y}{x}\right):\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)$;

3) $\left(1+\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}\right)\cdot\left(1-\frac{a}{x}\right)\cdot\frac{x^3}{a^3-x^3}$; 4) $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right):\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right):\left(1+\frac{y}{x}\right)$.

3.30. 1) $\left(\frac{b}{a^2-ab}+\frac{a}{b^2-ab}\right)\cdot\frac{a^2b+ab^2}{a^2-b^2}$; 2) $\left(\frac{2a}{a+2}+\frac{2a}{6-3a}+\frac{8a}{a^2-4}\right):\frac{a-4}{a-2}$;

3) $\left(\frac{a^2}{a+n}-\frac{a^3}{a^2+n^2+2an}\right):\left(\frac{a}{a+n}-\frac{a^2}{a^2-n^2}\right)$;

4) $\left(\frac{2ab}{4a^2-9b^2}+\frac{b}{3b-2a}\right):\left(1-\frac{2a-3b}{2a+3b}\right)$.

3.31. 1) $\left(\frac{p}{p^2-4}+\frac{2}{2-p}+\frac{1}{p+2}\right):\left(p-2+\frac{10-p^2}{p+2}\right)$;

2) $\left(\frac{1}{p-2q}+\frac{6q}{4q^2-p^2}-\frac{2}{p+2q}\right):\left(\frac{p^2+4q^2}{p^2-4q^2}+1\right)$;

3) $\left(\dfrac{2a}{2a+b}-\dfrac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\dfrac{2a}{4a^2-b^2}+\dfrac{1}{b-2a}\right)$;

4) $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$.

გაამარტივეთ და გამოთვალეთ (№№3.32-3.35):

3.32. 1) $\dfrac{a^3b-ab^3}{a^2b-ab^2}$, თუ $a=3\dfrac{1}{7}, b=2\dfrac{6}{7}$;

2) $\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)\cdot\dfrac{xy}{x+y}$, თუ $x=17\dfrac{3}{5},\ y=2{,}1$;

3) $\left(\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{1}{x}\right):\dfrac{x-y}{xy^2}$, თუ $a=17\dfrac{3}{5},\ b=\dfrac{2}{5}$;

4) $\dfrac{x^2-1}{x^2+x+1}:\dfrac{x+1}{x^3-1}$, თუ $x=81$.

3.33. 1) $\left(\dfrac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}-(y-x)\right)^2$, თუ $x=2\dfrac{1}{4},\ y=-\dfrac{3}{4}$;

2) $\dfrac{a^4b+ab^4}{(a+b)^2-3ab}\cdot\dfrac{ab}{a+b}$, თუ $a=7\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{2}{3}$;

3) $\dfrac{5x^3y+5xy^3}{x^4-y^4}\cdot\left(\dfrac{1}{x^2-y^2}\right)^{-1}$, თუ $x=7{,}2,\ y=\dfrac{1}{4}$.

4) $\left(2-\dfrac{2x}{x+2}\right)\cdot\left(x^3+2x^2\right)$, თუ $x=2{,}5$.

3.34. 1) $\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{2y}{x^3-y^3}\cdot\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}$, თუ $x=3\dfrac{1}{4},\ y=-5\dfrac{3}{4}$;

2) $\left(\dfrac{xy-y^2}{x^2-y^2}+\dfrac{x}{x+y}\right)\cdot xy$, თუ $x=9\dfrac{2}{7},\ y=\dfrac{7}{13}$;

3) $\dfrac{x^3-y^3}{x-y}-\dfrac{x^3+y^3}{x+y}$, თუ $x=3\dfrac{10}{13},\ y=1\dfrac{6}{7}$;

4) $\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)\cdot\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{a^2}$, თუ $a=19\dfrac{3}{17},\ b=\dfrac{1}{7}$.

3.35. 1) $\dfrac{b}{a^2+ab}+\dfrac{2}{a+b}+\dfrac{a}{b^2+ab}$, თუ $a=\dfrac{1}{17},\ b=-\dfrac{1}{5}$;

2) $\dfrac{2x^2+x}{x^3-1}-\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$, თუ $x=1\dfrac{1}{21}$;

3) $\dfrac{(5x+2y)^2-40xy}{5x-2y}$, თუ $x=9\dfrac{1}{5}$, $y=7\dfrac{1}{2}$;

4) $\dfrac{(2x+3y)^3-36x^2y-54xy^2}{4x^2-6xy+9y^2}$, თუ $x=27\dfrac{1}{2}$, $y=-16\dfrac{1}{3}$.

შეასრულეთ მოქმედებები წილადებზე (№№3.36-3.42):

3.36. 1) $\left(\dfrac{a-1}{3a+(a-1)^2}-\dfrac{1-3a+a^2}{a^3-1}-\dfrac{1}{a-1}\right):\dfrac{a^2+1}{1-a}$;

2) $\left(\dfrac{a^2-ab}{a^2b+b^3}-\dfrac{2a^2}{b^3-ab^2+a^2b-a^3}\right)\cdot\left(1-\dfrac{b-1}{a}-\dfrac{b}{a^2}\right)$;

3) $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{2}{x+y}\cdot\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\right):\dfrac{x^3+y^3}{x^2y^2}$;

4) $\left(\dfrac{1}{2a-b}+\dfrac{3b}{b^2-4a^2}-\dfrac{2}{2a+b}\right):\left(\dfrac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2}+1\right)$.

3.37. 1) $\left(\dfrac{a^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2b}{a^2+b^2}\cdot\left(\dfrac{a}{ab+b^2}+\dfrac{b}{a^2+ab}\right)\right):\dfrac{b}{a-b}$;

2) $\left(\dfrac{p^2-q^2}{pq}-\dfrac{1}{p+q}\cdot\left(\dfrac{p^2}{q}-\dfrac{q^2}{p}\right)\right):\dfrac{p-q}{p}$;

3) $\left(\dfrac{b^2+c^2}{b^2c^2}\cdot\left(\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)-\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)\cdot\dfrac{a^2+c^2}{a^2c^2}\right):\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}$;

4) $\left(\dfrac{2}{3x}-\dfrac{2}{x+y}\cdot\left(\dfrac{x+y}{3x}-x-y\right)\right):\dfrac{x-y}{x}$.

3.38. 1) $\left(\dfrac{2}{(m+n)^3}\cdot\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{m^2+2mn+n^2}\cdot\left(\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}\right)\right):\dfrac{m-n}{m^3n^3}$;

2) $\left(\dfrac{1}{a^2-b^2}+\dfrac{1}{a^2+2ab+b^2}\right):\dfrac{2a}{a^2-b^2}$;

3) $\left(\frac{1}{c^2+2cd+d^2}+\frac{1}{c^2-d^2}-\frac{1}{c^2-2cd+d^2}\right):\frac{d^2+4cd-c^2}{c^2-d^2}$;

4) $\left(\frac{2x^2+3x}{4x^2+12x+9}-\frac{3x+2}{2x+3}+\frac{4x-1}{2x+3}\right)\cdot\frac{2x+3}{2x-3}$.

3.39. 1) $\left(\frac{0{,}5a-1{,}5}{0{,}5a^2-1{,}5a+4{,}5}-\frac{2a-6}{\frac{1}{3}a^3+9}\right):\frac{a-3}{0{,}8a^3+21{,}6}$;

2) $\frac{4a-2b}{3ab}:\left(\frac{8ab}{12a^2-3b^2}+\frac{2a-b}{2a+b}-\frac{2a+b}{6a-3b}\right)$;

3) $\frac{xy}{x+y}:\left(\frac{x^2}{(x^2-y^2)(x+y)}-\frac{2xy^2}{x^4-2x^2y^2+y^4}+\frac{y^2}{(x-y)^2(x+y)}\right)$;

4) $\frac{a^2+b^2}{ab}\cdot\left(\frac{6a+b}{a^2-b^2}:\frac{6a^3+b^3+a^2b+6ab^2}{2ab^2-2a^2b}+\frac{a+b}{a^2+b^2}\right)$.

3.40. 1) $\left(\frac{5}{a^2-2a-ax+2x}-\frac{1}{8-8a+2a^2}\cdot\frac{20-10a}{x-2}\right):\frac{25}{x^3-8}$;

2) $\left(\frac{3a}{9-3x-3a+ax}-\frac{1}{a^2-9}:\frac{x-a}{3a^2+9a}\right)\cdot\frac{x^3-27}{3a}$;

3) $\frac{2}{a}-\left(\frac{a^2}{a^2+ab}-\frac{a^2-b^2}{ab}-\frac{b^2}{ab+b^2}\right)\cdot\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$;

4) $\left(\frac{3-a}{9+a^2}-\frac{6a}{a^3-3a^2+9a-27}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{a}-\frac{3}{a^2}\right)$.

3.41. 1) $\left(\frac{1}{0{,}5x+y}-\frac{2y}{0{,}25x^2+xy+y^2}\right):\left(\frac{0{,}5x}{0{,}25x^2-y^2}+\frac{1}{2y-x}\right)$;

2) $\left(\frac{2}{m+n}+\frac{2m}{m^3-n^3}:\frac{m+n}{m^2+mn+n^2}\right)\cdot\frac{m^2-2mn+n^2}{8m-4n}$;

3) $\left(\frac{a^2+b^2}{a}+b\right)\left(b-\frac{b^2}{a+b}\right):\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$;

4) $\left(\frac{1}{27m^3}+\frac{1}{n^3}\right)\left(\frac{n^2-3mn}{3mn-n^2-9m^2}+1\right)$.

3.42. 1) $\left(\dfrac{1+ax^{-1}}{a^{-1}x^{-1}}\cdot\dfrac{a^{-1}-x^{-1}}{a^{-1}x-ax^{-1}}\right):\dfrac{ax^{-1}}{x-a}$;

2) $\left[\dfrac{y^2\left(xy^{-1}-1\right)^2}{x\left(1+x^{-1}y\right)^2}\cdot\dfrac{y^2\left(x^{-2}-y^{-2}\right)}{x\left(xy^{-1}-x^{-1}y\right)}\right]:\dfrac{1-x^{-1}y}{xy^{-1}+1}$;

3) $\dfrac{1}{4}\left(xa^{-1}-ax^{-1}\right)\left(\dfrac{a^{-1}-x^{-1}}{a^{-1}+x^{-1}}-\dfrac{a^{-1}+x^{-1}}{a^{-1}-x^{-1}}\right)$;

4) $\left(\dfrac{a^{-n}-b^{-n}}{a^{-2n}-a^{-n}b^{-n}+b^{-2n}}\right)^{-1}+\left(\dfrac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-2n}+a^{-n}b^{-n}+b^{-2n}}\right)^{-1}$.

გაამარტივეთ და გამოთვალეთ (№№3.43-3.48):

3.43. 1) $\left(\dfrac{1}{8x^3}-\dfrac{1}{y^3}\right):\left(\dfrac{1}{4x^2}+\dfrac{1}{2xy}+\dfrac{1}{y^2}\right)$, თუ $x=2\dfrac{1}{2},\ y=2$;

2) $\left(ab+\dfrac{a^3}{a+b}\right):\dfrac{a^3-b^3}{a^2b-b^3}$, თუ $a=17\dfrac{1}{3},\ b=9$;

3) $\dfrac{2x^2y+2xy^2}{9x^3+x^2y+9xy^2+y^3}:\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, თუ $x=-\dfrac{1}{9},\ y=3$;

4) $\dfrac{(4x-3y)^2+48xy}{4x+3y}$, თუ $x=5\dfrac{1}{4},\ y=-3\dfrac{1}{3}$.

3.44. 1) $\dfrac{(5a-b)^3+75a^2b-15ab^2}{25a^2+5ab+b^2}$, თუ $a=9\dfrac{1}{5},\ b=2$;

2) $\dfrac{64x^3+27y^3}{16x^2-9y^2}:\dfrac{16x^2-12xy+9y^2}{16x^2-24xy+9y^2}$, თუ $x=3\dfrac{1}{4},\ y=2\dfrac{1}{3}$;

3) $\left(\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{a}{x+a}\right):\dfrac{2a}{x^2+2ax+a^2}\cdot\dfrac{a-x}{x^2+ax}$, თუ $x=5\dfrac{3}{5}, a=-11\dfrac{1}{5}$;

4) $\dfrac{m^3+n^3+3m^2n+3mn^2}{2m^2n^2+mn^3+m^3n}$, თუ $n=\dfrac{1}{9},\ m=-\dfrac{1}{7}$.

3.45. 1) $\dfrac{1+ax^{-1}}{a^{-1}x^{-1}}\cdot\dfrac{a^{-1}-x^{-1}}{a^{-1}x-ax^{-1}}$, თუ $a=191,\ x=-19\dfrac{1}{3}$;

2) $\dfrac{y^{-1}-x^{-1}}{y^{-3}-x^{-3}}:\left(\dfrac{x^2+xy+y^2}{xy}\right)^{-1}$, თუ $x=8,\ y=11\dfrac{1}{4}$;

3) $\dfrac{\left(x^{-1}y^{-2}\right)^{2}\left(x^{-2}y^{-1}\right)^{-3}}{\left(x^{-3}y^{-1}\right)^{-1}\left(x^{0}y\right)^{-3}}$, თუ $x=-16,\ y=9\frac{1}{8}$;

4) $\dfrac{\left(x^{-5}y^{-3}\right)^{2}x^{-4}y^{2}}{\left(x^{3}y\right)^{-7}\left(x^{-3}y^{3}\right)^{-2}y^{8}}$, თუ $x=7\frac{1}{9},\ y=18$.

3.46. 1) $\left(\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^3-x^2-x+1}-2\right)^3$, თუ $x=6$;

2) $\left(\dfrac{x^4-y^4}{5x^3y+5xy^3}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{1}{x^2-y^2}\right)^{-1}$, თუ $x=9\frac{1}{5},\ y=\frac{1}{23}$;

3) $\left(\dfrac{x^6-y^3}{x^2-y}-3x^2y\right)^{\frac{1}{2}}$, თუ $x=9,\ y=-7$;

4) $\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-2}-2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}$, თუ $a=11\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{4}$.

3.47. 1) $\dfrac{a^2b+2ab^2+b^3}{a-b}\cdot\left(\dfrac{a}{ab+b^2}-\dfrac{a^2+b^2}{a^3-ab^2}+\dfrac{b}{a^2-ab}\right)$, თუ $a=71, b=25$;

2) $\left(\dfrac{2x^2y+2xy^2}{9x^3+x^2y+9xy^2+y^3}\cdot\dfrac{9x+y}{x^2-y^2}+\dfrac{x-y}{x^2+y^2}\right)\cdot14\left(x^2-y^2\right)$,

თუ $x=\frac{1}{7},\ y=\frac{1}{14}$;

3) $\dfrac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2c}{ab}\right)(a+b+2c)}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}-\frac{4c^2}{a^2b^2}}+c^2$, თუ $a=7{,}4,\ b=\frac{5}{37},\ c=2$;

4) $\dfrac{36a^3-144a-36a^2+144}{a^3+27}\cdot\left(1+\left(\dfrac{a}{3}\right)^{-3}\right)\cdot\dfrac{1}{16a^{-2}-4}$, თუ $a=0{,}3$.

3.48. 1) $\left(6a^2+5a-1+\dfrac{a+4}{a+1}\right):\left(3a-2+\dfrac{3}{a+1}\right)$, თუ $a=1{,}3$;

2) $\left(x+\dfrac{5x^3-5x^2+4x-2}{x^2+1}\right):\left(\dfrac{2x^3+3x^2+x+2}{x^2+1}-2x\right)$, თუ $x=0{,}3$;

3) $\left(2+\dfrac{x^4+2x^3-4x^2-8x+7}{x-2}\right):\left(2x-\dfrac{x^2-6x+1}{x-2}\right)$, თუ $x=0{,}2$;

4) $\left(x^2+2x-\dfrac{11x-2}{3x+1}\right):\left(x+1-\dfrac{2x^2+x+2}{3x+1}\right)$, თუ $x=7\dfrac{1}{3}$.

გაამარტივეთ (№№3.49-3.52):

3.49. 1) $\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{|x|\left(x^2-2x+1\right)}:\dfrac{|x-1|}{2x}$, თუ $0<x<1$;

2) $\dfrac{x^2+1+|2x+1|}{|x||x-2|}$, თუ $x<-1$; 3) $\dfrac{\left|x^3-1\right|+|x+1|}{|x|\left(x^2+1\right)}$, თუ $x>2$;

4) $\dfrac{\left|x^2-1\right|-x^2}{2x^2-1}-\dfrac{|x-1|}{2x-2}$, თუ $0<x<\dfrac{1}{2}$.

3.50. 1) $\dfrac{a^2-4-|a-2|}{a^3+2a^2-5a-6}$; 2) $\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{\left(x^3-4x^2+3x\right)\cdot|x-2|}$;

3) $\dfrac{x|x-3|+x^2-9}{2x^3-3x^2-9x}$; 4) $\dfrac{2|a+5|-a+\dfrac{25}{a}}{3a^2+10a-25}$.

3.51. 1) $\dfrac{m|m-3|}{\left(m^2-m-6\right)|m|}$; 2) $\dfrac{|x-1|+|x|+x}{3x^2-4x+1}$;

3) $\dfrac{\left|x^2-1\right|+x^2}{2x^2-1}-\dfrac{|x-1|}{x-1}$; 4) $\dfrac{x^2-1+|x+1|}{|x|(x-2)}$.

3.52. 1) $\dfrac{2x-x|x-1|+x|x|+3}{|x|+x^2}$; 2) $\dfrac{\left|x^3-1\right|+|x+1|}{x^3+x}$;

3) $\left|x^2-1\right|+x|x+1|$; 4) $\left(\dfrac{|x-1|}{x-1}\cdot x^2-2x\dfrac{|x+1|}{x+1}+2x-4\right):|x-2|$.

§4. მოქმედებები რადიკალებზე. ალგებრულ გამოსახულებათა გარდაქმნა

ამოიღეთ კვადრატული ფესვი რიცხვებიდან (№№4.1-4.5):

4.1. 1) 841; 2) 784; 3) 7921; 4) 5329.

4.2. 1) 57600; 2) 54756; 3) 17424; 4) 56169.

4.3. 1) 700569; 2) 632025; 3) 3426201; 4) 2934369.

4.4. 1) $\frac{121}{324}$; 2) $\frac{361}{1849}$; 3) $5\frac{1}{16}$; 4) $552\frac{1}{4}$.

4.5. 1) 0,9801; 2) 0,003969; 3) 2,7889; 4) 19,9809.

იპოვეთ ფესვის მნიშვნელობა (№№4.6; 4.7):

4.6. 1) $\sqrt[6]{64}$; $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt[3]{-125}$; $\sqrt{3^4}$; 2) $\sqrt{2^6}$; $\sqrt[3]{2^6}$; $\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^6}$; $\sqrt[4]{3^8}$;

3) $\sqrt{(-3)^2}$; $\sqrt[4]{(-3)^4}$; $\sqrt{(-5)^4}$. 4) $\sqrt{x^4}$; $\sqrt[6]{y^{12}}$; $\sqrt[3]{x^{6m}}$; $\sqrt[n]{a^{3n}}$.

4.7. 1) $\sqrt{\frac{1}{4}x^2y^4}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{27}a^3b^9}$; $\sqrt[4]{a^8b^4c^{12}}$; $\sqrt{\frac{4a^2b^4}{25c^2d^6}}$;

2) $\sqrt[3]{-64x^3y^6z^9}$; $\sqrt[3]{-\frac{8a^6b^3c^9}{27x^{12}}}$; $3xy\sqrt[3]{-\frac{64a^3b^9}{27x^3y^6}}$;

3) $\sqrt[5]{m^{-10}}$; $\sqrt[3]{-a^{-6}}$; $\sqrt{9a^4}$; $\sqrt[4]{16x^{-8}y^4}$;

4) $\sqrt[3]{\frac{8a^{-1}}{27b^{-9}}}$; $\sqrt{\frac{a^{-2}b^4}{25x^{-6}}}$; $\sqrt[3]{\frac{64a^{-12}b^{15}}{125c^{-6}d^{-3}}}$.

გამოიტანეთ მამრავლი ფესვიდან (№№4.8; 4.9):

4.8. 1) $\sqrt{98}$; $\sqrt{54}$; $\sqrt{168}$; $\sqrt{280}$; 2) $\sqrt[3]{16}$; $\sqrt[3]{72}$; $\sqrt[4]{243}$; $\sqrt[5]{96}$;

3) $\sqrt{a^3}$; $\sqrt{9a}$; $\sqrt{2a^2}$; $\sqrt{5a^4}$; 4) $\sqrt[3]{8m^2}$; $\sqrt[3]{5n^3}$; $\sqrt[3]{2x^6}$; $\sqrt[3]{16y^5}$.

4.9. 1) $2\sqrt{9a^2bc^3}$; $\frac{2}{3}\sqrt[3]{27x^4y^2z^5}$; 2) $\frac{3a}{4}\sqrt[4]{16a^5bc^8}$; $\frac{2c}{3}\sqrt[4]{81c^6d^5}$;

3) $\sqrt{\frac{a^2b}{9}}$; $\sqrt[3]{\frac{x^6y}{a^3b^9}}$; 4) $m^2\sqrt{\frac{25n^3}{36m^4}}$; $\frac{a}{x}\sqrt[3]{\frac{27x^6y^5}{125a^9b^3}}$.

შეიტანეთ მამრავლები რადიკალის ქვეშ (№№4.10; 4.11):

4.10. 1) $2\sqrt{2}$; $5\sqrt{3}$; $4\sqrt{5}$; $2\sqrt{7}$; 2) $2\sqrt[3]{2}$; $3\sqrt[3]{2}$; $2\sqrt[3]{3}$; $5\sqrt[3]{2}$;

3) $2\sqrt{a}$; $a\sqrt[3]{5}$; $x\sqrt[3]{10}$; $a\sqrt[5]{7}$; 4) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$; $\frac{2}{3}\sqrt{3}$; $\frac{3}{5}\sqrt{a}$; $\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$.

4.11. 1) $a\sqrt{a}$; $b\sqrt[3]{b^2}$; $a^2\sqrt{x}$; $a^2\sqrt[3]{b^2c^2x}$;

2) $2m\sqrt{mn}$; $c^2\sqrt{5bc}$; $x^2\sqrt[3]{2ax}$; $2b\sqrt[3]{x}$;

3) $ab\sqrt{\frac{b}{a}}$; $2xy\sqrt{\frac{3x}{2y}}$; 4) $\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$; $\frac{x}{y^2}\sqrt[4]{\frac{y}{x}}$.

შეკვეცეთ ფესვისა და ფესვქვეშა გამოსახულების მაჩვენებლები (№№4.12; 4.13):

4.12. 1) $\sqrt[4]{a^2}$; $\sqrt[6]{m^3}$; 2) $\sqrt[6]{b^4}$; $\sqrt[20]{x^{15}}$;

3) $\sqrt[4]{25x^2y^2}$; $\sqrt[6]{27m^3n^3}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{4m^6}{9n^2}}$; $\sqrt[9]{\frac{8a^6b^{12}}{27c^3d^9}}$.

4.13. 1) $\sqrt[6]{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$; 2) $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$; 3) $\sqrt[8]{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}$; 4) $\sqrt[6]{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^2}$.

შეასრულეთ მოქმედებანი (№№4.14; 4.15):

4.14. 1) $\left(2\sqrt{18}+3\sqrt{8}\right)+\left(3\sqrt{32}-\sqrt{50}\right)$;

2) $\left(2\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{18}\right)+\left(\sqrt{72}-\sqrt{80}\right)$;

3) $\left(0{,}5\sqrt{24}-3\sqrt{40}\right)-\left(\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{1000}\right)$;

4) $\left(\sqrt{32}+\sqrt{18}-2\sqrt{12}\right)-\left(\sqrt{8}-\sqrt{48}\right)$.

4.15. 1) $\left(5\sqrt{a}-3\sqrt{25a}\right)+\left(2\sqrt{36a}+2\sqrt{9a}\right)$;

2) $\left(\sqrt[3]{125x}-\sqrt[3]{8x}\right)-\left(\sqrt[3]{27x}-\sqrt[3]{64x}\right)$;

3) $\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{16a}\right)+\left(\sqrt[4]{81a}-\sqrt[4]{625a}\right)$;

4) $\left(\sqrt{9x}-\sqrt[3]{8y}\right)-\left(\sqrt[3]{27y}-\sqrt{16x}\right)$.

შეასრულეთ გამრავლება (№№4.16-4.20):

4.16. 1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$; $\sqrt{10}\cdot\sqrt{20}$; 2) $3\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{14}$; $\frac{3}{4}\sqrt{24}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{6}$;

3) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{3}$; $5\sqrt[3]{48}\cdot 2\sqrt[3]{4}$; 4) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}$; $2\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot 3\sqrt[4]{2}$.

4.17. 1) $\left(2\sqrt{18}+3\sqrt{50}\right)\cdot 2\sqrt{2}$; 2) $\left(\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}\right)\cdot\sqrt[3]{32}$;

3) $\left(2\sqrt[3]{81}+5\sqrt[3]{24}\right)\cdot 5\sqrt[3]{9}$; 4) $\left(3\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{128}\right)\cdot 5\sqrt[3]{4}$.

4.18. 1) $\sqrt[4]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}$; 2) $5\sqrt[4]{8a^3}\cdot 2\sqrt{2a}$;

3) $3\sqrt[3]{a}\cdot 2\sqrt[4]{\dfrac{x}{a}}$; 4) $\sqrt[3]{\dfrac{0{,}4}{a}}\cdot\dfrac{3}{4}\sqrt{2\dfrac{1}{2}a}$.

4.19. 1) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^5}$; 2) $m\sqrt{3m}\cdot\sqrt[4]{3m}\cdot m^2\sqrt[8]{3m^8}$;

3) $\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}\cdot\dfrac{b}{a}\sqrt[5]{\dfrac{y^2}{x}}$; 4) $\sqrt[4]{\dfrac{a^3}{b}}\sqrt[6]{\dfrac{a^2}{b^5}}\sqrt[10]{\dfrac{b}{a}}$.

4.20. 1) $\left(\sqrt{ab}+2\sqrt{\dfrac{b}{a}}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{1}{ab}}\right)\cdot\sqrt{ab}$;

2) $\left(4x\sqrt[3]{x^2}-5y\sqrt[3]{xy}+xy\sqrt[3]{y^2}\right)\cdot 2xy\sqrt[3]{xy}$;

3) $\left(\sqrt{ab^2}-3b\sqrt{ab}\right)\cdot\left(2\sqrt{ab}+3b\sqrt[3]{a^2b}\right)$;

4) $\left(a\sqrt{a}+\sqrt[6]{a}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-a\sqrt[4]{a^3}\right)$.

შეასრულეთ გამრავლება შემოკლებული გამრავლების ფორმულების მეშვეობით (№№4.21; 4.22):

4.21. 1) $\left(a+\sqrt{3}\right)\left(a-\sqrt{3}\right)$; 2) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)$;

3) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$; 4) $\left(5\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)\left(5\sqrt{2}-4\sqrt{3}\right)$.

4.22. 1) $\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{b}\right)$;

2) $\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)$;

3) $\left(\sqrt{m}+\sqrt{m-1}\right)\left(\sqrt{m}-\sqrt{m-1}\right)$; 4) $\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\right)$.

4.23. შეასრულეთ მოქმედებანი და გაამარტივეთ:

1) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{3}$; 2) $\dfrac{5+3\sqrt{2}}{4}-\dfrac{\sqrt{2}-1}{6}$;

3) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{5}-\dfrac{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}-5\sqrt{5}}{15}$;

4) $\dfrac{3\sqrt{6}-2\sqrt{5}+1}{8}-\dfrac{\sqrt{6}-3\sqrt{5}-2}{6}-\dfrac{4\sqrt{6}+5\sqrt{5}-1}{12}$.

შეასრულეთ გაყოფა (№№4.24–4.26):

4.24. 1) $\sqrt{10} : 0{,}5\sqrt{2{,}5}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{4}{25}} : \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{125}}$;

3) $\left(10\sqrt[3]{9} + 5\sqrt{3}\right) : \sqrt[3]{3}$; 4) $\left(2\sqrt{12} + 4\sqrt[3]{4} - 6\sqrt[4]{32}\right) : 2\sqrt[4]{2}$.

4.25. 1) $\left(8\sqrt{27} - 6\sqrt{12}\right) : \sqrt{75}$; 2) $\left(3\sqrt[3]{250} - 2\sqrt[3]{54}\right) : 3\sqrt[3]{2}$;

3) $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{\sqrt{35} - \sqrt{14}} : \sqrt{\frac{3}{28}}$; 4) $\frac{\sqrt{35} - \sqrt{10}}{\sqrt{70} - \sqrt{20}} : \frac{\sqrt{8} - \sqrt{50}}{6}$.

4.26. 1) $\sqrt[3]{6a^4} : \sqrt[3]{2a}$; 2) $\sqrt{a} : \sqrt[3]{a^2}$;

3) $\left(\sqrt{x^3 y} + \sqrt{xy^3}\right) : \sqrt{xy}$; 4) $\left(\sqrt{a^5 b^3} - \sqrt{a^3 b^5}\right) : \sqrt{a^3 b^3}$.

დაშალეთ მამრავლებად (№№4.27-4.31):

4.27. 1) $\sqrt{6} + \sqrt{3}$; 2) $\sqrt{15} - \sqrt{10}$; 3) $\sqrt{21} + \sqrt{14}$; 4) $\sqrt{20} - \sqrt{30}$.

4.28. 1) $\sqrt{ab} - \sqrt{ac}$; 2) $\sqrt[3]{a^2 y} - \sqrt[3]{b^2 y}$;

3) $\sqrt[3]{a^2 b} - \sqrt[3]{ab^2}$; 4) $\sqrt{a+b} - \sqrt{a^2 - b^2}$.

4.29. 1) $5 + \sqrt{5}$; 2) $2 - \sqrt{2}$; 3) $a + \sqrt{a}$; 4) $ab - \sqrt{a}$.

4.30. 1) $a + b + \sqrt{a+b}$; 2) $a + b - \sqrt{a^2 - b^2}$;

3) $\sqrt{a^3 - b^3} + \sqrt{a - b}$; 4) $\sqrt{a^3 + b^3} + \sqrt{a^2 - b^2}$.

4.31. 1) $\sqrt{ax} - \sqrt{by} + \sqrt{bx} - \sqrt{ay}$; 2) $\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3} + \sqrt{x^2 y} - \sqrt{xy^2}$;

3) $x + 4\sqrt{x} + 3$; 4) $a + 5\sqrt{a} + 4$.

შეკვეცეთ წილადები (№№4.32; 4.33):

4.32. 1) $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{\sqrt{35} - \sqrt{14}}$; 2) $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{15}}{\sqrt{8} + \sqrt{12}}$; 3) $\frac{a + \sqrt{ab}}{b + \sqrt{ab}}$; 4) $\frac{\sqrt[3]{x^2 y} - \sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[3]{ax} - \sqrt[3]{ay}}$.

4.33. 1) $\frac{\sqrt[3]{4m^2} - \sqrt[3]{9n^2}}{\sqrt[3]{2m} + \sqrt[3]{3n}}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{25a^2} - \sqrt[3]{16b^2}}{\sqrt[3]{5a} - \sqrt[3]{4b}}$;

3) $\frac{\sqrt[3]{x^2 y} - \sqrt[3]{16xy^2} + \sqrt[3]{4y^3}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2y}}$; 4) $\frac{\sqrt{8x^2 y} - 2y\sqrt{x} - x\sqrt{x}}{\sqrt{2y} - \sqrt{x}}$.

4.34. აახარისხეთ ფესვები:

1) $\left(\sqrt[3]{m^2}\right)^4$; $\left(-\sqrt[3]{m^2}\right)^4$; $\left(\sqrt[5]{a^3}\right)^2$; $\left(-\sqrt[7]{n^3}\right)^2$;

2) $\left(\sqrt[4]{x^3}\right)^3$; $\left(-\sqrt[5]{y^2}\right)^3$; $\left(-\sqrt[3]{a^2}\right)^5$; $\left(-\sqrt[6]{n^5}\right)^7$;

3) $\left(-2\sqrt{a}\right)^3$; $\left(-3\sqrt[4]{a^3}\right)^3$; $\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{m^2}\right)^2$; $\left(-\frac{2}{3}\sqrt[5]{x^2}\right)^3$;

4) $\left(-\frac{x}{2y}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^4$; $\left(-x\sqrt[4]{x^3y^2}\right)^5$.

4.35. რომელია მეტი:

$\sqrt[3]{3}$ თუ $\sqrt{2}$? $\sqrt{5}$ თუ $\sqrt[3]{11}$? $\sqrt[7]{5}$ თუ $\sqrt[3]{2}$? $\sqrt[3]{4}$ თუ $\sqrt[4]{5}$?

შეასრულეთ მოქმედებანი (№№4.36-4.41):

4.36. 1) $\left(a-\sqrt{b}\right)^2$; 2) $\left(2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}\right)^2$;

3) $\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)^2$; 4) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)^2$.

4.37. 1) $\left(a^{1/2}+b^{1/2}\right)^2$; 2) $\left(x^{1/3}-y^{1/3}\right)^2$;

3) $\left(m^{-1/3}-n^{2/3}\right)^2$; 4) $\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^2$.

4.38. 1) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2$; 2) $\left(3\sqrt{15}-5\sqrt{10}\right)^2$;

3) $\left(\sqrt{7+\sqrt{13}}+\sqrt{7-\sqrt{13}}\right)^2$; 4) $\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2$.

4.39. 1) $\sqrt{\sqrt{a}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}$; $\sqrt[3]{\sqrt[4]{m^3}}$; $\sqrt[4]{\sqrt[5]{y^4}}$;

2) $\sqrt{2\sqrt{3}}$; $\sqrt[3]{2\sqrt{5}}$; $\sqrt{3\sqrt[3]{2}}$; $\sqrt[4]{5\sqrt{2}}$;

3) $\sqrt{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}}$; $\sqrt{\frac{m}{n}\sqrt[3]{\frac{n}{m}}}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{a^2}{b}\sqrt{\frac{b^2}{a}}}$; $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}}$.

4.40. 1) $\sqrt[3]{2\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{\frac{16}{5}}$; 2) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{1\frac{7}{25}}$;

3) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\cdot\sqrt[8]{2}$; 4) $\sqrt[3]{3\sqrt{3\sqrt{3}}}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[12]{3}$.

4.41. 1) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$; 2) $\sqrt[3]{m\sqrt[3]{m\sqrt{m}}}$;

3) $\sqrt{\frac{m}{n}\sqrt{\frac{n}{m}\sqrt{\frac{m}{n}}}}$; 4) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2}{a}\sqrt{\frac{1}{a^2}}}}$.

მოსპეთ ირაციონალობა წილადის მნიშვნელში (№№4.42-4.49):

4.42. 1) $\frac{8}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{9}{\sqrt[3]{4}}$; 3) $\frac{5}{2\sqrt[3]{25}}$; 4) $\frac{16}{\sqrt[8]{8}}$.

4.43. 1) $\frac{a}{\sqrt{a}}$; 2) $\frac{a}{\sqrt[7]{x^4}}$; 3) $\frac{b}{b\sqrt[6]{a}}$; 4) $\frac{a}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

4.44. 1) $\frac{2}{2+\sqrt{2}}$; 2) $\frac{12}{3-\sqrt{3}}$; 3) $\frac{18}{\sqrt{7}-1}$; 4) $\frac{8}{\sqrt{5}+1}$.

4.45. 1) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; 2) $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$; 3) $\frac{6}{3\sqrt{2}+4}$; 4) $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$.

4.46. 1) $\frac{m}{\sqrt{m}+1}$; 2) $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; 3) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; 4) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

4.47. 1) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$;

3) $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{14}-\sqrt{21}}$; 4) $\frac{2-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-2}$.

4.48. 1) $\frac{n}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$; 2) $\frac{n}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$; 3) $\frac{6}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4}}$; 4) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}+1}$.

4.49. 1) $\frac{n}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$; 2) $\frac{n}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$;

3) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25}}$.

გაამარტივეთ და გამოთვალეთ (№№4.50-4.69):

4.50. 1) $\frac{4-2\sqrt{x}}{x-4}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$, თუ $x=8$;

2) $\left(\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{2\sqrt{ab}}-1\right)\cdot\sqrt{ab}$, თუ $a=2+\sqrt{2},\ b=4-\sqrt{2}$;

3) $\left(\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}{2\sqrt{a}}-1\right)\cdot\sqrt{a}$, თუ $a=7$;

4) $\left(\sqrt[4]{a}+\frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}\right)\sqrt{a}$, თუ $a=4$.

4.51. 1) $\frac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-2x^{-\frac{1}{2}}}$, თუ $x=5$;

2) $\frac{8}{\sqrt[4]{x}+2}+\frac{x-8\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}-4}$, თუ $x=9$;

3) $\frac{a^{3/2}-2^{3/2}}{\sqrt{a}-\sqrt{2}}-\left(a^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}\right)^2$, თუ $a=2$;

4) $\left(\frac{4}{a}+\frac{2}{\sqrt{a}}+1\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-2}{a\sqrt{a}-8}$, თუ $a=\frac{2}{5}$.

4.52. 1) $\sqrt{\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-3\sqrt{ab}}$, თუ $a=6{,}25,\ b=2{,}25$;

2) $\frac{x-1}{x+\sqrt{x}+1}:\frac{\sqrt{x}-1}{1-x\sqrt{x}}$, თუ $x=\sqrt{3}+1$;

3) $\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^{-2}$, თუ $x=4$;

4) $\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{ab}$, თუ $a=2+\sqrt{2},\ b=3-\sqrt{2}$.

4.53. 1) $\frac{\left(\sqrt{a}-1\right)^2+3\sqrt{a}}{a^{3/2}-1}$, თუ $a=2{,}25$;

2) $\sqrt{a}-\frac{4\sqrt{a}-2a}{2-\sqrt{a}}$, თუ $a=6{,}25$;

3) $\dfrac{\sqrt{a}}{a-9}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}-3\right)$, თუ $a=6{,}25$;

4) $\dfrac{4x}{x-4\sqrt{x}+4}\cdot\left(\dfrac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{8\sqrt{x}}-1\right)$, თუ $x=1{,}44$.

4.54. 1) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\dfrac{2ab-a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{4}$, თუ $a=2,\ b=8$;

2) $\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[6]{a^2x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{a}}\right)^3$, თუ $x=64,\ a=\sqrt{2}$;

3) $\left(2\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right)^3+36a\sqrt{b}-54b\sqrt{a}$, თუ $a=\sqrt[3]{4},\ \mathrm{b}=\sqrt[3]{9}$;

4) $\left(\dfrac{\sqrt{a^3}+\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{x}}-\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{x}\right)^{1/2}$, თუ $a=18,\ x=1024$.

4.55. 1) $a^{1/2}b^{-\frac{3}{4}}a^{5/6}b^2a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{4}}$, თუ $a=\sqrt{3},\ \mathrm{b}=2\sqrt{3}$;

2) $x\sqrt{x}\cdot y^{-\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}y^{4/3}x^{-\frac{1}{6}}$, თუ $x=2\sqrt{2},\ y=\sqrt{2}$;

3) $\sqrt[3]{m\cdot\sqrt[4]{m^3}}\cdot\sqrt[4]{m\sqrt[3]{m^2}}$, თუ $m=144$;

4) $\sqrt[5]{a^2\sqrt{a}}\cdot\sqrt[3]{a^4\sqrt{a}}$, თუ $a=8$.

4.56. 1) $\dfrac{x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, თუ $x=2,\ y=18$;

2) $\left(\dfrac{1-\sqrt{x}+x}{1+x\sqrt{x}}\right)^{-2}-2\sqrt{x}$, თუ $x=187$;

3) $\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)^{-2}+\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt[4]{a}}\right)^{-2}$, თუ $a=13$;

4) $\left(\sqrt[4]{5a}+\dfrac{1-\sqrt{5a}}{\sqrt[4]{5a}}\right)^{-2}$, თუ $a=\dfrac{5}{4}$.

4.57. 1) $\left(\dfrac{b}{a-\sqrt{ab}}-\dfrac{b}{a+\sqrt{ab}}\right)\cdot\dfrac{b-a}{2\sqrt{ab}}$, თუ $a=5,\ b=10$;

2) $\left(\dfrac{\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)\cdot\dfrac{xy}{x+y}$, თუ $x=3,\ y=27$;

3) $\left(\dfrac{a^2-4}{a}-3\right):\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}-2a^{-1}}{\left(\sqrt{a}+2\right)^{-1}}$, თუ $a=21$;

4) $\left(\sqrt{a}+\dfrac{7-\sqrt{7a}}{\sqrt{a}+\sqrt{7}}\right)\cdot\dfrac{7-a}{\sqrt{7}-\sqrt{a}}$, თუ $a=13$.

4.58. 1) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{a^2}:\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$, თუ $a=16,\ x=2$;

2) $\dfrac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}-\dfrac{a+\sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ax}}+\sqrt[4]{ax}$, თუ $a=2,\ x=8$;

3) $\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}+\dfrac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x}-1}\right)^{-12}$, თუ $x=\sqrt[3]{7}$;

4) $\left(\dfrac{b+c-1}{2\sqrt{bc}}+1\right)\cdot\dfrac{4\sqrt{bc}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}+1}$, თუ $b=1,\ c=5$.

4.59. 1) $\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+2a\sqrt{b}+2b\sqrt{a}}$, თუ $a=8,\ b=2$;

2) $\sqrt{\dfrac{a+x^2}{2\sqrt{a}}+x}+\sqrt{\dfrac{a+x^2}{2\sqrt{a}}-x}$, თუ $a=4,\ x=\sqrt[3]{7}$;

3) $\sqrt{mn}-\dfrac{mn}{m+\sqrt{mn}}+\dfrac{m\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$, თუ $n=\sqrt[5]{2},\ m=31$;

4) $\dfrac{\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}+\dfrac{\sqrt[4]{m}}{\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}}$, თუ $m=\sqrt{10},\ n=\sqrt{5}$.

4.60. 1) $\left[\dfrac{\left(y^{1/4}+\sqrt{3}\right)\left(y^{3/4}-3\sqrt{3}\right)}{y^{1/2}+\sqrt[4]{9y}+3}\right]^5$, თუ $y=\left(3+\sqrt[5]{7}\right)^2$;

2) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{a\sqrt{x^3}}{x^2}\cdot\left(\dfrac{1}{x\sqrt[3]{a}}\right)^{-2}\right)^{-2}\cdot\sqrt[3]{a}}$, თუ $a=\dfrac{\sqrt{3}}{4},\ x=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$;

3) $\left[\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{3}{2}}-1} : \dfrac{a}{\left(\sqrt{a}-1\right)^2+3\sqrt{a}}\right]^{-2}$, თუ $a=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$;

4) $\dfrac{\sqrt[4]{ab^3}-\sqrt[4]{a^3b}}{(a-b)\cdot a^{-1}b}\cdot\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[4]{ab}}$, თუ $a=12,\ b=6$.

4.61. 1) $\left(\dfrac{2\sqrt{a}+1}{a-18\sqrt{a}}+\dfrac{2\sqrt{a}-1}{a+18\sqrt{a}}\right)\cdot\left(\dfrac{a^2+9a}{\sqrt{a}(a-324)}\right)^{-1}$, თუ $a=116$;

2) $\left(\dfrac{1}{\left(2\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}+\dfrac{2}{4a-b}+\dfrac{1}{\left(2\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}\right)\cdot\dfrac{12a+12\sqrt{ab}+3b}{16\sqrt{a}}$, თუ $a=4,\ b=9$;

3) $\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-4\sqrt{x}+3}-\dfrac{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}{x+\sqrt{xy}-3\sqrt{x}-3\sqrt{y}}\right)\left(4\sqrt{x}-12\right)$,

თუ $x=0{,}17,\ y=0{,}17$;

4) $\dfrac{\sqrt{y}}{27-y\sqrt{y}}\left(1+\dfrac{3}{\sqrt{y}}+\dfrac{9}{y}\right):\left(1-\dfrac{3}{\sqrt{y}}\right)^{-1}$, თუ $y=\dfrac{2}{7}$.

4.62. 1) $\left(\dfrac{4-2\sqrt{x}}{x-4}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\right):\left(\dfrac{8\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-\sqrt{x}-2\right)$, თუ $x=144$;

2) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+2\right)\cdot x$, თუ $x=\sqrt{3}$;

3) $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x}+5}-\dfrac{1-x}{1+x\sqrt{x}}\cdot\dfrac{x-\sqrt{x}+1}{x^{-1/2}-1}\right)^{-1}$, თუ $x=0{,}25$;

4) $\left(1-b\sqrt{b}\right)^{-1}\left(\dfrac{1}{2\left(1+\sqrt[4]{b}\right)}-\dfrac{1}{2\left(\sqrt[4]{b}-1\right)}-\dfrac{b+2}{1-b\sqrt{b}}\right)^{-1}$, თუ $b=\dfrac{1}{36}$.

4.63. 1) $\left(\dfrac{1-\sqrt{q}}{q\sqrt{q}+27}\right)^{-1}:\left(\dfrac{\sqrt{q}-3}{q-3\sqrt{q}+9}-\dfrac{\sqrt{q}-9}{q\sqrt{q}+27}\right)^{-1}$, თუ $q=2{,}25$;

2) $\left(\left(\dfrac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{b}-1}\right)^{-1}-\left(\dfrac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{b}+1}\right)^{-1}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4\sqrt{b}}-\left(\dfrac{4}{\sqrt{b}}\right)^{-1}\right)$,

თუ $b=\frac{4}{9}$;

3) $\frac{\sqrt{x}-3}{4x\sqrt{x}+108}:\left(\frac{6\sqrt{x}-18}{x\sqrt{x}+27}-\frac{\sqrt{x}-3}{x-3\sqrt{x}+9}\right)$, თუ $x=64$;

4) $\sqrt{x}-4\sqrt[4]{xy}-\frac{x-\sqrt[4]{xy^3}}{\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)^2+3\sqrt[4]{xy}}$, თუ $x=27,\ y=3$.

4.64. 1) $\left(\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2-1}{x\left(x^2+1\right)^{-1/2}+1}\right)^{-1}:\left(\frac{4x^2}{x^2+1}\right)^{-1/2}$, თუ $x=\sqrt[4]{2{,}25}$;

2) $\frac{1}{\sqrt[3]{y^{-2}}}\left(\sqrt[6]{x}+\frac{\sqrt[6]{y^2x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}\right)^3$, თუ $x=0{,}16,\ y=0{,}125$;

3) $\left(1+\frac{2}{\sqrt{p}}+\frac{1}{p}\right)^{-1/2}\left(\frac{1+\sqrt{p}}{\sqrt[4]{p}}+\frac{\sqrt[4]{p^3}-\sqrt[4]{p}}{1-\sqrt{p}}\right)^2$, თუ $p=\frac{1}{81}$;

4) $\left(\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2x}}{\sqrt[3]{4x^2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2x}}\right)^{-3}$, თუ $x=0{,}2$.

4.65. 1) $\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3+2a^{3/2}+b^{3/2}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}+\sqrt{ab}$,

თუ $a=0{,}125,\ \ b=2$;

2) $\left(\frac{x^2}{2\sqrt{x^2-1}}-\frac{1+x\sqrt{\left(x^2-1\right)^{-1}}}{2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\right):\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}$, თუ $x=0{,}7$;

3) $\frac{\sqrt[3]{2x^2}-\sqrt[3]{4x}}{\sqrt[3]{5x}-\sqrt[3]{10}}+\left(\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{\frac{4}{5}}\right)\sqrt[3]{\frac{x}{2}}$, თუ $x=7\sqrt{7}$;

4) $\left(\frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}-\frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}\right):\frac{\sqrt{a+1}}{a}$, თუ $a=9$.

4.66. 1) $\left(\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{x}}-\sqrt{a^2+2a\sqrt{x}+x}\right)^4$, თუ $a=3\sqrt[4]{2},\ x=5$;

2) $\dfrac{2\left(x^{-1/2}+y^{-1/2}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^3}+\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}$, თუ $x=\dfrac{5}{39},\ y=2$;

3) $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x+y}-\dfrac{\sqrt{y}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{x^2-y^2}\right)\left(x^{-1/2}+y^{-1/2}\right)$, თუ $x=\dfrac{7}{2},\ y=14$;

4) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\dfrac{4b-a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{a}}{a-b}+\dfrac{2}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$,

თუ $a=18,\ b=0{,}5$.

4.67. 1) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[5]{c}-2\sqrt[10]{c}+1}}{\sqrt[10]{c}-2\sqrt[20]{c}+1}\cdot\dfrac{\sqrt[20]{c}-1}{\sqrt[20]{c}+1}+\dfrac{1}{c^3}$, თუ $c=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{4}}$;

2) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-b}+\dfrac{\sqrt{b}}{b\sqrt{a}-2a\sqrt{b}+a\sqrt{a}}:\dfrac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}\right):\dfrac{a-b}{\sqrt{ab}}$, თუ $a=625,\ b=676$;

3) $\left(1+\left(\dfrac{2\sqrt{3a}}{a+3}\right)^{-1}\right):\dfrac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{3}\right)^2-2\sqrt[4]{3a}}{\sqrt{3a}}$, თუ $a=\left(8-\sqrt{3}\right)^2$;

4) $\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2-4\sqrt{xy}}{1+\sqrt{yx^{-1}}}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{x+\sqrt{xy}}$, თუ $x=64,\ y=16$.

4.68. 1) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{b}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{b}-1}+\dfrac{1+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{b}}\right)^{-6}$, თუ $b=0{,}5$;

2) $\dfrac{\sqrt{a^3}+1}{\sqrt[3]{\left(a^2-a\right)^2}}\cdot\dfrac{\left(a\sqrt{a}-1\right)a}{(a-1)^{1/3}\left(a^2+a+1\right)}$, თუ $a=64$;

3) $\dfrac{\sqrt{a\sqrt{3a}}-\sqrt[4]{27a}}{(a-3)a^{-2}}\cdot\left(\sqrt[4]{\dfrac{a}{3}}+\sqrt[4]{\dfrac{3}{a}}\right)$, თუ $a=0{,}5$;

4) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{3\sqrt{a}-9}+\dfrac{3}{9\sqrt{a}-6a+a\sqrt{a}}:\dfrac{1}{3-\sqrt{a}}\right)\cdot\dfrac{6\sqrt{a}}{a-9}$, თუ $a=\dfrac{100}{9}$.

4.69. 1) $\left(\dfrac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}-x+a}+\dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}\right)\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}-1}$, თუ $a=17,\ x=17\sqrt{7}$;

2) $\sqrt{ab}\left(1-\sqrt[3]{ab}\right)-\dfrac{(1-ab)\left(\sqrt[3]{ab}-1\right)}{1+\sqrt{ab}}+5\sqrt[3]{ab}$, თუ $a=8,\ b=27$;

3) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}}\right)\cdot\dfrac{ab^{-1/6}-b^{5/6}}{2\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}$, თუ $a=25,\ b=9$;

4) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-1}{\sqrt[4]{a}-1}+\sqrt[4]{a}\right)^{1/2}\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}+1}{\sqrt[4]{a}+1}-\sqrt{a}\right)\left(a-\sqrt{a^3}\right)^{-1}$, თუ $a=38$.

4.70. გაამარტივეთ:

1) $\sqrt{y^2-6y+9}-|y-9|+2$; 2) $\sqrt{\dfrac{x}{2+x+x^{-1}}}+|x-1|$;

3) $\dfrac{(x-1)\cdot\sqrt{(x-1)^2+4x}}{x^2+1+2|x|}$; 4) $\dfrac{(x+2)\cdot\sqrt{(x+2)^2-8x}}{x^2-4|x-1|}$.

გამოთვალეთ (№№4.71-4.74):

4.71. 1) $\left|3-2\sqrt{3}\right|+\left|4-2\sqrt{3}\right|$; 2) $\left|\dfrac{5\sqrt{2}-1}{5}-1\right|+\left|\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2}-1\right|$;

3) $\left|\dfrac{2\sqrt{3}-2}{3}-\dfrac{1}{2}\right|-\left|\dfrac{2\sqrt{3}-1}{3}-1\right|$; 4) $\left|\dfrac{5\sqrt{5}-7}{5}-1\right|-\left|\dfrac{3\sqrt{5}-4}{3}-1\right|$.

4.72. 1) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}$;

3) $\sqrt{12+8\sqrt{2}}-\sqrt{12-8\sqrt{2}}$; 4) $\sqrt{52+30\sqrt{3}}-\sqrt{52-30\sqrt{3}}$.

4.73. 1) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\,\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}+64}{\sqrt{\sqrt{5}-2}\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}+12}$;

3) $\left(\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}+1\right)^{-1}+\left(\dfrac{1}{5-2\sqrt{6}}+1\right)^{-1}$; 4) $\left(\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+1\right)^{-1}+\left(\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}+1\right)^{-1}$.

4.74. 1) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}\left(3+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$;

2) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}+\dfrac{\sqrt{5}+5}{2}$;

3) $7-2\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{7}\left(\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}}+\dfrac{1}{7-4\sqrt{3}}\right)$;

4) $\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}$.

§5. წრფივი, კვადრატული და მათზე დაყვანადი განტოლებები

ამოხსენით განტოლებები (№№5.1-5.10):

5.1. 1) $x+5=-2$; 2) $7+x=3$; 3) $x+(-2)=-5$; 4) $(-6)+x=0$.

5.2. 1) $3x-2=-17$; 2) $4a+3=-13$; 3) $34-3x=-20$; 4) $\frac{a}{5}+3=-7$.

5.3. 1) $3\frac{5}{6}-4\frac{1}{5}x=-2\frac{7}{12}$; 2) $1\frac{1}{4}x-5\frac{3}{8}=-6\frac{1}{2}$;
3) $0{,}4x-12{,}03=0{,}13$; 4) $0{,}1-0{,}01x=-1$.

5.4. 1) $0{,}12-2{,}5x=-0{,}8$; 2) $4{,}8x-0{,}5=4{,}2\cdot(-3{,}5)$;
3) $1\frac{3}{4}-5x=2\frac{3}{4}:\left(-3\frac{2}{3}\right)$; 4) $20x+0{,}4\cdot\left(-6\frac{1}{4}\right)=4\frac{2}{3}:\left(-\frac{1}{4}\right)$.

5.5. 1) $8a-10+a+2-4a=17$; 2) $5x+7-8x+6x=13$;
3) $-3+9y+135-5y=22$; 4) $-x+6-2x-8x+18=13$.

5.6. 1) $2x+\left(\frac{3}{4}x-\frac{5}{7}x\right)=57$; 2) $\left(25x-5\right)+\left(0{,}2x-2{,}7x\right)+0{,}5x=6{,}5$;
3) $3+2{,}25x+2{,}6=2x+5+0{,}4x$; 4) $0{,}75x-2x=9+0{,}6x-0{,}5$.

5.7. 1) $\frac{2x}{3}+\frac{5x}{2}=19$; 2) $\frac{4x}{9}-\frac{5x}{12}=1$;
3) $\frac{3x}{2}+\frac{x}{6}-\frac{2x}{9}=13$; 4) $\frac{x-3}{3}=4$.

5.8. 1) $\frac{5x-4}{2}=\frac{16x+1}{7}$; 2) $\frac{5-z}{8}=\frac{18-5z}{12}$;
3) $\frac{1-9y}{5}=\frac{19+3y}{8}$; 4) $\frac{4t+33}{21}=\frac{17+t}{14}$.

5.9. 1) $\frac{6x+7}{7}-3=\frac{5x-3}{8}$; 2) $\frac{x-4}{5}=\frac{2x-41}{9}$;
3) $10-\frac{3x-1}{2}=\frac{6x+3}{11}$; 4) $2-\frac{3x-7}{4}+\frac{x+17}{5}=0$.

5.10. 1) $x+\frac{2x-7}{2}-\frac{3x+1}{5}=5-\frac{x+6}{2}$;

2) $\frac{2x-5}{6}+\frac{x+2}{4}=\frac{5-2x}{3}-\frac{6-7x}{4}-x$;

3) $\frac{x-4}{5}+\frac{3x-2}{10}=\frac{2x+1}{3}-7$;

4) $\frac{4x}{3}-17+\frac{3x-17}{4}=\frac{x+5}{2}$.

ამოხსენით განტოლებები x -ის მიმართ(№№5.11; 5.12):

5.11. 1) $5(x-a)=3(x+b)$; 2) $6(a-x)=7(b-x)$;

3) $(m+1)x=n-x$; 4) $(n-1)x=2(n+x)$.

5.12. 1) $(a+x)b-a=(b+1)x+ab$; 2) $2m-(m+n)x=(m-n)x$;

3) $c(d+x)=ab-(x-c)d$; 4) $cx-b(c-x)=a(b-x)-b(a-x)$.

5.13. აჩვენეთ, რომ შემდეგ მაგალითებში განტოლების მთელ სახეზე დაყვანას გარეშე ფესვი შემოაქვს:

1) $\frac{1}{x-2}+3=\frac{3-x}{x-2}$; 2) $5+\frac{1}{x-4}=\frac{5-x}{x-4}$;

3) $\frac{1}{x-5}+6=\frac{6-x}{x-5}$; 4) $\frac{8-x}{x-7}=8+\frac{1}{x-7}$.

5.14. აჩვენეთ, რომ შემდეგ მაგალითებში განტოლების მთელ სახეზე დაყვანა არ არღვევს განტოლებათა ტოლფასობას:

1) $2-\frac{x-3}{x+3}=\frac{3x-1}{3x+1}$; 2) $\frac{8x-5}{2x+5}=5-\frac{3x+7}{3x+2}$.

ამოხსენით განტოლებები (№№5.15; 5.16):

5.15. 1) $\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x+1}$; 2) $\frac{3}{y-2}=\frac{2}{y-3}$;

3) $\frac{3t-1}{3t+1}=2-\frac{t-3}{t+3}$; 4) $\frac{3x-5}{x-1}-\frac{2x-5}{x-2}=1$.

5.16. 1) $\frac{8}{3t-3}-\frac{2+t}{t-1}=\frac{5}{2-2t}-\frac{5}{18}$;

2) $\frac{14}{3z-12}-\frac{2+z}{z-4}=\frac{3}{8-2z}-\frac{5}{6}$;

3) $\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{8}{1-4x^2}$; 4) $\frac{12}{1-9x^2}=\frac{1-3x}{1+3x}+\frac{1+3x}{3x-1}$.

შემდეგ განტოლებათა ამოუხსნელად გამოარკვიეთ, რომელ მათგანს აქვს ორი ფესვი, ერთი ფესვი ან არა აქვს ფესვები (№№5.17-5.19):

5.17. 1) $x^2+25=0$; 2) $x^2-36=0$;

3) $x^2-2x+1=0$; 4) $x^2+5x=0$.

5.18. 1) $x^2-4x+4=0$; 2) $x^2-4x+3=0$;

3) $x^2+7x+15=0$; 4) $x^2-2x+5=0$.

5.19. 1) $x^2-4x-8=0$; 2) $4x^2+6x+9=0$;

3) $7x^2-x-1=0$; 4) $2x^2-3x+1=0$.

ამოხსენით განტოლებები (№№5.20-5.29):

5.20. 1) $x^2-36=0$; 2) $4x^2-25=0$;

3) $\frac{1}{2}x^2+20=38$; 4) $13x^2-19=7x^2+5$.

5.21. 1) $x^2+3x=0$; 2) $x^2=5x$;

3) $2x^2-7x=0$; 4) $-3x^2+5x=0$.

5.22. 1) $4x^2+6x=9x^2-15x$; 2) $12x^2-5x=9x^2+7x$;

3) $\frac{5x^2+9}{6}-\frac{4x^2-9}{5}=3$; 4) $\frac{8x^2-3}{5}+\frac{9x^2-5}{4}=2$.

5.23. 1) $x^2-3x+2=0$; 2) $x^2+5x+6=0$;

3) $x^2-4x+3=0$; 4) $x^2-6x-7=0$.

5.24. 1) $x^2-8x=20$; 2) $x^2+30=11x$;

3) $x^2=x+20$; 4) $7x=x^2+12$.

5.25. 1) $2x^2-7x+6=0$; 2) $5x^2-8x+3=0$;

3) $3x^2+2x-8=0$; 4) $3x^2+11x+6=0$.

5.26. 1) $x^2-\frac{5}{3}x-26=0$; 2) $x^2-4{,}5x+4{,}5=0$;

3) $x^2+3\frac{5}{12}x+2=0$; 4) $x^2-5{,}6x+6{,}4=0$.

5.27. 1) $\frac{5+2x}{4x-3}=\frac{3x+3}{7-x}$; 2) $\frac{5-x}{2x-1}=\frac{15-4x}{3x+1}$;

3) $\frac{x(x-7)}{3}-1=\frac{11x}{10}-\frac{x-4}{3}$; 4) $\frac{7}{x}-\frac{21+65x}{7}+8x+11=0$.

5.28. 1) $\frac{5x-x^2}{3}-\frac{(3x-11)^2}{4}=9-\frac{(7-x)^2}{2}$;

2) $\frac{(x-12)^2}{6}-\frac{x}{9}+\frac{x(x-9)}{18}=\frac{(x-14)^2}{2}+5$;

3) $\frac{5x-1}{9}+\frac{3x-1}{5}=\frac{2}{x}+x-1$;

4) $x-7+\frac{(x-6)^2}{3}=\frac{(x+4)^2}{2}-\frac{(x+2)(x+6)}{4}$.

5.29. 1) $\sqrt{2}z^2+4\sqrt{3}z-2\sqrt{2}=0$; 2) $z^2+2(\sqrt{3}+1)z+2\sqrt{3}=0$;

3) $\frac{x\sqrt{5}}{2x-\sqrt{5}}=\frac{2x}{x\sqrt{5}-3}$; 4) $\frac{2x}{x\sqrt{3}-5}=\frac{x\sqrt{3}}{x-2\sqrt{3}}$.

5.30. ტოლფასია თუ არა განტოლებები:

1) $(x-4)(x+2)=5(x-4)$ და $x+2=5$?

2) $(3-x)(x-1)=(x+2)(x-1)$ და $3-x=x+2$?

3) $x=2-x$ და $x(x-1)=(2-x)(x-1)$?

4) $\frac{x+1}{x-1}=\frac{3-x}{x-1}$ და $x+1=3-x$?

5.31. ამოხსენით ასოითკოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლებები:

1) $x^2-11ax-60a^2=0$; 2) $x^2-4ax+4a^2=b^2$;

3) $\frac{x-b}{a-b}=\frac{x^2}{a^2}$; 4) $\frac{1}{b+x}=\frac{3b}{2x^2}-\frac{1}{x}$.

შემდეგ განტოლებათა ამოუხსნელად იპოვეთ მათი ფესვების ჯამი და ნამრავლი (№№5.32; 5.33):

5.32. 1) $x^2-6x+8=0$; 2) $x^2-5x+6=0$;

3) $8x^2+2x-3=0$; 4) $3x^2-7x+2=0$.

5.33. 1) $4x^2-25=0$; 2) $5x^2+3x=0$;

3) $9x^2-64=0$; 4) $2x^2-7x=0$.

შეადგინეთ კვადრატული განტოლება მოცემული ფესვების მიხედვით (№№5.34-5.36):

5.34. 1) 2 და 3; 2) 6 და –2; 3) $\frac{1}{2}$ და $-\frac{1}{4}$; 4) 0,4 და –0,25.

5.35. 1) $2\sqrt{3}$ და $3\sqrt{3}$; 2) $3\sqrt{5}$ და $-2\sqrt{5}$;

3) $2+\sqrt{3}$ და $2-\sqrt{3}$; 4) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ და $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

5.36. 1) 0 და 3; 2) 0 და $\sqrt{5}$; 3) –2 და 2; 4) $\sqrt{3}$ და $-\sqrt{3}$.

შემდეგ განტოლებათა ამოუხსნელად განსაზღვრეთ ფესვების ნიშნები (№№5.37; 5.38):

5.37. 1) $x^2-6x+5=0$; 2) $x^2+4x-5=0$;

3) $x^2+20x+19=0$; 4) $x^2+3x+1=0$.

5.38. 1) $x^2+9x-22=0$; 2) $x^2-20x-300=0$;

3) $2x^2+5x=-2$; 4) $3x^2+8x=4$.

5.39. დაშალეთ მამრავლებად შემდეგი სამწევრები:

1) $x^2+7x+10$; 2) $3x^2-7x-40$;

3) $4x^2-20x+9$; 4) $2x^2-5x+2$.

5.40. შეკვეცეთ წილადები:

1) $\frac{a^2+6a-91}{a^2+8a-105}$; 2) $\frac{2a^2+8a-90}{3a^2-36a+105}$;

3) $\frac{a^2-9ab+14b^2}{a^2-ab-2b^2}$; 4) $\frac{2a^2-ab-3b^2}{2a^2-5ab+3b^2}$.

5.41. 1) რა მნიშვნელობები უნდა ჰქონდეს x-ს, რომ $y=x^2+7x+10$ ფუნქცია: ა) იქცეს ნულად; ბ) გახდეს 4-ის ტოლი. შეიძლება თუ არა რომ ფუნქცია გახდეს (-5)-ის ტოლი?

2) $y=x^2+7x+6$ და $y=x+1$ ფუნქციები x-ის რომელი მნიშვნელობებისათვის ღებულობენ ტოლ მნიშვნელობებს, და სახელდობრ როგორს?

იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მოცემულ განტოლებას არა აქვს ამონახსნი (№№5.42; 5.43):

5.42. 1) $(a-1)x=5$; 2) $(a+2)x=a^2+4$;

3) $a(a-3)x=7$; 4) $a(2a-1)x=a-\frac{1}{2}$.

5.43. 1) $(a-1)(a+2)x=a+2$; 2) $(a^2-1)x=a^2-4a+3$;

3) $(a^2-4a+3)x=a-1$; 4) $\frac{2}{4x-a}=\frac{7}{ax-1}$.

5.44. იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მოცემულ განტოლებას აქვს უამრავი ამონახსნი:

1) $a(a+2)x=a^2-4$; 2) $(a^2-9)x=a^2-2a-3$;

3) $\frac{6x-a-2}{3x-a}=a$; 4) $a(2x-1)+4=\frac{4x-2ax+3}{a}$.

5.45. როგორი მნიშვნელობა უნდა ჰქონდეს k-ს, რომ განტოლებას:

1) $x^2+kx+15=0$ ჰქონდეს 5-ის ტოლი ფესვი?

2) $x^2+kx-24=0$ ჰქონდეს –3-ის ტოლი ფესვი?

3) $kx^2-15x-7=0$ ჰქონდეს 7-ის ტოლი ფესვი?

4) $kx^2+12x-3=0$ ჰქონდეს $\frac{1}{5}$-ის ტოლი ფესვი?

იპოვეთ a-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც განტოლებას აქვს ერთი ფესვი (№№5.46-5.49):

5.46. 1) $4x^2-12x+a=0$; 2) $x^2-4x+a=0$;

3) $25x^2-40x-2a=0$; 4) $49x^2+28x+4a=0$.

5.47. 1) $9x^2-ax+1=0$; 2) $4x^2-ax+9=0$;

3) $3x^2+2ax+48=0$; 4) $2x^2-3ax+18=0$.

5.48. 1) $x^2-(2a+8)x+9=0$;

2) $x^2-(2a+2)x+5a+1=0$;

3) $ax^2+(2a+1)x+a-2=0$;

4) $(a-1)x^2-2(a+1)x+a-2=0$.

5.49. 1) $\frac{x^2+3x-4}{x-a}=0$; 2) $\frac{x^2-7x+10}{x+a}=0$;

3) $\frac{x^2-5x+6}{ax+6}=0$; 4) $\frac{x^2-x-2}{a^2+2ax+1}=0$.

5.50. იპოვეთ a პარამეტრის იმ მთელ მნიშვნელობებს შორის უმცირესი, რომლისთვისაც მოცემულ განტოლებას აქვს მთელი ამონახსნი:

1) $(a+3)x=6$; 2) $ax-8=x$;

3) $(a-6)x=2a-6$; 4) $(a+2)x=3a+4$.

5.51. 1) მოძებნეთ m-ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $2x^2-(2m+1)x+m^2-9m+39=0$ განტოლების ერთი ფესვი ორჯერ მეტია მეორეზე.

2) p-ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება $x^2+px-16=0$ განტოლების ფესვების შეფარდება –4-ის ტოლი.

3) k-ს რა მნიშვნელობისათვის აკმაყოფილებენ

$$x^2+\frac{36k+1}{2k-3}x+45=0$$

განტოლების x_1 და x_2 ფესვები პირობას $x_1=5x_2$.

4) k-ს რა მნიშვნელობისათვის აკმაყოფილებენ

$x^2+\frac{4k-3}{5-k}x-12=0$

განტოლების x_1 და x_2 ფესვები პირობას $x_1=-3x_2$.

5.52. 1) რა მნიშვნელობა უნდა ჰქონდეს q-ს, რომ $x^2+3x+q=0$ განტოლების ფესვების სხვაობა იყოს 6-ის ტოლი.

2) $x^2+px+12=0$ განტოლების x_1 და x_2 ფესვები აკმაყოფილებენ პირობას $x_1-x_2=1$. იპოვეთ p კოეფიციენ-ტი.

3) იპოვეთ q, თუ $x^2-6x+q=0$ განტოლების x_1 და x_2 ფესვები აკმაყოფილებენ პირობას: $3x_1+2x_2=20$.

4) იპოვეთ k, თუ $3x^2-5x+k=0$ განტოლების x_1 და x_2 ფესვები აკმაყოფილებენ პირობას: $6x_1+x_2=0$.

5.53. შეადგინეთ კვადრატული განტოლება, რომლის:

1) ფესვები ორჯერ მეტი იქნება $x^2-5x+6=0$ განტოლების ფესვებზე.

2) მეორე კოეფიციენტი ტოლია (-15)-ის და ერთი ფესვი ორჯერ მეტია მეორეზე.

3) თითოეული ფესვი $\frac{p}{2}$-ით მეტია $x^2+px+q=0$ განტოლების ფესვებზე.

4) ფესვები $x^2+px+q=0$ განტოლების ფესვების შებრუნე-ბული იქნება.

5.54. 1) $x^2+px+q=0$ განტოლების ამოუხსნელად გამოსახეთ p და q-ს საშუალებით მისი ფესვების კვადრატების ჯამი და კუბების ჯამი.

2) შეადგინეთ კვადრატული განტოლება, რომლის ფესვებია $x^2+px+q=0$ განტოლების ფესვების კუბები.

3) შეადგინეთ $x^2+ax+b=0$ სახის ყველა კვადრატული განტოლება, რომლის a კოეფიციენტი მისი ერთ-ერთი ფესვისა და 3-ის ნამრავლია, ხოლო b –მეორე ფესვისა და 5-ის ნამრავლი.

4) შეადგინეთ $x^2+ax+b=0$ სახის ყველა კვადრატული განტოლება, რომლის a კოეფიციენტი ერთ-ერთი ფესვის ტოლია, ხოლო b –მეორე ფესვისა და $\frac{2}{3}$-ის ნამრავლია.

5.55. 1) c-ს რა დადებითი მნიშვნელობისათვის იქნება $8x^2-6x+9c^2=0$ განტოლების ერთი ფესვი მეორე ფესვის კვადრატის ტოლი.

2) $x^2-10x+q=0$ განტოლებაში იპოვეთ q-ს მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მისი ფესვების კვადრატების ჯამი ტოლია 68-ის.

3) $7x^2-a(x-1)=7$ განტოლებაში იპოვეთ a-ს მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მისი x_1 და x_2 ფესვები აკმაყოფილებენ პირობას $x_1+x_2=x_1^2+x_2^2$.

4) $x^2-x-q=0$ განტოლებაში იპოვეთ q-ს მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მისი x_1 და x_2 ფესვები აკმაყოფილებენ პირობას $x_1^3+x_2^3=19$.

5.56. 1) p და q-ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება $x^2+px+q=0$ განტოლების ამონახსნები p და q.

2) p და q-ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება $x^2+px+q=0$ განტოლების ამონახსნები $9p+q$ და $6p+q$.

3) იპოვეთ m-ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $x^2-x+3m=0$ ($m\neq 0$) განტოლების ერთ-ერთი ფესვი $x^2-x+m=0$ განტოლების ფესვისა და 2-ის ნამრავლია.

4) იპოვეთ b-ს მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $x^2-5x+8b=0$ ($b\neq 0$) განტოლების ერთ-ერთი ფესვი $x^2-2x+b=0$ განტოლების ფესვისა და 3-ის ნამრავლია.

5.57. 1) a-ს რა მნიშვნელობისათვის აქვთ საერთო ფესვი

$$x^2+ax+8=0 \text{ და } x^2+x+a=0$$

განტოლებებს.

2) b-ს რა მთელი მნიშვნელობისათვის აქვთ საერთო ფესვი განტოლებებს:

$$2x^2+(3b-1)x-3=0 \quad \text{და} \quad 6x^2-(2b-3)x-1=0 .$$

3) რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდნენ $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ და $a_2x^2+b_2x+c_2=0$ კვადრატული განტოლებების კოეფიციენტები, რომ განტოლებებს ჰქონდეთ საერთო ფესვი.

4) ვთქვათ $x^2+p_1x+q_1=0$ და $x^2+p_2x+q_2=0$ განტოლებებს აქვთ მხოლოდ ერთი საერთო ფესვი. შეადგინეთ კვადრატული განტოლება, რომლის ფესვებიც მოცემულ განტოლებათა განსხვავებული ფესვებია.

ამოხსენით განტოლებები (№№5.58-5.60):

5.58. 1) $x^4-10x^2+9=0$; 2) $x^4-13x^2+36=0$;
3) $x^4-29x^2+100=0$; 4) $x^4-5x^2+4=0$.

5.59. 1) $x^4-17x^2+16=0$; 2) $x^4-37x^2+36=0$;
3) $x^4-50x^2+49=0$; 4) $x^4-25x^2+144=0$.

5.60. 1) $4x^4-5x^2+1=0$; 2) $3x^4-28x^2+9=0$;
3) $2x^4-19x^2+9=0$; 4) $3x^4-7x^2+2=0$.

5.61. ამოხსენით განტოლებები დამხმარე უცნობის შემოტანის ხერხით:

1) $(x^2+2x)^2-14(x^2+2x)-15=0$;

2) $(6x^2-7x)^2-2(6x^2-7x)-3=0$;

3) $\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2-3\left(\dfrac{x-1}{x}\right)-4=0$;

4) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4{,}5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+5=0$.

5.62. დაშალეთ მამრავლებად მრავალწევრები:

1) x^4-5x^2+4; 2) x^4-13x^2+36;
3) x^4-125x^2+484; 4) $4x^4-5x^2+1$.

5.63. შეკვეცეთ წილადები:

1) $\dfrac{x^4-10x^2+9}{x^4-13x^2+36}$; 2) $\dfrac{x^4-9x^2+20}{x^4-10x^2+24}$;

3) $\dfrac{x^4-17x^2+16}{x^4-50x^2+49}$; 4) $\dfrac{x^4-4x^2+3}{x^4-12x^2+27}$.

5.64. დაამტკიცეთ, რომ $x^4 + px^2 + q = 0$ ბიკვადრატული განტოლებისათვის ყველა ფესვის ჯამი უდრის ნულს, ხოლო ფესვების ნამრავლი უდრის q-ს.

ამოხსენით განტოლებები (№№5.65-5.71):

5.65. 1) $(x+3)^3-(x+1)^3=56$; 2) $(x-1)^3-(x-2)^3=7$;

3) $8x^4+x^3+64x+8=0$; 4) $3x^4-x^3+9x-3=0$.

5.66. 1) $x^2+\dfrac{64}{x^2}=20$; 2) $x^4-\dfrac{50}{2x^4-7}=14$;

3) $\dfrac{4}{x^2+4}+\dfrac{5}{x^2+5}=2$; 4) $\dfrac{1}{x^3+2}-\dfrac{1}{x^3+3}=\dfrac{1}{12}$.

5.67. 1) $\dfrac{24}{x^2+2x-8}-\dfrac{15}{x^2+2x-3}=2$; 2) $\dfrac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$;

3) $\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}-\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$;

4) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\dfrac{7}{6}$.

5.68. 1) $\dfrac{1}{x(x+2)}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{12}$; 2) $\dfrac{1}{(x-3)^2}-\dfrac{8}{x(x-6)}=2$;

3) $\dfrac{6}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{8}{(x-1)(x+4)}=1$;

4) $\dfrac{7}{(x+3)(x-2)}+\dfrac{4}{(x+4)(x-3)}=1$.

5.69. 1) $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81$; 2) $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$;

3) $(x^2-5x+7)^2-2(x-2)(x-3)=1$;

4) $(x+9)(x-1)(2x^2+16x-20)=12$.

5.70. 1) $\dfrac{x^2-3x+6}{2x}+\dfrac{2x}{x^2-3x+6}=2$;

2) $\dfrac{x^2+x-5}{x}+\dfrac{3x}{x^2+x-5}+4=0$;

3) $7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=9$; 4) $4x^2+12x+\dfrac{12}{x}+\dfrac{4}{x^2}=47$.

5.71. 1) $(x+4)^2(x+1)^2+(x+2)^2(x+3)^2=4$;

2) $3(x-2)^2(x+3)^2+(x-1)^2(x+2)^2=16$;

3) $(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)^2+(x-2)^2\left(x^2+2x+4\right)^2=49$;

4) $\left(x^2-4\right)^2\left(x^2+6\right)^2+\left(x^2-2\right)^2\left(x^2+4\right)^2=256$.

§6. ირაციონალური განტოლებები

ახსენით, რატომ არ შეიძლება ჰქონდეს ფესვები შემდეგ განტოლებებს (№№6.1; 6.2):

6.1. 1) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=0$; 2) $\sqrt{2x-1}=-5$;

3) $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x-1}=-3$; 4) $\sqrt{1-x}+\sqrt{2-x}=-1$.

6.2. 1) $\sqrt{x-8}-\sqrt{5-x}=3$; 2) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}=5$;

3) $\sqrt{x}-\sqrt{-2-x}=1$; 4) $\sqrt{5-x}+\sqrt{x^2+4}=2$.

ამოხსენით განტოლებები (№№6.3-6.23):

6.3. 1) $\sqrt{x-1}=2$; 2) $3+\sqrt{x-2}=4$;

3) $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{2x-9}=\sqrt{6-x}$.

6.4. 1) $(2x+7)^{1/3}=(3x-3)^{1/3}$; 2) $(x+2)^{1/3}=3(x-1)^{1/3}$;

3) $\left(25+\sqrt{x-4}\right)^{1/5}=2$; 4) $\left(70+\sqrt{2x-1}\right)^{1/4}=3$.

6.5. 1) $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-4}=\dfrac{\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}-7}$; 2) $\dfrac{2\sqrt{x}-1}{3\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{2\sqrt{x}-3}{3\sqrt{x}-2}$;

3) $\dfrac{3\sqrt{x}-4}{4\left(\sqrt{x}-2\right)}=\dfrac{3\sqrt{x}-5}{4\sqrt{x}-9}$; 4) $\dfrac{9\sqrt{x}+1}{6\left(6\sqrt{x}-1\right)}=\dfrac{\sqrt{x}}{4\sqrt{x}-1}$.

6.6. 1) $\sqrt{x^2-3x+1}=x-2$; 2) $\sqrt{4x^2+5x-3}=2x+1$;

3) $\sqrt{x^2-4x+5}=x-3$; 4) $\sqrt{3x^2-2x+4}=1-2x$.

6.7. 1) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x+6}=x+3$; 2) $\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{2x+2}=x+1$;

3) $\sqrt{4x-3}=\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x-5}}$; 4) $\dfrac{7x-2}{\sqrt{3x-8}}=3\sqrt{2x+3}$.

6.8. 1) $\sqrt{x^2+5x-3}=\sqrt{2x^2+3x-3}$;

2) $\sqrt{5+3x-4x^2}=\sqrt{5-2x-3x^2}$;

3) $\sqrt{2x^2-9x-38}=\sqrt{x^2-6x-10}$;

4) $\sqrt{2x^2-9x+11}=\sqrt{x^2-6x+9}$.

6.9. 1) $\sqrt{5-2x}=x-1$; 2) $\sqrt{13-4x}=x-2$;

3) $\sqrt{9x+7}=x+3$; 4) $\sqrt{14-5x}=x-4$.

6.10. 1) $\sqrt{x}-\dfrac{4}{\sqrt{2+x}}+\sqrt{2+x}=0$; 2) $\sqrt{x-9}=\dfrac{36}{\sqrt{x-9}}-\sqrt{x}$;

3) $\dfrac{15}{\sqrt{10-x}}-\sqrt{3x+5}=\sqrt{10-x}$; 4) $\sqrt{3-x}+\dfrac{6}{\sqrt{3-x}}=\sqrt{9-5x}$.

6.11. 1) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8$; 2) $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2$;

3) $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$; 4) $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$.

6.12. 1) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$;

3) $\sqrt{\dfrac{20+x}{x}}+\sqrt{\dfrac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$; 4) $\sqrt{\dfrac{15-x}{2x}}-\sqrt{\dfrac{3-x}{2x}}=\sqrt{2}$.

6.13. 1) $\sqrt{2x-5}+\sqrt{x-6}=2\sqrt{x-3}$; 2) $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$;

3) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x+6}=\sqrt{12x+25}$; 4) $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$.

6.14. 1) $\sqrt{x+\sqrt{x+2}}-\sqrt{x-\sqrt{x+2}}=2$;

2) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$;

3) $\sqrt{x+1}-1=\sqrt{x-\sqrt{x+8}}$; 4) $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x$.

6.15. 1) $\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{1+x^2}}=-2$;

2) $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{x^2}$;

3) $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-x}}-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-x}}=\sqrt{3}$.

4) $\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{1-x}}=\dfrac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$.

6.16. 1) $\dfrac{(5-x)\sqrt{5-x}+(x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}}=2$;

2) $\dfrac{(x-17)\sqrt{x-17}+(25-x)\sqrt{25-x}}{\sqrt{x-17}+\sqrt{25-x}}=8$;

3) $\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)^3\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)^2=32$;

4) $\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^5\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^3=1$.

6.17. 1) $\dfrac{6+x}{3x}=\sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{2}{x}\sqrt{\dfrac{4}{9}+\dfrac{8}{x^2}}}$;

2) $\sqrt{\dfrac{x-5}{x+2}}+\sqrt{\dfrac{x-4}{x+3}}=\dfrac{7}{x+2}\sqrt{\dfrac{x+2}{x+3}}$;

3) $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x+15}}+\sqrt{2x+15}=2x$;

4) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x$.

6.18. 1) $\sqrt[3]{4+x}+\sqrt[3]{4-x}=2$; 2) $\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{5-x}=2\sqrt[3]{5}$;

3) $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$; 4) $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1$.

6.19. 1) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$; 2) $\sqrt{x-1}+6\sqrt[4]{x-1}=16$;

3) $\sqrt{x-3}+6=5\sqrt[4]{x-3}$; 4) $\sqrt{x^2+32}-2\sqrt[4]{x^2+32}=3$.

6.20. 1) $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}-3=0$; 2) $2\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}-18=0$;

3) $x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x^2}+4=0$; 4) $3\sqrt[3]{x}-5\sqrt[3]{x^{-1}}=2x^{-1}$.

6.21. 1) $\dfrac{\sqrt[3]{x^4}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$; 2) $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}-\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=56$;

3) $x^2+\sqrt{x^2-9}=21$; 4) $x^2+\sqrt{x^2+20}=22$.

6.22. 1) $x^2-3x+\sqrt{x^2-3x+5}=7$;

2) $(x-3)(x-4)+\sqrt{x^2-7x+7}=35$;

3) $x^2-4x-6=\left(2x^2-8x+12\right)^{1/2}$;

4) $3x^2+15x+2\left(x^2+5x+1\right)^{1/2}=2$.

6.23. 1) $\sqrt{1+x^2}-x=2-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}$;

2) $\sqrt{1+x^2}+x=2+\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$;

3) $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}}=2$; 4) $\sqrt[5]{\dfrac{16z}{z-1}}+\sqrt[5]{\dfrac{z-1}{16z}}=2{,}5$.

§7. სისტემები

ამოხსენით სისტემები ჩასმის ხერხით (№№7.1; 7.2):

7.1. 1) $\begin{cases} x+2y=11 \\ 5x-3y=3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-y=5 \\ 5x+2y=23 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+y=8 \\ 3x+4y=7 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 7x+9y=8 \\ 9x-8y=69 \end{cases}$

7.2. 1) $\begin{cases} 2x+5y=15 \\ 3x+8y=-1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 5x+6y=-7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x-2y=11 \\ 4x-5y=3 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x+6y=13 \\ 7x+18y=-1 \end{cases}$

ამოხსენით სისტემები შეკრების ხერხით(№№7.3; 7.4):

7.3. 1) $\begin{cases} 2x+y=11 \\ 3x-y=9 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+5y=7 \\ x-3y=-1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-3y=4 \\ 5x+3y=-1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x+3y=6 \\ 2x+y=4 \end{cases}$

7.4. 1) $\begin{cases} 2x+5y=25 \\ 4x+3y=15 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x+3y=-4 \\ 6x+5y=-7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x-7y=40 \\ 5y-2x=-8 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-3y=8 \\ 7x-5y=-5 \end{cases}$

ამოხსენით სისტემები (№№7.5-7.16):

7.5. 1) $\begin{cases} 3(x-1)=4y+1 \\ 5(y-1)=x+1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4(x+2)=1-5y \\ 3(y+2)=3-2x \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2(x+y)-3(x-y)=4 \\ 5(x+y)-7(x-y)=2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5(3x+y)-8(x-6y)=200 \\ 20(2x-3y)-13(x-y)=520 \end{cases}$

7.6. 1) $\begin{cases} 2x+2y=-1 \\ -0{,}5x+4y=2{,}5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+y=-1 \\ 1{,}5x-0{,}5y=-2{,}5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 0{,}5x-0{,}5y=-1 \\ 1{,}5x-6y=-7{,}5 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 0{,}5x-2{,}5y=3 \\ x+\dfrac{1}{3}y=\dfrac{2}{3} \end{cases}$

7.7. 1) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=1 \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{2y}{3}=8 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{2x}{9}+\dfrac{y}{4}=11 \\ \dfrac{5x}{12}+\dfrac{y}{3}=19 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{2y}{3}=\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{3x}{2}+2y=0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{y}{5}=-2 \\ \dfrac{2x-y}{3}-\dfrac{3x}{4}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

7.8. 1) $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{3y-2}=1 \\ x(2y-5)-2y(x+3)=2x+1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3}-\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{2(x-y)}{5} \\ \dfrac{x-3}{4}-\dfrac{y-3}{3}=2y-x \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x+3)(y+5)=(x+1)(y+8) \\ (2x-3)(5y+7)=2(5x-6)(y+1) \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+15}=\dfrac{y-6}{y+2} \\ \dfrac{x-3}{x}=\dfrac{y-4}{y-1} \end{cases}$

7.9. 1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{8}{y}=8 \\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{y}=51 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=30 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=31 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{15}{x}-\dfrac{7}{y}=9 \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{9}{y}=35 \end{cases}$

7.10. 1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{5}{8} \\ \dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{3}{8} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{10}{x-5}+\dfrac{1}{y+2}=1 \\ \dfrac{25}{x-5}+\dfrac{3}{y+2}=2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{2}{x-y}+\dfrac{6}{x+y}=1{,}1 \\ \dfrac{4}{x-y}-\dfrac{9}{x+y}=0{,}1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{27}{2x-y}+\dfrac{32}{x+3y}=7 \\ \dfrac{45}{2x-y}-\dfrac{48}{x+3y}=-1 \end{cases}$

7.11. 1) $\begin{cases} \dfrac{11}{2x-3y}+\dfrac{18}{3x-2y}=13 \\ \dfrac{27}{3x-2y}-\dfrac{2}{2x-3y}=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{4}{x+2y}-\dfrac{1}{x-2y}=1 \\ \dfrac{20}{x+2y}+\dfrac{3}{x-2y}=1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y+2}+\dfrac{1}{1-x-y}=0{,}1 \\ \dfrac{1}{x-y+2}+\dfrac{1}{x+y-1}=0{,}3 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{6}{2x+y+3}+\dfrac{12}{y-2x-1}=-1 \\ \dfrac{3}{2x+y+3}+\dfrac{3}{2x-y+1}=1 \end{cases}$

7.12. 1) $\begin{cases} 2x^2-y=2 \\ x-y=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=15 \\ 2x-y=7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x-y=4 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2=40 \\ x+y=8 \end{cases}$

7.13. 1) $\begin{cases} x^2+xy=2 \\ y-3x=7 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-xy-y^2=19 \\ x-y=7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2-6y=0 \\ y+2x=0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=63 \\ x-y=-3 \end{cases}$

7.14. 1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{8} \\ x+y=12 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=-\dfrac{4}{5} \\ x-y=4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-1)(y-1)=2 \\ x+y=5 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (x-2)(y+1)=1 \\ x-y=3 \end{cases}$

7.15. 1) $\begin{cases} \dfrac{4}{x-1} - \dfrac{5}{y+1} = 1 \\ \dfrac{3}{x+3} = \dfrac{2}{y} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{3}{x+5} + \dfrac{2}{y-3} = 2 \\ \dfrac{4}{x-2} = \dfrac{1}{y-6} \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1+x+x^2}{1+y+y^2} = 3 \\ x+y=6 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x^2+y+1}{y^2+x+1} = \dfrac{3}{2} \\ x-y=1 \end{cases}$

7.16. 1) $\begin{cases} (x-2)(y-3)=1 \\ \dfrac{x-2}{y-3} = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{y+3}{(3x-y)(3y-x)} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{2}{5} \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{y+5} + \dfrac{y}{x} = 2 \\ x-y=4 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{2x-5}{x-2} + \dfrac{2y-3}{y-1} = 4 \\ 3x-4y=1 \end{cases}$

ამოხსენით სისტემები ვიეტის თეორემის გამოყენებით (№№7.17-7.19):

7.17. 1) $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=8 \\ xy=7 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-15 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=-36 \end{cases}$

7.18. 1) $\begin{cases} x-y=7 \\ xy=18 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=2 \\ xy=15 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-y=16 \\ xy=-48 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-y=3 \\ xy=-2 \end{cases}$

7.19. 1) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ x^3y^3=-8 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y} = 9 \\ \dfrac{(x+y)x}{y} = 20 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2y+xy^2=6 \\ xy+x+y=5 \end{cases}$

ამოხსენით განტოლებათა სისტემები, რომელთა მარცხენა ნაწილები ერთგვაროვანია x -ისა და y -ის მიმართ (№№7.20; 7.21):

7.20. 1) $\begin{cases} x^2-5y^2=-1 \\ 3xy+7y^2=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3y^2-2xy=160 \\ y^2-3xy-2x^2=8 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-3xy+y^2=-1 \\ 3x^2-xy+3y^2=13 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x^2-4xy+2y^2=17 \\ x^2-y^2=-16 \end{cases}$

7.21. 1) $\begin{cases} x^2-2xy-y^2=2 \\ xy+y^2=4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+xy+4y^2=6 \\ 3x^2+8y^2=14 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=29 \\ 7x^2-8xy+7y^2=43 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x^2+5xy-4y^2=38 \\ 5x^2-9xy-3y^2=15 \end{cases}$

ამოხსენით სისტემები (№№7.22-7.29):

7.22. 1) $\begin{cases} x+y+xy=5 \\ x+y-xy=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2xy+y=10 \\ x-2xy+y=-2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy-x+y=7 \\ xy+x-y=13 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy+x+y=29 \\ xy-2(x+y)=2 \end{cases}$

7.23. 1) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18 \\ x^2-y^2+x-y=6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2+2y^2=5xy \\ 4x-4y=xy \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2-3xy+2y^2=14 \\ x^2+xy-y^2=5 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x^2-5xy+3x-2y=10 \\ 5xy-2x^2+7x-8y=10 \end{cases}$

7.24. 1) $\begin{cases} (x+y)(8-x)=10 \\ (x+y)(5-y)=20 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2-3xy+5y-5=0 \\ (x-2)(y-1)=0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-5y^2-3x-y+22=0 \\ (x-3)(y-2)=y^2-3y+2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (x+y)^2-4(x+y)=45 \\ (x-y)^2-2(x-y)=3 \end{cases}$

7.25. 1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{34}{15} \\ x^2+y^2=34 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{9}{20} \\ x^2-y^2=9 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{5}{2} \\ x + y = 10 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{5}{6} \\ x - y = 5 \end{cases}$

7.26. 1) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{xy} = 6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \dfrac{5}{2} \\ x + y = 25 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 18 \\ xy + x^2 + y^2 = 19 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 18 \\ xy + x^2 + y^2 = 12 \end{cases}$

7.27. 1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 72 \\ x^2 - xy + y^2 = 12 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 218 \\ x^2 + xy + y^2 = 109 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 133 \\ x - y = 7 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^3 + y^3 = -217 \\ x + y = -7 \end{cases}$

7.28. 1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{5}{4} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3} \\ x^2 + y^2 = 160 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 82 \\ xy = 3 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ x + y = 5 \end{cases}$

7.29. 1) $\begin{cases} \sqrt{x + y - 1} = 1 \\ \sqrt{x - y + 2} = 2y - 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x + 3y + 1} = 2 \\ \sqrt{2x - y + 2} = 7y - 6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2 \\ x^5 \sqrt{x^2 - 4y^2} = 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 4xy - 3y^2} = x + 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$

7.30. ამოუხსნელად განსაზღვრეთ, აქვს თუ არა მოცემულ სისტემას: ა) ერთი ამონახსნი, ბ) ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე, გ) არა აქვს ამონახსნი:

1) $\begin{cases} 5x + 3y = 15 \\ 10x - 6y = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 10y = 16 \\ 6x + 20y = 32 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ x + 3y = 18 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6x - 9y = 4 \\ 4x - 6y = 9 \end{cases}$

7.31. იპოვეთ a-ს მნიშვნელობები, რომელთათვისაც სისტემებს არა აქვს ამონახსნი:

1) $\begin{cases} 4x+3y=12 \\ 2x+ay=5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+8y=10 \\ x-ay=7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} ax-5y=9 \\ 2x-3y=15 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x+2ay=1 \\ (3a-1)x-ay=1 \end{cases}$

7.32. იპოვეთ m-ისა და n-ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც სისტემებს აქვთ ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე:

1) $\begin{cases} mx+ny=8 \\ 5x+3y=4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} mx+(n-1)y=2 \\ 3x+10y=-1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ mx+y=n \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6x+y=10 \\ (n+1)x+\dfrac{1}{n}y=n^2+m \end{cases}$

7.33. იპოვეთ m-ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც სისტემებს: ა) აქვს ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე, ბ) არა აქვს ამონახსნი:

1) $\begin{cases} (3+m)x+4y=5-3m \\ 2x+(5+m)y=8 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (m+5)x+(2m+3)y=7 \\ (3m+10)x+(5m+6)y=16 \end{cases}$

3) $\begin{cases} (m+2)x+2my=8 \\ mx+2y=4 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (m+5)x+8y=12 \\ -x+(m-1)y=3m \end{cases}$

ამოხსენით სისტემები (№№7.34; 7.35):

7.34. 1) $\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ x+5y-4z=-5 \\ 4x+y-3z=-4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+y-5=0 \\ x+3z-16=0 \\ 5y-z-10=0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y-2z=-8 \\ 3x+2y=-6 \\ y+z=3 \end{cases}$

7.35. 1) $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ xz=6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=2 \\ y+z=7 \\ x^2+z^2=41 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy=2 \\ yz=6 \\ xz=3 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy=6 \\ yz=12 \\ xz=8 \end{cases}$

§8. უტოლობები

ამოხსენით უტოლობები (№№8.1-8.5):

8.1. 1) $7x-24<4$; 2) $18-5x<12$;
3) $17-x>6-6x$; 4) $12x+0{,}5\le 13x-1$.

8.2. 1) $5(x-1)+7\le 1-3(x+2)$; 2) $4(x+8)-7(x-1)<12$;
3) $4(x-1{,}5)-1{,}2>6x-1$; 4) $1{,}7-3(1-x)<-(x-1{,}9)$.

8.3. 1) $\frac{2+3x}{18}<0$; 2) $x-\frac{x-3}{5}+\frac{2x-1}{10}<4$;
3) $\frac{3+x}{4}+\frac{2-x}{3}\le 0$; 4) $\frac{2x-1}{4}+\frac{x+3}{2}\ge 1$.

8.4. 1) $\frac{x-1}{4}-1<\frac{x+1}{3}+8$; 2) $\frac{1-2x}{4}-2<\frac{1-5x}{8}$;
3) $\frac{3x-1}{2}-\frac{x-1}{4}\ge 0$; 4) $\frac{5x}{6}-\frac{3x-1}{3}+\frac{2x-1}{2}\le 1$.

8.5. 1) $5-\frac{x}{3}<3\frac{1}{2}-\frac{4x+1}{8}$; 2) $3-\frac{3x}{2}>\frac{5}{8}-\frac{4x-3}{6}$;
3) $-\frac{2}{3-x}\ge 0$; 4) $\frac{x^2}{3x+5}\le 0$.

ამოხსენით უტოლობათა სისტემები (№№8.6-8.10):

8.6. 1) $\begin{cases}x>17,\\x>12;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x\le 1,\\x<5;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x\ge 0,\\x<6;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x<-3{,}5,\\x>8.\end{cases}$

8.7. 1) $\begin{cases}1-2x<-9,\\3x+1<13;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x+7\ge 9+2x,\\5+x>2x+2;\end{cases}$
3) $\begin{cases}5x+3>8,\\0{,}7-3x\le -2{,}6;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+4<2x,\\1-x>-2.\end{cases}$

8.8. 1) $\begin{cases}5(x-2)-x>2,\\1-3(x-1)<-2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x-(x-4)<6,\\x\ge 3(2x-1)+18;\end{cases}$
3) $\begin{cases}10(x-1)+11>4x+5(x+1),\\3x-5>2(x-1);\end{cases}$ 4) $\begin{cases}17(3x-1)-50x+1<2(x+4),\\12-11x<11x+10.\end{cases}$

8.9. 1) $\begin{cases}x-4<8,\\2x+5<13,\\3-x>1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x-1<x+3,\\5x-1>6-2x,\\x-3<0;\end{cases}$

3) $\begin{cases} 3-2x<7, \\ 7x>7, \\ 12x>144, \\ 1-x<1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x-4<4x-2, \\ 1-2x>2-4x, \\ 3x-3<5x-5, \\ 17x>0. \end{cases}$

8.10. 1) $\begin{cases} \dfrac{7-x}{2}-3<\dfrac{3+4x}{5}-4, \\ \dfrac{5}{3}x+5(4-x)<2(4-x); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-\dfrac{4x-1}{3}<10, \\ 4x-1-\dfrac{x}{3}<10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{7x-1}{5}+x<7, \\ \dfrac{x}{5}+7x-1>7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{4}-\dfrac{x-3}{3}<\dfrac{3x-1}{4}-1, \\ \dfrac{5x+6}{4}-2x<\dfrac{3x-7}{5}+4. \end{cases}$

ამოხსენით უტოლობები (№№8.11-8.39):

8.11. 1) $x(x-5)>0;$ 2) $(x-2)(x-4)>0;$

3) $\left(\dfrac{1}{2}-x\right)(x-4)>0$; 4) $(2x+3)(x-1)<0$.

8.12. 1) $-1<2x-3<5$; 2) $-x-4\le 5+2x<3$;

3) $4<7-3x<x-1$; 4) $2x-3<3x-1\le x+5$.

8.13. 1) $(x-8)(x^2+6)>0$; 2) $(x-2)^2(x-3)<0$;

3) $\dfrac{x^2+4}{2-x}<0$; 4) $\dfrac{x+1}{(x-3)^2}\ge 0$.

8.14. 1) $\dfrac{3x-10}{x+4}<0$; 2) $\dfrac{5-x}{3-2x}\le 0$; 3) $\dfrac{3-2x}{4x-1}\ge 0$; 4) $\dfrac{5x}{1+x}>0$.

8.15. 1) $\dfrac{8x-1}{4x}<0$; 2) $\dfrac{3-4x}{x+1}<0$; 3) $\dfrac{5-5x}{4x+4}\ge 0$; 4) $\dfrac{14-2x}{(8-x)^2}>0$.

8.16. 1) $\dfrac{2x-4}{x-3}>2$; 2) $\dfrac{x-3}{x+2}>2$; 3) $\dfrac{3x+1}{x-1}>-3$**;** 4) $\dfrac{x-4}{3x-5}<2$.

8.17. 1) $x^2-4x+3>0$; 2) $x^2-x+1\ge 0$;

3) $-5x^2-3x+2>0$; 4) $x^2-6x+10\le 0$.

8.18. 1) $x^2-14x+45\ge 0$; 2) $x^2-4x+15>0$;

3) $x^2-11x+30\ge 0$; 4) $x^2-4x+3>0$.

8.19. 1) $3x^2-5x-2>0$; 2) $5x^2-7x+2\le 0$;

3) $3x^2-7x-6<0$; 4) $3x^2-2x+5\ge 0$.

8.20. 1) $x^2-10x+21\le 0$; 2) $x^2-2x-48<0$;

3) $6x^2-x-1<0$; 4) $5x^2+6x+1\ge 0$.

8.21. 1) $3x^2+4x<0$; 2) $x^2-9>0$; 3) $x^2-10x\le 0$; 4) $x^2-5\ge 0$.

8.22. 1) $(5-7x)^2(x-3)<0$; 2) $(2x-3)^2(4-x)>0$;

3) $(3x-1)(4-x)(2x-3)^2\le 0$; 4) $(x^2-16)(x-4)(8-x)\ge 0$.

8.23. 1) $x(x-3)(2x-5)\le 0$; 2) $(4x-6)(x-3)(5x-1)\ge 0$;

3) $(x-5)(2x-7)(2-3x)(4x-9)>0$;

4) $(x-1)(3x-4)(5-6x)(2x-1)^2<0$.

8.24. 1) $\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-3}>0$; 2) $\dfrac{(x-3)(x-5)}{x-2}>0$;

3) $\dfrac{x-1}{x^2+4x+3}\le 0$; 4) $\dfrac{x^2-6x+18}{x-4}\ge 0$.

8.25. 1) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8}\ge 0$; 2) $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6}<0$;

3) $\dfrac{x^2+2x-15}{x+1}\le 0$; 4) $\dfrac{x^2-6x-16}{-x^2+8x-12}>0$.

8.26. 1) $\dfrac{x^2-5x+8}{x^2-8x+15}\le 0$; 2) $\dfrac{x+2}{x^2-7x+6}\ge 0$;

3) $2-\dfrac{x-3}{x-2}>\dfrac{x-2}{x-1}$; 4) $3-\dfrac{2x-17}{x-5}>\dfrac{x-5}{x+2}$.

8.27. 1) $\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{3}{x-3}$; 2) $\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{5}{2+x}\le 1$;

3) $5x-20\le x^2\le 8x$; 4) $1<\dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1}<2$.

8.28. 1) $\dfrac{15}{4+3x-x^2}>1$; 2) $\dfrac{x^2-x-12}{x-3}\ge 2x$;

3) $\dfrac{x(x-2)^2}{(x-1)(x+3)(x+4)}\le 0$; 4) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{4}{x+1}-\dfrac{5}{x+4}\le 0$.

8.29. 1) $\sqrt{x-1}>2$; 2) $\sqrt{1-4x}\ge 1$; 3) $\sqrt{3x+12}>-1$; 4) $\sqrt{2x+1}\le 0$.

8.30. 1) $\sqrt{x^2-21}>2$; 2) $\sqrt{x^2+5x+5}\ge 1$;

3) $\sqrt{x^2-36}<8$; 4) $\sqrt{x^2-7x+10}<2$.

8.31. 1) $\sqrt{2x-4}>\sqrt{x-3}$; 2) $\sqrt{3x-4}<\sqrt{2x+1}$;

3) $\sqrt{4x+7} < \sqrt{x-3}$; 4) $\sqrt{3-4x} > \sqrt{2x+7}$.

8.32. 1) $\sqrt{x^2-6x+5} < \sqrt{x^2-2x-3}$; 2) $\sqrt{x^2+x-2} > \sqrt{2x^2+3x-5}$;

3) $\sqrt{x^2-3x-10} < \sqrt{x+11}$;

4) $\sqrt{4x^2+12x+9} < 3\sqrt{x^2-8x+16}$.

8.33. 1) $\sqrt{9x-20} < x$; 2) $2-x > \sqrt{3x-2}$;

3) $\sqrt{2x+1} < 2x-1$; 4) $3x+1 > \sqrt{6x+5}$.

8.34. 1) $\sqrt{x+3} > x+1$; 2) $x+2 < \sqrt{x+14}$;

3) $x+4 < \sqrt{x+46}$; 4) $x-3 < \sqrt{x+27}$.

8.35. 1) $\sqrt{x^2-4x-12} < x-1$; 2) $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$;

3) $\sqrt{x^2+x-2} > x$; 4) $\sqrt{x^2+5x+4} > x+2$.

8.36. 1) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} > 0$; 2) $(x-3)\sqrt{x^2+x-2} < 0$;

3) $(x+2)\sqrt{x^2-2x-3} \ge 0$; 4) $(x-1)\sqrt{-x^2+x+6} \le 0$.

8.37. 1) $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}} < 0$; 2) $\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3} \ge 0$;

3) $(x+3)\sqrt{\dfrac{6-x}{8-x}} \ge 0$; 4) $(x+3)\dfrac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{8-x}} \ge 0$.

8.38. 1) $\dfrac{x-5}{\sqrt{x+7}} > 1$; 2) $\dfrac{3-x}{\sqrt{15-x}} < 1$;

3) $\dfrac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$; 4) $\dfrac{3}{\sqrt{3x+2}} - \sqrt{3x+2} \ge 2$.

8.39. 1) $\dfrac{\sqrt{x+5}}{1-x} < 1$; 2) $\dfrac{\sqrt{52-x^2}}{2-x} < 1$;

3) $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1$; 4) $\dfrac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x} \ge 2$.

8.40. აჩვენეთ, რომ უტოლობას ამონახსნი არა აქვს:

1) $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-5} \ge -2$; 2) $(x-5)\sqrt{-x-7} > \dfrac{(x^2+3)\sqrt{x^2-25}}{x^2+1}$;

3) $\sqrt{1+2(x-3)^2} + \sqrt{5-4x+x^2} < \dfrac{3}{2}$;

4) $\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}<2$.

8.41. იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც განტოლებას აქვს დადებითი ამონახსნი:

1) $2x-a=4-5x$; 2) $3(x-a)=2(4-x)$;

3) $2(x+a)=8-a+x$; 4) $3(x-a)=4-5a+x$.

8.42. იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც განტოლებას აქვს უარყოფითი ამონახსნი:

1) $2(a-x)=a+2-4x$; 2) $3(x-2a)=2x+a-3$;

3) $5(4a-x)=7(2-x)$; 4) $3(2a-3x)=2(3-x)$.

8.43. იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც განტოლების ამონახსნი აკმაყოფილებს მითითებულ უტოლობას:

1) $3(x+a)=2-x,\ \ x>2$; 2) $5(a-x)=3+2a,\ \ x<1$;

3) $3(3a-2x)=12a-2,\ \ x<3$; 4) $5(2a+3x)=6a+4,\ x<1$.

8.44. იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც:

1) $3(2x-a)=4+2x$ განტოლების ამონახსნი მეტია $2(a-2x)=6-x$ განტოლების ამონახსნზე.

2) $5(2a-3x)=4(3-5x)$ განტოლების ამონახსნი ნაკლებია $3(2x-3a)=2(5-x)$ განტოლების ამონახსნზე.

3) $3(x+2a)=5-2x$ განტოლების ამონახსნი მეტია $2(3-2x)=7a-x$ განტოლების ამონახსნზე.

4) $3(5+2x)=2a+3x$ განტოლების ამონახსნი ნაკლებია $2(3a-x)=6-x$ განტოლების ამონახსნზე.

8.45. a-ს რა მნიშვნელობისათვის აქვს განტოლებას ამონახსნი:

1) $5(10-a)x^2-10x+6-a=0$; 2) $(a-3)x^2-2(3a-4)x+7a-6=0$;

3) $5(a+4)x^2-10x+a=0$; 4) $ax^2+2(a+1)x-2a-1=0$.

8.46. იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც:

1) $(a^2-1)x=a^2-4a+3$ განტოლებას არა აქვს ამონახსნი;

2) $(a^2-9)x=a^2+2a-3$ განტოლებას აქვს უამრავი ამონახსნი;

3) $(a-1)(a+2)x=a+2$ განტოლებას აქვს უამრავი ამონახსნი;

4) $(a^2-4a+3)x=a-1$ განტოლებას არა აქვს ამონახსნი.

8.47. იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც განტოლებას:

1) $(3a-1)x^2+2ax+3a-2=0$ აქვს ორი ამონახსნი;

2) $(2a+1)x^2-2ax+a+2=0$ აქვს ერთი ამონახსნი მაინც;

3) $(2a-1)x^2+ax+2a-3=0$ აქვს არაუმეტეს ერთი ამონახსნი;

4) $(a+1)x^2-(a+1)x+a-2=0$ აქვს ერთი ამონახსნი.

8.48. იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც განტოლებას აქვს მხოლოდ ნიშნით განსხვავებული ფესვები:

1) $x^2-(a^2-9)x-2a+1=0$; 2) $3x^2+(a^2-4)x+2-5a=0$;

3) $2ax^2+2(a^2-3a+2)x+2a-3=0$; 4) $ax^2+2(a^2-2a-3)x-5=0$.

8.49. იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მოცემულ განტოლებას აქვს სხვადასხვა ნიშნის ფესვები:

1) $(a-2)x^2-3ax+a+5=0$; 2) $(a+1)x^2+ax+a-5=0$;

3) $x^2+2ax+a^2-9=0$; 4) $x^2+ax+a^2+5a+4=0$.

8.50. იპოვეთ m პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც განტოლებას აქვს ორი (განსხვავებული) დადებითი ამონახსნი:

1) $x^2-(2m-1)x+m^2-9=0$; 2) $x^2-(2m+4)x+m^2-4=0$;

3) $x^2-(2m+6)x+m^2+13=0$; 4) $x^2-(2m-2)x+m^2-8=0$.

8.51. იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც განტოლებას აქვს ორი (განსხვავებული) უარყოფითი ამონახსნი:

1) $x^2+2(a+1)x+a^2+18=0$; 2) $x^2-2(a-5)x+a^2-1=0$;

3) $x^2+2(a-1)x+4=0$; 4) $2x^2+(a+1)x+\frac{a^2}{8}-1=0$.

a-ს რა მნიშვნელობისათვის შესრულდება უტოლობა ნებისმიერი x-ისათვის (№№8.52-8.54):

8.52. 1) $x^2+2x+a>0$; 2) $x^2+2x+a>10$;

3) $x^2+6x+(5a-1)(a-1)>0$; 4) $x^2+(a+2)x+8a+1>0$.

8.53. 1) $ax^2+12x-5<0$; 2) $ax^2+(4a+1)x+4a-1<0$;

3) $(2-a)x^2-(2a+1)x-a+1>0$; 4) $(3a-10)x^2-6ax-9<0$.

8.54. 1) $\frac{x^2+ax-1}{2x^2-2x+3}<1$; 2) $\frac{x^2-ax-2}{x^2-3x+4}>-1$;

3) $-6<\frac{2x^2+ax-4}{x^2-x+1}<4$; 4) $-9<\frac{3x^2+ax-6}{x^2-x+1}<6$.

8.55. იპოვეთ a-ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მოცემულ გამოსახულებას აზრი არა აქვს x-ის არცერთი მნიშვნელობისათვის:

1) $\sqrt{(a-2)x^2-ax+a+2}$; 2) $\sqrt{-x^2+2(a-1)x-a+1}$.

იპოვეთ m -ის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მოცემულ განტოლებას აქვს განსხვავებული ფესვები და ისინი აკმაყოფილებენ მითითებულ პირობას: (№№8.56; 8.57):

8.56. 1) $(2m+3)x^2-3(m+1)x+m=0$, $x_1+x_2<0$;

2) $mx^2+2(m+1)x+m+4=0$, $x_1\cdot x_2>0$;

3) $(m^2+m+8)x^2-(2m-1)x-3=0$, $\frac{1}{x_1+x_2}+2<0$;

4) $x^2+(2m-1)x+m^2-3m-4=0$, $\frac{6}{x_1x_2}+1<0$.

8.57. 1) $x^2-(2m+1)x+m^2-5m+6=0$, $\frac{x_1x_2}{x_1+x_2}>0$;

2) $x^2-2(m+1)x+m^2+5m+6=0$, $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<0$;

3) $x^2-(m+9)x-6m^2+7m+20=0$, $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}<-2$;

4) $x^2-(m+2)x+m+1=0$, $x_1^3+x_2^3>0$.

იპოვეთ a -ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც (8.58-8.61):

8.58. 1) $x^2-6ax+9a^2-2a+2=0$ განტოლების ორივე ფესვი მეტია 3–ზე;

2) $x^2+x+a=0$ განტოლების ორივე ფესვი მეტია a–ზე;

3) $x^2+4ax+4a^2-2a+1=0$ განტოლების ორივე ფესვი ნაკლებია -1-ზე.

4) $(2-a)x^2-3ax+2a=0$ კვადრატული განტოლების ორივე ფესვი მეტია $\frac{1}{2}$–ზე;

8.59. 1) $x^2-(a+1)ax+a^2=0$ განტოლების უდიდესი ფესვი მეტია $\frac{1}{2}$–ზე;

2) $(a^2+a+1)x^2+(2a-3)x+a-5=0$ განტოლების ერთი ფესვი ნაკლებია 1–ზე, ხოლო მეორე მეტია 1–ზე;

3) $x^2-ax+2=0$ განტოლების ფესვები მოთავსებულია $]0;3[$ შუალედში;

4) $4x^2-2x+a=0$ განტოლების ფესვები მოთავსებულია $]-1;1[$ შუალედში.

8.60. 1) $x^2+ax+a^2+6a<0$ უტოლობა სრულდება ნებისმიერი $x\in]1;2[$–სათვის;

2) $ax^2-4x+3a+1>0$ უტოლობა სრულდება ყველა $x>0$–სათვის;

3) $2ax-x>a+2$ უტოლობიდან გამომდინარეობს $x<-1$ უტოლობა;

4) $3ax+2a-1>0$ უტოლობიდან გამომდინარეობს $x>1$ უტოლობა.

8.61. 1) $ax^2-x+1-a<0$ უტოლობიდან გამომდინარეობს $0<x<1$ უტოლობა;

2) $ax^2+(1-a^2)x-a>0$ უტოლობიდან გამომდინარეობს $|x|<2$ უტოლობა;

3) $x^2-a(1+a^2)x+a^4<0$ უტოლობიდან გამომდინარეობს $x^2+4x+3>0$ უტოლობა;

4) $x^2-3x+2<0$ უტოლობის ყოველი ამონახსნი შედის $ax^2-(3a+1)x+3>0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეში.

იპოვეთ a-ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სისტემის ამონახსნები აკმაყოფილებენ მითითებულ პირობებს (№№8.62; 8.63):

8.62. 1) $\begin{cases} x-7y=1, \\ 5x+3y=a, \end{cases}$ $x<0, y>0$; 2) $\begin{cases} 3x+7y=a, & x>0, \\ 2x+5y=20, & y>0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x-6y=1, \\ 5x-ay=2, \end{cases}$ $x<0,\ y<0$; 4) $\begin{cases} (a-2)x-4y=a-1, \\ 2x+2(a-2)y=-1, \end{cases}$ $x>0,\ y<0$.

8.63. 1) $\begin{cases} 2x+y=a+2, \\ x-y=a, \end{cases}$ $x+y<0$; 2) $\begin{cases} x+y=a, \\ 2x-y=3, \end{cases}$ $x>y$;

3) $\begin{cases} x+7y=a, \\ 2x-y=5, \end{cases}$ $x>y-2$; 4) $\begin{cases} x-2y=2a, \\ 3x+5y=4, \end{cases}$ $x+y>0$.

8.64. შეიძლება თუ არა ერთდროულად შესრულდეს უტოლობები:

1) $ab<0,\ bc>0,\ ac>0$; 2) $ab<0,\ \frac{a}{1-b}<0,\ \frac{b}{1-a}<0$;

3) $a^4+b^4\geq 16,\ \ a^2+b^2<4$;

4) $a(1-b)>\frac{1}{4},\ b(1-a)>\frac{1}{4},\ a>0,\ b>0$.

დაამტკიცეთ უტოლობა (№№8.65-8.71):

8.65. 1) $\frac{a^2+b^2}{2}\geq ab$; 2) $(a+b)(b+c)(a+c)\geq 8abc$, $a\geq 0,\ b\geq 0,\ c\geq 0$;

3) $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\geq 2$; 4) $\frac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}}\geq 2$.

8.66. 1) $\frac{(1+a)^2}{2}>a$; 2) $a+\frac{4}{a}\geq 4,\ a>0$; 3) $a^2+\frac{1}{a^2}\geq 2$; 4) $\frac{2a}{1+a^2}\leq 1$.

8.67. 1) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4,\quad a>0,\ b>0$; 2) $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\geq 2,\quad a_1>0,\ a_2>0$;

3) $a^2+c^2\geq 2b^2$, თუ $a:b=b:c$;

4) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leq\frac{b}{a^2}+\frac{a}{b^2},\ a>0,\ b>0$.

8.68. 1) $(1-x)(1-y)(1-z)\geq 8xyz,\quad x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y+z=1$;

2) $2a^2+b^2+c^2\geq 2a(b+c)$; 3) $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$;

4) $a^2+ab+b^2\geq 0$.

8.69. 1) $\frac{m+1}{n+1}>\frac{m}{n},\quad m,n\in N,\quad m<n$;

2) $ab+ac+bc>3abc,\quad 0<a<1,\quad 0<b<1,\quad 0<c<1$;

3) $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c),\quad a\geq 0,\quad b\geq 0,\quad c\geq 0$;

4) $a^4+2a^3b+2ab^3+b^4\geq 6a^2b^2$.

8.70. 1) $x^2+y^2+z^2 \ge \frac{1}{3}$, თუ $x+y+z=1$;

2) $a^2+b^2 \ge \frac{1}{2}$, თუ $a+b=1$;

3) $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \ge 9$, თუ $x>0,\ y>0,\ x+y=1$;

4) $a^3+b^3 \ge 16$, თუ $a+b=4,\ a\ge 0,\ b\ge 0$.

8.71. 1) $(a+2)(b+2)(a+b) \ge 16ab$, $a\ge 0,\ b\ge 0$;

2) $\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right) \ge 8$, $x>0,\ y>0,\ z>0$;

3) $\frac{a^3+b^3}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$, $a+b\ge 0$;

4) $a+b+c \ge \sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}$, $a\ge 0,\ b\ge 0,\ c\ge 0$.

5) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdots\frac{99}{100} < 0{,}1$; 6) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdots\frac{63}{64} < 0{,}125$.

კოორდინატთა სიბრტყეზე დაშტრიხეთ შემდეგი უტოლობის ან უტოლობათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე (№№8.72-8.86):

8.72. 1) $x\ge 0$; 2) $y\le 0$; 3) $x\ge 4$;
4) $y\le 3{,}5$; 5) $1<x<5$; 6) $-5\le x\le 0$;
7) $-2\le y<4$; 8) $0<y<5$.

8.73. 1) $y\le x$; 2) $y\ge -x$;
3) $y\le 2x-3$; 4) $y>-x-2$.

8.74. 1) $x+y>1$; 2) $x-y\le 1$;
2) $3x-y-1>0$; 3) $x+5y-3\le 0$.

8.75. 1) $y\ge x^2$; 2) $y\le -2x^2$;
3) $y>x^2-4$; 4) $y\le 3-x^2$.

8.76. 1) $y\ge x^2-4x+3$; 2) $y\le 2x^2-5x+2$;
3) $y\ge x^2-2x+5$; 4) $y\le -x^2-4x-5$.

8.77. 1) $y\le \frac{1}{x}$; 2) $y\ge -\frac{2}{x}$;

3) $y \ge x^3$; 4) $y \le \sqrt{x}$;

5) $xy \ge 0$; 6) $xy \le -2$;

7) $x^2 + y^2 \le 4$; 8) $x^2 + y^2 \ge 9$.

8.78. 1) $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \le 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \le 0 \\ y \le 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x > 2 \\ y < -1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \le -3 \\ y \ge 0. \end{cases}$

8.79. 1) $\begin{cases} y \ge -x \\ y \le 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y \le x \\ y \ge -x \end{cases}$

3) $\begin{cases} y \le x + 1 \\ y \le 1 - x \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y \ge x - 2 \\ y \le 0{,}5x + 1 \end{cases}$

8.80. 1) $\begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1 \le x \le 4 \\ -5 \le y \le -3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y \ge 2x - 6 \\ y \le 2x + 6 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - 3x - 6 \le 0 \\ y + 2x - 6 \le 0 \end{cases}$

8.81. 1) $\begin{cases} y \ge 2x^2 \\ y \le 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y \le 3x^2 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y \ge \dfrac{2}{x} \\ x \ge 3 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y \le -\dfrac{1}{x} \\ y \ge 2 \end{cases}$

8.82. 1) $\begin{cases} y \ge x^2 - 4x + 3 \\ y \le x - 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y \le -x^2 + 5x - 6 \\ y \ge 1 - 3x \end{cases}$

3) $\begin{cases} y \ge x^2 \\ y \le 9 - x^2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y \ge x^2 - 4x + 3 \\ y \le -x^2 + 5x - 6 \end{cases}$

8.83. 1) $\begin{cases} y \ge \dfrac{2}{x} \\ y \le 3 - x \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y \le -\dfrac{3}{x} \\ y \ge x - 5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y \ge x^3 \\ y \le \sqrt{x} \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y \le x^3 \\ y \ge x \end{cases}$

8.84. 1) $\begin{cases} y > x \\ y < 2x \\ y < 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y > 3 \\ x + y \le 5 \\ y \ge -1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y - x < 2 \\ y + x > 4 \\ x - 4 > 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y \le \sqrt{x} \\ y \le -x + 2 \\ y \ge 0 \end{cases}$

8.85. 1) $\begin{cases} xy < 2 \\ y < x + 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy + 1 > 0 \\ y > x + 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9 \\ x + y \ge 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 4 \\ x - y - 2 \le 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9 \\ y \ge x^2 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 1 \\ y \le -x^2. \end{cases}$

8.86. საკოორდინატო სიბრტყეზე დაშტრიხეთ მითითებული სიმრავლე, თუ:

1) $A = \{(x; y) \mid y \le x + 1\}$, $B = \{(x; y) \mid y \ge 3 - x\}$, $A - B = ?$

2) $A = \{(x; y) \mid x + y \ge 2\}$, $B = \{(x; y) \mid x - y \ge 2\}$, $B - A = ?$

3) $A = \{(x; y) \mid y \ge x^2\}$, $B = \{(x; y) \mid y > x + 2\}$, $A - B = ?$

4) $A = \{(x; y) \mid y \ge \sqrt{x}\}$, $B = \left\{(x; y) \mid y \ge \frac{1}{x}\right\}$, $B - A = ?$

5) $A = \{(x; y) \mid x + y < 2\}$, $B = \{(x; y) \mid y > x - 2\}$,
$C = \{(x; y) \mid x \ge 1\}$, $(A \setminus B) \cap C = ?$

6) $A = \{(x; y) \mid y > 2x - 1\}$, $B = \{(x; y) \mid y > 3 - x\}$,
$C = \{(x; y) \mid x < -1\}$, $(A \cap B) \setminus C = ?$

7) $A = \{(x; y) \mid y \ge x^2\}$, $B = \{(x; y) \mid y < x\}$,
$C = \{(x; y) \mid x > 1\}$, $A \setminus (B \cap C) = ?$

8) $A = \{(x; y) \mid y \le \sqrt{x}\}$, $B = \{(x; y) \mid y \ge 1 - 2x\}$,
$C = \{(x; y) \mid x \le 2\}$, $(A \cap B) \setminus C$.

§9. მოდულის შემცველი განტოლებები და უტოლობები

ამოხსენით განტოლება (№№9.1-9.16):

9.1. 1) $1-|x|=0{,}5$; 2) $3-|x|=2{,}5$; 3) $|x-1|=2$; 4) $|x+2|=2$.

9.2. 1) $|x-1|=2x-3$; 2) $|x+2|=1-3x$;
3) $|5x-1|=x+3$; 4) $|6x+1|=4x+3$.

9.3. 1) $|5-x|=|x+4|$; 2) $|1-3x|=|3x-4|$;
3) $|3x-5|=|5-2x|$; 4) $|2x-3|=|4-3x|$.

9.4. 1) $|3x-2|-|x-3|=3$; 2) $|5-2x|-|4-3x|=1$;
3) $|4-3x|-|x+6|=4$; 4) $|7-4x|+|3-x|=6$.

9.5. 1) $|5-2x|+|x+3|=2-3x$; 2) $|2x-5|-3x=|x+7|$;
3) $|x-2|+2|2x+3|=x$; 4) $|2x-1|-3|1-x|=2x$.

9.6. 1) $|1-x|-|x+3|=|x+2|$; 2) $|x-4|+|10-x|=|x-1|$;
3) $|x-3|-|2x+1|=|3x-1|$; 4) $|x|+|x+2|+|2-x|=x+1$.

9.7. 1) $|x^2-1|=3$; 2) $|x^2-5|=4$;
3) $|x^2+4x+5|=2$; 4) $|x^2-5x+7|=1$.

9.8. 1) $|x^2-4|+|x^2-3x+2|=0$; 2) $3|x^2-9|+2|4x-x^2-3|=0$;
3) $|x^2+5x+6|+|2-x-x^2|=0$;
4) $2|x^2-6x+8|+3|4+3x-x^2|=0$.

9.9. 1) $x^2-8|x|=20$; 2) $3x^2+2|x|-8=0$;
3) $2x^2-7|x|+5=0$; 4) $4x^2-|x|-3=0$.

9.10. 1) $x^2-6|x+2|+5=0$; 2) $x^2-2|x+4|+5=0$;
3) $2x^2-|5x-2|=0$; 4) $3|x-1|+x^2-7=0$.

9.11. 1) $x^2-4x-2|x-2|+1=0$; 2) $x^2+6x-4|x+3|-12=0$;
3) $x^2-7x+12=|x-4|$; 4) $x^2-x-2=|5x-3|$.

9.12. 1) $|x-2|(x-5)=x-2$; 2) $|x-6|(x-2)+2-x=0$;
3) $(x^2-5x+6)|9-x^2|=0$; 4) $|x^2-8|(x-2)=x-2$.

9.13. 1) $|x^2 - x| = x^2 + 1$; 2) $|x^2 - 3x| = 2 - x^2$;

3) $|x^2 + 3x| = 2 - x^2$; 4) $|x^2 - 6x + 8| = 4x - x^2$.

9.14. 1) $|x-1| - \frac{8}{|x-1|} = 0$; 2) $\frac{8}{|x+1|-2} = |x+1|$;

3) $\frac{4}{|x-5|-3} = |x-5|$; 4) $\frac{7}{|x+4|-6} = |x+4|$.

9.15. 1) $|x - x^2 - 1| = |2x - 3 + x^2|$; 2) $|x^2 - 4| - |x^2 - 9| = 5$;

3) $|x^2 + 2x| - |x-2| = |x^2 - x|$;

4) $|x - 15\sqrt{x} - 34| = 15\sqrt{x} - x + 34$.

9.16. 1) $\frac{4}{|x+1|-2} = |x-1|$; 2) $\frac{2}{|x-5|-3} = |x-3|$;

3) $\frac{3}{|x+3|-1} = |x+2|$; 4) $\frac{7}{|x-1|-3} = |x+2|$.

ამოხსენით სისტემა (№№9.17-9.19):

9.17. 1) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ |2x - y| = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x - 3y| = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ |x - 2y| = 3 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} |2x - 3y| = 5 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$

9.18. 1) $\begin{cases} |x| + 2|y| = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ |x-2| + |y-2| = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ |x-3| + |y-2| = 2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} |x-1| + |2y-5| = 1 \\ y = 3 - |x-1| \end{cases}$

9.19. 1) $\begin{cases} |x| + |y| = 2 \\ 2|x| + 3|y| = 5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3|x| - 2|y| = 4 \\ 5|x| + |y| = 11 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2|x-1| - |y-2| = 1 \\ |x-1| + 3|y-2| = 4 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} |x+1| + 3|y-1| = 5 \\ 2|x+1| - |y-1| = 3 \end{cases}$

ამოხსენით უტოლობა (№№9.20-9.29):

9.20. 1) $|x-2|\le 3$; 2) $|1-x|>10$; 3) $|x+4|\le 3$; 4) $|3x+4|\ge 1$.

9.21. 1) $|x-4|\ge 3x-5$; 2) $|3-2x|<3x+2$;

3) $|5x-4|>x+2$; 4) $|3x-2|<2x+5$.

9.22. 1) $|2x+3|>|x-2|$; 2) $|4x+1|-|3x+2|<0$;

3) $|2x-7|-|x+5|<1$; 4) $|x-1|+|2x+1|>3$.

9.23. 1) $|x^2-6|<3$; 2) $|x^2-9|\le 7$;

3) $|x^2-5x|<6$; 4) $|x^2-5x+5|<1$.

9.24. 1) $|x^2-4|>3$; 2) $|x^2-2|>2$;

3) $|x^2-4x-2|>6$; 4) $|x^2-2x|>3$.

9.25. 1) $\left|\dfrac{3x-1}{x+2}\right|<1$; 2) $\left|\dfrac{3x+1}{x-3}\right|<3$;

3) $\left|\dfrac{x^2+2x}{x+5}\right|<2$; 4) $\left|\dfrac{x^2-3x+1}{x^2+x+1}\right|<1$.

9.26. 1) $\left|\dfrac{1-x}{3x+1}\right|>2$; 2) $\left|\dfrac{x+3}{x^2-4}\right|\ge 1$;

3) $\left|\dfrac{x^2-1}{x+4}\right|<2$; 4) $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2+5x+4}\right|\ge 1$.

9.27. 1) $\dfrac{|x+4|-3}{4}<\dfrac{1}{|x+4|}$; 2) $\dfrac{|x+2|-5}{6}<\dfrac{1}{|x+2|}$;

3) $\dfrac{|x-3|-3}{10}<\dfrac{1}{|x-3|}$; 4) $\dfrac{|x+3|-2}{3}<\dfrac{1}{|x+3|}$.

9.28. 1) $\dfrac{8}{2-|x-1|}\ge |x-5|$; 2) $\dfrac{3}{|x-3|-2}\ge |x+1|$;

3) $\dfrac{4}{|x+2|-3}\ge |x-1|$; 4) $\dfrac{4}{|x-1|-2}\ge |x+1|$.

9.29. 1) $\dfrac{6}{\sqrt{|x-2|-5}-1}>\sqrt{|x-2|-5}$; 2) $\dfrac{2}{\sqrt{|x-1|-1}+1}>\sqrt{|x-1|-1}$;

3) $\dfrac{5}{\sqrt{|x+1|-3}-4}>\sqrt{|x+1|-3}$; 4) $\dfrac{8}{\sqrt{|x-2|-4}-2}>\sqrt{|x-2|-4}$.

§10. ალგებრული ამოცანები

I. *ამოცანების ამოხსნა წრფივი განტოლებების გამოყენებით*

10.1. სამ კლასში სულ 119 მოსწავლეა. პირველ კლასში მოსწავლეთა რიცხვი 4-ით მეტია, ვიდრე მეორე კლასში და 3-ით ნაკლებია, ვიდრე მესამე კლასში. რამდენი მოსწავლე ყოფილა თითოეულ კლასში?

10.2. ტრაქტორისტთა სამმა ბრიგადამ ერთად 720 ჰექტარი მოხნა. პირველმა ბრიგადამ 60 ჰექტარით მეტი მოხნა, ვიდრე მეორემ, და 60 ჰექტარით ნაკლები, ვიდრე მესამე ბრიგადამ. რამდენი ჰექტარი მოხნა თითოეულმა ბრიგადამ?

10.3. მოსწავლეების 3 ჯგუფმა სკოლის ნაკვეთზე დარგო 65 ხე. მეორე ჯგუფმა დარგო 10 ხით მეტი, ვიდრე მესამემ და 2-ჯერ მეტი, ვიდრე პირველმა ჯგუფმა. რამდენი ხე დარგო თითოეულმა ჯგუფმა?

10.4. სკოლის ნაკვეთიდან შეაგროვეს 1800 კგ ბოსტნეული; კარტოფილი იყო შეგროვილი 5-ჯერ მეტი, ვიდრე ჭარხალი, ხოლო კომბოსტო 120 კგ-ით მეტი, ვიდრე ჭარხალი. თითოეული კულტურის რამდენი კილოგრამი ბოსტნეული იყო შეგროვილი?

10.5. სამი მომდევნო მთელი რიცხვის ჯამია 180. იპოვეთ ეს რიცხვები.

10.6. ორი მომდევნო მთელი რიცხვის ნამრავლი 38-ით ნაკლებია შემდეგი ორი მომდევნო მთელი რიცხვის ნამრავლზე. იპოვეთ ამ რიცხვებს შორის უმცირესი.

10.7. ოთხ მომდევნო მთელ რიცხვებს შორის უმცირესი რიცხვი წარმოადგენს უდიდესი რიცხვის $\frac{2}{3}$ ნაწილს. იპოვეთ ეს რიცხვები.

10.8. ოთხ მომდევნო მთელ რიცხვებს შორის უმცირესი რიცხვი წარმოადგენს უდიდესი რიცხვის 80%-ს. იპოვეთ ამ რიცხვებს შორის უმცირესი.

10.9. მართკუთხედის სიგრძე ორჯერ მეტია მის სიგანეზე. მართკუთხედის პერიმეტრი უდრის 144 სმ-ს. იპოვეთ მართკუთხედის სიგრძე და სიგანე.

10.10. თუ მართკუთხედის სიგრძეს შევამცირებთ 4სმ-ით, ხოლო მის სიგანეს გავადიდებთ 7 სმ-ით, მაშინ მივიღებთ კვადრატს, რომლის ფართობი 100 კვ. სმ-ით მეტი იქნება მართკუთხედის ფართობზე. იპოვეთ კვადრატის გვერდი.

10.11. მართკუთხედის სიგრძე ორჯერ მეტია მის სიგანეზე. თუ მართკუთხედის თითოეულ გვერდს გავადიდებთ 1 მეტრით, მაშინ მისი ფართობი გადიდდება 16 კვ. მეტრით. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები.

10.12. მართკუთხედის სიგრძე 3-ჯერ მეტია მის სიგანეზე. თუ მართკუთხედის სიგანეს გავადიდებთ 4 მ-ით, ხოლო მის სიგრძეს შევამცირებთ 5 მ-ით, მაშინ მართკუთხედის ფართობი 15 კვ. მ-ით გადიდდება. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები.

10.13. ერთ ავზში ორჯერ მეტი ბენზინია, ვიდრე მეორეში. თუ პირველი ავზიდან მეორეში გადავასხამთ 25 ლ ბენზინს, მაშინ ორივე ავზში ბენზინის რაოდენობა გათანაბრდება. რამდენი ლიტრი ბენზინი იყო თითოეულ ავზში თავდაპირველად?

10.14. ერთ საწყობში ორჯერ მეტი ხორბალი იყო, ვიდრე მეორეში. პირველი საწყობიდან გაიტანეს 750 ტ ხორბალი, მეორე საწყობში კი მიიტანეს 350 ტ; ამის შემდეგ ორივე საწყობში ხორბლის რაოდენობა გათანაბრდა. რამდენი ტონა ხორბალი იყო თავდაპირველად თითოეულ საწყობში?

10.15. ერთ ტომარაში 60 კგ შაქარი იყო, მეორეში კი 80 კგ. იმის შემდეგ რაც მეორე ტომრიდან ამიღეს 3-ჯერ მეტი შაქარი, ვიდრე პირველიდან, პირველში დარჩა 2-ჯერ მეტი შაქარი, ვიდრე მეორე ტომარაში. რამდენი კილოგრამი შაქარი ამოიღეს თითოეული ტომრიდან?

10.16. პირველ ორმოში ჩააწყვეს 55 ტ სილოსი, მეორეში კი–63 ტ. იმის შემდეგ, რაც მეორე ორმოდან წაიღეს ორჯერ მეტი სილოსი, ვიდრე პირველი ორმოდან, მასში დარჩა 5 ტ-ით ნაკლები, ვიდრე პირველ ორმოში. რამდენი ტონა სილოსი წაუღიათ თითოეული ორმოდან?

10.17. ერთ აუზში 200 მ^3 წყალია, ხოლო მეორეში–112 მ^3. აღებენ ონკანებს, რომელთა საშუალებით ივსება აუზები. რამდენი საათის შემდეგ იქნება ორივე აუზში ერთნაირი რაოდენობის წყალი, თუ მეორე აუზში ყოველ საათში ისხმება 22 მ^3-ით მეტი წყალი, ვიდრე პირველ აუზში?

10.18. ერთ აუზში 160 მ^3 წყალია, ხოლო მეორეში–117 მ^3, აღებენ ონკანებს, რომელთა საშუალებით ივსება აუზები. რამდენი საათის შემდეგ იქნება მეორე აუზში 13 მ^3-ით მეტი წყალი, ვიდრე პირველში, თუ მეორე აუზში ყოველ საათში ისხმება 14 მ^3-ით მეტი წყალი, ვიდრე პირველ აუზში?

10.19. ორ ფარდულში აწყვია თივა. პირველ ფარდულში 3-ჯერ მეტი თივაა, ვიდრე მეორეში. იმის შემდეგ, რაც პირველი ფარდულიდან მეორეში გადაიტანეს 20 ტ თივა, აღმოჩნდა, რომ

მეორე ფარდულში თივის რაოდენობა უდრიდა იმ თივის რაოდენობის $\frac{5}{7}$-ს, რაც დარჩა პირველ ფარდულში. რამდენი ტონა თივა ყოფილა თავდაპირველად თითოეულ ფარდულში?

10.20. ფერმერს ბოსტნეულის დასარგავად აქვს ორი მოსაზღვრე ნაკვეთი: პირველი ნაკვეთის ფართობი 4-ჯერ მეტია მეორის ფართობზე. თუ პირველი ნაკვეთიდან ჩამოვჭრით 10 ჰექტარს და შევუერთებთ მეორე ნაკვეთს, მაშინ მეორე ნაკვეთი შეადგენს პირველი ნაკვეთის დარჩენილი ნაწილის $\frac{2}{3}$-ს. იპოვეთ თითოეული ნაკვეთის ფართობი.

10.21. ერთ საწყობში 185 ტ ნახშირია, მეორეში 237 ტ. პირველი საწყობიდან ყოველდღე გაჰქონდათ 15 ტ ნახშირი, მეორედან კი 18 ტონა. რამდენი დღის შემდეგ იქნება მეორე საწყობში $1\frac{1}{2}$-ჯერ მეტი ნახშირი, ვიდრე პირველში?

10.22. ერთ ბოსტნეულსაცავში 21 ტ კარტოფილია, მეორეში კი 18 ტ. პირველ ბოსტნეულსაცავში ყოველდღიურად მიჰქონდათ 9 ტ კარტოფილი, მეორეში კი 12ტ. რამდენი დღის შემდეგ იქნება პირველ ბოსტნეულსაცავში 1,2-ჯერ ნაკლები კარტოფილი, ვიდრე მეორეში?

10.23. ერთ საწყობში 200 ტონა ნახშირია, მეორეში კი 60 ტონა. ყოველდღიურად თითოეულ საწყობში შეაქვთ 20 ტონა ნახშირი. რამდენი დღის შემდეგ იქნება პირველ საწყობში 2-ჯერ მეტი ნახშირი, ვიდრე მეორეში?

10.24. ერთ საწყობში 120 ტ ხორბალია, მეორეში კი 150 ტ. პირველი საწყობიდან ყოველდღიურად გაჰქონდათ 8 ტ ხორბალი, მეორედან კი 12 ტ. რამდენი დღის შემდეგ იქნება მეორე საწყობში ხორბლის რაოდენობა პირველში დარჩენილი ხორბლის $\frac{3}{4}$ ნაწილი.

10.25. სიმინდით დათესილი ორი ნაკვეთის საერთო ფართობი უდრის 120 ჰექტარს. პირველი ნაკვეთის თითოეული ჰექტარიდან აიღეს 3 ტ სიმინდი, მეორე ნაკვეთიდან კი 2 ტ. იპოვეთ თითოეული ნაკვეთის ფართობი, თუ პირველი ნაკვეთიდან აიღეს 100 ტონით მეტი სიმინდი, ვიდრე მეორედან.

10.26. ვაგონი დატვირთულია 300 ცალი მუხის და ფიჭვის მორით. ცნობილია, რომ მუხის ყველა მორი 1 ტონით ნაკლებს იწონის, ვიდრე ფიჭვის ყველა მორი. იპოვეთ რამდენი იყო ცალ-

ცალკე მუხისა და ფიჭვის მორი, თუ მუხის თითოეული მორი 46 კგ-ს იწონის, ფიჭვის თითოეული მორი კი 28 კგ-ს.

10.27. ერთი სკოლის მოსწავლეებმა შეაგროვეს 200 ლარი და იყიდეს თეატრისა და კინოს 55 ბილეთი. რამდენი ბილეთი უყიდიათ ცალ-ცალკე თეატრისა და კინოსი, თუ თეატრის ერთი ბილეთი ღირდა 5 ლარი, ხოლო კინოს ერთი ბილეთი–2 ლარი?

10.28. 21 ლარად და 30 თეთრად ნაყიდია ორი ხარისხის 70 ფანქარი. პირველი ხარისხის ერთი ფანქარი ღირდა 35 თეთრი, ხოლო მეორე ხარისხისა 25 თეთრი. თითოეული ხარისხის რამდენი ფანქარი იყო ნაყიდი?

10.29. სამი ყანის საერთო ფართობია 16 ჰექტარი. მესამე ყანის ფართობი უდრის პირველი ორი ყანის ფართობთა ჯამს. იპოვეთ თითოეული ყანის ფართობი, თუ მეორე ყანის ფართობი ისე შეეფარდება პირველი ყანის ფართობს, როგორც 1:3.

10.30. ტრაქტორისტმა მოხნა მიწის სამი ნაკვეთი. პირველი ნაკვეთის ფართობი მთელი მოხნული ფართობის $\frac{2}{5}$ ნაწილია, ხოლო მეორე ნაკვეთის ფართობი ისე შეეფარდება მესამე ნაკვეთის ფართობს როგორც $1\frac{1}{2}:1\frac{1}{3}$. რამდენი ჰექტარი იყო სამივე ნაკვეთში, თუ მესამე ნაკვეთში 16 ჰექტარით ნაკლები იყო, ვიდრე პირველში?

10.31. ფაიფურის დასამზადებლად იყენებენ თიხას, თაბაშირსა და სილას, რომელთა მასებიც პროპორციულია 25, 1 და 2 რიცხვებისა. რამდენი თიხა, თაბაშირი და სილაა საჭირო 350 კგ ნარევის დასამზადებლად?

10.32. მიწის სამი ნაკვეთის ფართობი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $2\frac{3}{4}:1\frac{5}{6}:1\frac{3}{8}$. ცნობილია, რომ პირველი ნაკვეთიდან 72 ცენტნერი მარცვლით უფრო მეტია აღებული, ვიდრე მეორე ნაკვეთიდან. იპოვეთ სამივე ნაკვეთის ფართობი, თუ საშუალო მოსავლიანობა შეადგენს 18 ცენტნერს 1 ჰა ფართობზე.

10.33. ორი რიცხვის ჯამია 45. ერთი რიცხვის მეშვიდედი უდრის მეორე რიცხვის მერვედს. იპოვეთ ამ რიცხვების ნამრავლი.

10.34. ორი რიცხვის სხვაობაა 27. პირველი რიცხვის მერვედი უდრის მეორე რიცხვის მეხუთედს. იპოვეთ ეს რიცხვები.

10.35. ორი რიცხვი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3:2. თუ მათ შორის უმცირესს გავყოფთ 4-ზე, უდიდესს კი გავყოფთ

9-ზე, მაშინ პირველი განაყოფი 4-ით მეტი იქნება მეორე განაყოფზე. იპოვეთ ეს რიცხვები.

10.36. ერთი რიცხვი 12-ით მეტია მეორეზე. თუ უმცირეს რიცხვს გავყოფთ 7-ზე, უდიდესს კი გავყოფთ 5-ზე, მაშინ პირველი განაყოფი 4-ით ნაკლები იქნება მეორე განაყოფზე. იპოვეთ ეს რიცხვები.

10.37. წილადის მნიშვნელი 4-ით მეტია მის მრიცხველზე. თუ ამ წილადის მრიცხველსა და მნიშვნელს ერთით გავადიდებთ, მაშინ წილადი გაუტოლდება $\frac{1}{2}$-ს. იპოვეთ წილადი.

10.38. წილადის მრიცხველი 2-ით ნაკლებია მნიშვნელზე. თუ წილადის მრიცხველს შევამცირებთ 3-ჯერ, ხოლო მნიშვნელს მივუმატებთ 3-ს, მაშინ მივიღებთ $\frac{1}{8}$-ს. იპოვეთ წილადი.

10.39. წილადის მნიშვნელი 4-ით მეტია მის მრიცხველზე. თუ ამ წილადის მრიცხველს მივუმატებთ 11-ს, მნიშვნელს კი გამოვაკლებთ 1-ს, მაშინ მივიღებთ მოცემული წილადის შებრუნებულ წილადს. იპოვეთ წილადი.

10.40. წილადის მნიშვნელი 5-ით მეტია მის მრიცხველზე. თუ ამ წილადის მრიცხველს მივუმატებთ 14-ს, მნიშვნელს კი გამოვაკლებთ 1-ს, მაშინ მივიღებთ მოცემული წილადის შებრუნებულ წილადს. იპოვეთ წილადი.

10.41. გეგმით ტრაქტორისტთა ბრიგადას უნდა დაეხნა ყამირი მიწა 14 დღეში. ბრიგადა ხნავდა ყოველდღიურად 5 ჰექტარით მეტს, ვიდრე გეგმით იყო გათვალისწინებული, ამიტომ მოხვნა დაამთავრა 12 დღეში. რამდენი ჰექტარი ყამირი იყო დახნული და რამდენ ჰექტარს ხნავდა ბრიგადა ყოველდღიურად?

10.42. დადგენილ ვადაში რომ გეგმა შეესრულებინა, ბრიგადას ყოველდღიურად უნდა დაემზადებია 48 დეტალი. ის ყოველდღიურად ამზადებდა 56 დეტალს, ამიტომ შეასრულა გეგმა ვადაზე 2 დღით ადრე. რამდენი დეტალი დაამზადა ბრიგადამ და რა ვადაში?

10.43. მეთევზეთა ბრიგადას ყოველდღიურად უნდა დაეჭირა 6 ტ თევზი. ის ყოველდღიურად იჭერდა 500კგ-ს გეგმის ზევით, ამიტომ არა მარტო შეასრულა გეგმა ვადამდე 3 დღით ადრე, არამედ გეგმის ზევით დაიჭირა 12 ტ თევზი. რამდენი ტონა თევზი უნდა დაეჭირა ბრიგადას გეგმით?

10.44. თუ ქარხანა დავალების შესასრულებლად ყოველდღე გამოუშვებს 20 ტრაქტორს, მაშინ დანიშნული ვადისათვის იგი გამოუშვებს შეკვეთილზე 100 ტრაქტორით ნაკლებს. თუ ქარხანა ყოველდღიურად გამოუშვებს 23 ტრაქტორს, მაშინ დანიშნული

ვადისათვის იგი გამოუშვებს 20 ტრაქტორით იმაზე მეტს, ვიდრე შეკვეთილი იყო. რა ვადა იყო დანიშნული შეკვეთის შესასრულებლად?

10.45. მეანაბრემ ბანკიდან გამოიტანა მთელი თანხის $\frac{1}{6}$ ნაწილი, რის შემდეგ ბანკში დარჩა 800 ლარი. რამდენი ლარი იყო შეტანილი ბანკში?

10.46. ქსოვილის ფასმა დაიკლო $\frac{1}{16}$ ნაწილით, რის შემდეგ ქსოვილის ფასი 45 ლარი გახდა. რამდენი ლარი ღირდა ქსოვილი თავდაპირველად?

10.47. მოსწავლემ მეორე დღეს წაიკითხა პირველ დღეს წაკითხული წიგნის გვერდების რაოდენობის $\frac{1}{11}$ ნაწილი. რამდენი გვერდი წაუკითხავს მოსწავლეს პირველ დღეს, თუ ორივე დღეს წაკითხული აქვს 180 გვერდი?

10.48. ფერმერმა მეორე დღეს მოხნა რა პირველ დღეს მოხნული ფართობის $\frac{1}{8}$ ნაწილი, ორივე დღეს მოხნული ფართობი გახდა 99 ჰექტარი. რამდენი ჰექტარი მოუხნავს ფერმერს პირველ დღეს?

10.49. ჭვავის პურის გამოცხობისას ვღებულობთ ნამატს, რაც შეადგენს აღებული ფქვილის 0,3-ს. რამდენი ფქვილი უნდა ავიღოთ, რომ 26 კგ გამომცხვარი ჭვავის პური მივიღოთ?

10.50. ვაშლი გაშრობის დროს კარგავს თავისი წონის 84%-ს. რამდენი კგ ვაშლი უნდა ავიღოთ, რომ მივიღოთ 16 კგ ჩირი?

10.51. მოხალვის დროს ყავა კარგავს თავისი წონის 12%-ს. რამდენი კილოგრამი ნედლი ყავა უნდა ავიღოთ, რომ მივიღოთ 4,4 კგ მოხალული?

10.52. მაგიდა სკამით ღირს 240 ლარი. სკამის ღირებულება შეადგენს მაგიდის ღირებულების 20%-ს. იპოვეთ მაგიდის ღირებულება.

10.53. ქსოვილის ფასმა დაიკლო 30%-ით, რის შემდეგ ქსოვილის ფასი გახდა 42 ლარი. რამდენი ლარი ღირდა ქსოვილი თავდაპირველად?

10.54. რამდენი ლარი შეიტანა მეანაბრემ ბანკში ერთი წლის წინ, თუ მას ბანკში ახლა აქვს 327 ლარი და წლიური დანარიცხი შეადგენს 9%-ს.

10.55. მეანაბრემ ბანკში შეიტანა 800 ლარი. რამდენი ლარი ექნება მას სამი წლის შემდეგ, თუ წლიური დანარიცხია რთული 5%?

10.56. ქალაქის მოსახლეობა წლის ბოლოს უდრიდა 78000 კაცს. ვიპოვოთ ქალაქის მოსახლეობის რიცხვი წლის დასაწყისისათვის, თუ მოსახლეობის ნამატი ამ ხნის განმავლობაში შეადგენდა 4%-ს.

10.57. ქალაქში ამჟამად 48400 მცხოვრებია. ცნობილია, რომ ამ ქალაქის მოსახლეობა ყოველწლიურად იზრდება 10%-ით. რამდენი მცხოვრები ყოფილა ამ ქალაქში ორი წლის წინათ?

10.58. მეანაბრეს ბანკში ახლა აქვს 5618 ლარი. რამდენი ლარი შეიტანა მან ბანკში ორი წლის წინ, თუ წლიური დანარიცხია რთული 6%?

10.59. მეანაბრემ ორ სხვადასხვა ბანკში შეიტანა 5000 ლარი და 4500 ლარი. პირველ ბანკში შეტანილი თანხის რამდენი პროცენტი უნდა გადაიტანოს მან პირველი ბანკიდან მეორე ბანკში, რომ ორივე ბანკში თანხების რაოდენობები გათანაბრდეს?

10.60. ორ ბიდონში არის 70 ლიტრი რძე. თუ პირველი ბიდონიდან მეორეში გადავასხამთ იმ რძის 12,5%-ს, რომელიც პირველ ბიდონშია, მაშინ ორივე ბიდონში აღმოჩნდება რძის ერთი და იგივე რაოდენობა. რამდენი ლიტრი რძეა პირველ ბიდონში?

10.61. მუშის ხელფასმა ჯერ დაიკლო 20%-ით, შემდეგ კი მოიმატა 50%-ით. რამდენი პროცენტით გაიზარდა მუშის ხელფასი თავდაპირველთან შედარებით?

10.62. ქსოვილის ფასმა ჯერ დაიკლო 20%-ით, შემდეგ კი ისევ დაიკლო 25%-ით. თავდაპირველი ფასის რამდენ პროცენტს შეადგენს ქსოვილის ფასი ახლა?

10.63. ქსოვილის ფასმა ჯერ 40%-ით დაიკლო, ხოლო შემდეგ პირველად დაკლებული თანხის 25%-ით გაიაფდა, რის შემდეგაც ქსოვილის ფასი 60 ლარი გახდა. რა ღირდა ქსოვილი თავდაპირველად?

10.64. მეანაბრემ ბანკიდან პირველ დღეს გამოიტანა მთელი თანხის 80%, მეორე დღეს კი პირველ დღეს გამოტანილი თანხის 20%. ამის შემდეგ ბანკში დარჩა 16 ლარი. რამდენი ლარი იყო შეტანილი ბანკში თავდაპირველად?

10.65. პირველი მგზავრობისას ავტომობილმა დახარჯა იმ ბენზინის 0,375 ნაწილი, რაც იყო ავზში და კიდევ 5 ლიტრი. მეორე მგზავრობისას კი დარჩენილი ბენზინის 80% და უკანასკნელი 4 ლიტრი. რამდენი ლიტრი ბენზინი ყოფილა ავზში თავდაპირველად?

10.66. მეანაბრემ ბანკიდან პირველ დღეს გამოიტანა მთელი თანხის $\frac{2}{3}$ ნაწილი. მეორე დღეს კი დარჩენილი თანხის 87% და უკანასკნელი 26 ლარი. რამდენი ლარი იყო შეტანილი ბანკში თავდაპირველად?

10.67. ფერმერმა პირველ დღეს აიღო მოსავალი ფართობის $\frac{5}{12}$ ნაწილზე და კიდევ 3 ჰექტარზე. მეორე დღეს კი დარჩენილი ფართობის 75%-ზე და უკანასკნელ 8 ჰექტარზე. რამდენ ჰექტარზე აიღო მოსავალი ფერმერმა?

10.68. მეანაბრემ ბანკიდან თავდაპირველად გამოიტანა თავისი თანხის $\frac{1}{4}$ ნაწილი, შემდეგ კი დარჩენილი თანხის $\frac{4}{9}$ და კიდევ 64 ლარი. ამის შემდეგ მას ბანკში დარჩა მთელი თავისი ანაბრის $\frac{3}{20}$ ნაწილი. რამდენი ლარი იყო შეტანილი ბანკში?

10.69. მთიბავთა ბრიგადამ პირველ დღეს გათიბა მინდვრის ნახევარი და კიდევ 2 ჰექტარი, მეორე დღეს კი მინდვრის დარჩენილი ნაწილის 25% და უკანასკნელი 6 ჰექტარი. იპოვეთ მინდვრის ფართობი.

10.70. ბიბლიოთეკის უცხო ენათა განყოფილებაში არის წიგნები ინგლისურ, ფრანგულ და გერმანულ ენებზე. ინგლისური წიგნები შეადგენს წიგნების მთელი რაოდენობის 36%-ს, ფრანგული–ინგლისური წიგნების 75%-ს, დანარჩენი 185 წიგნი გერმანულია. რამდენი წიგნია ბიბლიოთეკაში უცხო ენაზე?

10.71. ავზიდან გამოუშვეს მასში არსებული წყლის $\frac{2}{5}$ ნაწილი, შემდეგ ისევ გამოუშვეს დარჩენილი წყლის $\frac{1}{4}$ ნაწილი. რამდენი ლიტრი წყალი იყო ავზში, თუ ამის შემდეგ მასში დარჩა 450 ლიტრი წყალი?

10.72. ავზში ყოველ წუთში ჩადის 180 ლ წყალი. პირველად აავსეს ავზის $\frac{7}{18}$ ნაწილი. დარჩენილი ნაწილის ასავსებად დასჭირდათ 200 ლ-ით მეტი წყალი, ვიდრე პირველად. რა დროში აივსო ავზი?

10.73. ორ ქალაქს შორის მანძილი ტურისტმა გაიარა 3 დღეში. პირველ დღეს მან გაიარა მთელი მანძილის $\frac{1}{5}$ ნაწილი

და კიდევ 60 კმ, მეორე დღეს მთელი მანძილის $\frac{1}{4}$ და კიდევ 20 კმ, ხოლო მესამე დღეს მთელი მანძილის $\frac{23}{80}$ და დარჩენილი 25 კმ. იპოვეთ მანძილი ქალაქებს შორის.

10.74. ერთ ცვლაში ორმა მუშამ ერთად 72 დეტალი დაამზადა. მას შემდეგ, რაც პირველმა მუშამ შრომის ნაყოფიერება 15%-ით გაადიდა, ხოლო მეორემ 25%-ით, ისინი ერთ ცვლაში ერთად 86 დეტალს ამზადებდნენ. რამდენ დეტალს ამზადებდა პირველი მუშა ერთ ცვლაში შრომის ნაყოფიერების გაზრდის შემდეგ?

10.75. ორ ქარხანას გეგმით თვეში უნდა გამოეშვა 360 ჩარხი. პირველმა ქარხანამ გეგმა შეასრულა 112%-ით, მეორემ კი 110%-ით; ამიტომ ორივე ქარხანამ თვეში გამოუშვა 400 ჩარხი. რამდენი ჩარხი გამოუშვია გეგმის გადამეტებით თითოეულ ქარხანას?

10.76. ფერმერი ორი ნაკვეთიდან 500 ტონა ხორბალს ღებულობდა. აგროტექნიკური ღონისძიებების გატარების შემდეგ მოსავალი პირველ ნაკვეთზე გადიდდა 30%-ით, ხოლო მეორეზე 20%-ით, ამიტომ ფერმერმა ამ ნაკვეთებიდან აიღო 630 ტ ხორბალი. რამდენი ხორბალი აიღო ფერმერმა თითოეული ნაკვეთიდან აგროტექნიკის გამოყენების შემდეგ?

10.77. ორი ველოსიპედისტი ერთდროულად გამოდის A და B ადგილებიდან ერთმანეთის შესახვედრად და ორი საათის შემდეგ ხვდებიან ერთმანეთს. იპოვეთ თითოეული მათგანის მოძრაობის სიჩქარე, თუ ვიცით, რომ პირველი ველოსიპედისტი გადიოდა საათში 3კმ-ით მეტს, ვიდრე მეორე. მანძილი A-დან B-მდე უდრის 42 კილომეტრს.

10.78. ორი ქალაქიდან, რომელთა შორის მანძილი 339 კმ-ია, ერთდროულად ერთმანეთის შესახვედრად ორი ავტომობილი გაემგზავრა და 3 საათის შემდეგ შეხვდნენ ერთმანეთს. ვიპოვოთ მეორე ავტომობილის სიჩქარე, თუ ის საათში 5 კმ-ით მეტს გადიოდა, ვიდრე პირველი ავტომობილი.

10.79. ორი პუნქტიდან, რომელთა შორის მანძილი 160 კმ-ია, ერთდროულად ერთმანეთის შესახვედრად ორი ტურისტი გამოვიდა და 5 საათის შემდეგ შეხვდნენ ერთმანეთს. იპოვეთ თითოეული ტურისტის სიჩქარე, თუ მათი შეფარდებაა 3:5.

10.80. კურიერს A პუნქტიდან B პუნქტში უნდა ჩაეტანა ამანათი. მთელი გზა აქეთ და იქით მან გაიარა $14\frac{1}{2}$ საათში; A-დან B-მდე ის გადიოდა საათში 30 კმ-ს, უკან

მოგზაურობისას B-დან A-მდე კი 28 კმ-ს. იპოვეთ მანძილი A-დან B-მდე.

10.81. A პუნქტიდან B პუნქტში კურიერმა ამანათი ჩაიტანა 35 წუთში. უკან დაბრუნებისას მან გაადიდა სიჩქარე 0,6 კმ-ით საათში და მგზავრობას მოუნდა 30 წუთი. იპოვეთ მანძილი A და B პუნქტებს შორის.

10.82. მატარებელი მანძილს A ქალაქიდან B ქალაქამდე გადის 10 სთ 40 წუთში. მატარებლის სიჩქარე რომ 10 კმ/სთ-ით ნაკლები იყოს, მაშინ ის B ქალაქში ჩავა 2სთ 8წუთით გვიან. იპოვეთ მანძილი ქალაქებს შორის და მატარებლის სიჩქარე.

10.83. მანძილს ორ სადგურს შორის მატარებელი გადის 1 საათში და 30 წუთში. თუ მისი სიჩქარე გადიდდება 10 კმ/სთ-ით, მაშინ იმავე მანძილს მატარებელი გაივლის 1 სთ 20 წუთში. იპოვეთ მანძილი სადგურებს შორის.

10.84. A ქალაქიდან B ქალაქისკენ გაემგზავრა ველოსიპედისტი 15 კმ/სთ სიჩქარით. 2 საათის შემდეგ მის კვალდაკვალ გაემგზავრა მოტოციკლისტი, რომელიც B ქალაქში ველოსიპედისტთან ერთდროულად ჩავიდა. იპოვეთ მოტოციკლისტის სიჩქარე, თუ მანძილი A და B ქალაქებს შორის არის 180 კმ.

10.85. ნავსადგომიდან ქალაქისკენ გაემგზავრა ნავი 12 კმ/სთ სიჩქარით, ხოლო 0,5 საათის შემდეგ იმავე მიმართულებით გავიდა გემი, რომლის სიჩქარე იყო 20 კმ/სთ. რა მანძილია ნავსადგომიდან ქალაქამდე, თუ გემი ქალაქში 1,5 საათით ადრე ჩავიდა, ვიდრე ნავი?

10.86. მანძილი A და B ქალაქებს შორის უდრის 50 კმ-ს. A ქალაქიდან B ქალაქში გაემგზავრა ველოსიპედისტი, ხოლო 1 სთ 30 წუთის შემდეგ მის კვალდაკვალ გაემგზავრა მოტოციკლისტი, რომელმაც გაასწრო ველოსიპედისტს და ჩავიდა B ქალაქში მასზე ერთი საათით ადრე. იპოვეთ თითოეულის სიჩქარე, თუ ვიცით, რომ მოტოციკლისტის სიჩქარე ველოსიპედისტის სიჩქარეზე 2,5-ჯერ მეტია.

10.87. მანძილი A და B ქალაქებს შორის 350 კმ-ია. A ქალაქიდან B ქალაქისაკენ გაემგზავრა ტურისტი, ხოლო 3 საათის შემდეგ მის კვალდაკვალ გაემგზავრა მეორე ტურისტი, რომელიც B ქალაქში ჩავიდა 1 საათით გვიან, ვიდრე პირველი. იპოვეთ თითოეული ტურისტის სიჩქარე, თუ მათი შეფარდებაა 5:7.

10.88. A პუნქტიდან B პუნქტში, რომელთა შორის მანძილი 160 კილომეტრია, გაემგზავრა ავტობუსი; ორი საათის შემდეგ მის კვალდაკვალ გავიდა მსუბუქი ავტომობილი, რომლის სიჩქარე ისე შეეფარდებოდა ავტობუსის სიჩქარეს, როგორც 3:1. იპოვეთ ავტობუსისა და ავტომობილის სიჩქარე, თუ

ავტომობილი B პუნქტში 40 წუთით ადრე ჩავიდა, ვიდრე ავტობუსი.

10.89. ორი მატარებელი გავიდა ერთი და იმავე ქალაქიდან ერთიმეორის მიყოლებით; პირველი მატარებელი საათში გადის 36 კილომეტრს, ხოლო მეორე–48 კმ-ს. რამდენი საათის შემდეგ დაეწევა მეორე მატარებელი პირველს, თუ ვიცით, რომ პირველი მატარებელი გასული იყო 2 საათით ადრე მეორეზე?

10.90. გზა A ქალაქიდან B ქალაქამდე ზღვით 16 კილომეტრით ნაკლებია, ვიდრე შარაგზით. გემი მანძილს A-დან B-მდე გადის 4 საათში, ავტომობილი კი 2 საათში. იპოვეთ გემის სიჩქარე, თუ ის 44 კმ/სთ-ით ნაკლებია ავტომობილის სიჩქარეზე.

10.91. მანძილს A ქალაქიდან B ქალაქამდე განრიგით ავტობუსი გადის საშუალო სიჩქარით 40 კმ/სთ. ერთხელ გზატკეცილის შეკეთების გამო ავტობუსმა გაიარა გზის პირველი ნახევარი 20 წთ-ის დაგვიანებით. რომ მისულიყო B-ში განრიგით, ავტობუსმა გზის დარჩენილი ნაწილი გაიარა 45 კმ/სთ სიჩქარით. იპოვეთ მანძილი A-დან B-მდე.

10.92. ორი აეროდრომიდან, რომელთა შორის მანძილი 950 კმ-ია, ერთდროულად ერთმანეთის შესახვედრად ვერტმფრენი და თვითმფრინავი გამოვიდა. ნახევარი საათის შემდეგ მანძილი მათ შორის უდრიდა 150 კმ-ს. იპოვეთ თითოეულის სიჩქარე, თუ თვითმფრინავის სიჩქარე 3-ჯერ მეტია ვერტმფრენის სიჩქარეზე.

10.93. დილის 8 საათზე სოფლიდან ქალაქში გაემგზავრა ველოსიპედისტი. ქალაქში მან დაჰყო $4\frac{1}{4}$ საათი, გაემგზავრა უკან და დღის 3 საათზე სოფელში დაბრუნდა. იპოვეთ მანძილი სოფლიდან ქალაქამდე, თუ ქალაქში ველოსიპედისტი მიდიოდა სიჩქარით 12 კმ/სთ, უკან კი სიჩქარით 10 კმ/სთ.

10.94. დღის 12 საათზე A ნავსადგომიდან B ნავმისადგომისაკენ გავიდა კატარღა სიჩქარით 12 კმ/სთ. დახარჯა რა შეჩერებაზე B ნავმისადგომთან 2,5 საათი, კატარღა გამოემგზავრა უკან სიჩქარით 15 კმ/სთ და ჩავიდა A ნავმისადგომში იმავე დღის 19 საათზე. იპოვეთ მანძილი A-დან B-მდე.

10.95. A ქალაქიდან B ქალაქისაკენ 4 სთ 30 წუთზე გავიდა ვერტმფრენი სიჩქარით 250 კმ/სთ. B ქალაქში 30 წუთით დაეშვა და დაბრუნდა უკან A ქალაქში 11 სთ 45 წუთზე; უკან მგზავრობისას გადიოდა 200 კმ-ს საათში. იპოვეთ მანძილი A ქალაქიდან B ქალაქამდე.

10.96. ავტომობილმა მანძილი ქალაქიდან სოფლამდე გაიარა სიჩქარით 60 კმ/სთ. უკან დაბრუნებისას მანძილის 75% მან გაიარა პირვანდელი სიჩქარით, ხოლო დანარჩენი გზა სიჩქარით 40 კმ/სთ, ამიტომ უკან მგზავრობისას მას დასჭირდა 10 წუთით მეტი დრო, ვიდრე მგზავრობისას ქალაქიდან სოფლამდე. იპოვეთ მანძილი ქალაქიდან სოფლამდე.

10.97. სტუდენტთა ჯგუფმა მოაწყო ექსკურსია. პირველი 30 კმ ფეხით გაიარეს, გზის დანარჩენი ნაწილის 20% გაცურეს მდინარეზე ტივით, ხოლო შემდეგ ისევ იარეს ფეხით 1,5-ჯერ მეტ მანძილზე, ვიდრე მდინარეზე იცურეს. მთელი გზის დარჩენილი ნაწილი სტუდენტებმა 1 საათსა და 30 წუთში გაიარეს ავტომანქანით, რომელიც მიდიოდა 40 კმ/სთ სიჩქარით. რა სიგრძისაა მთელი გზა?

10.98. მგზავრმა, რომელიც მატარებლით მიდიოდა სიჩქარით 40 კმ/სთ, შენიშნა, რომ შემხვედრმა მატარებელმა მის გვერდით გავლას მოანდომა 3 წამი. იპოვეთ შემხვედრი მატარებლის სიჩქარე, თუ ცნობილია, რომ მისი სიგრძე არის 75 მ.

10.99. დემონსტრანტთა კოლონა ქუჩაში მოძრაობს სიჩქარით 3 კმ/სთ. შემხვედრმა ველოსიპედისტმა, რომელიც მიდიოდა სიჩქარით 15 კმ/სთ, 2 წუთი დახარჯა იმისათვის, რომ გაევლო კოლონის თავიდან ბოლომდე. იპოვეთ დემონსტრანტთა კოლონის სიგრძე.

10.100. ავტომობილში მჯდომმა მგზავრმა, რომელიც მოძრაობდა 80 კმ/სთ სიჩქარით, შენიშნა, რომ ავტომობილის მიმართულებით მოძრავი მატარებლის გვერდის ავლას მოანდომა 3 წთ. რამდენ კილომეტრს გადის მატარებელი საათში, თუ მისი სიგრძეა 400 მ.

10.101. იპოვეთ მატარებლის სიგრძე და სიჩქარე, თუ ის უძრავ დამკვირებელს გვერდს უვლის 7 წმ-ში, ხოლო 306 მ სიგრძის პლატფორმას 25 წმ-ში.

10.102. ავტომობილი მანძილს ორ ქალაქს შორის გადის 5 საათში. თუ ის ყოველ კილომეტრს გაივლის $\frac{3}{7}$ წთ-ით უფრო ჩქარა, მაშინ მთელი მანძილის გავლას მოანდომებს 3 საათს. იპოვეთ ავტომობილის სიჩქარე.

10.103. მატარებელი გამოვიდა A ქალაქიდან და განსაზღვრულ დროში ჩავიდა B ქალაქში. მატარებელს რომ ყოველი კილომეტრი გაევლო 0,3 წთ-ით უფრო ნელა, მაშინ B ქალაქში ჩასვლას მოანდომებდა 4 სთ-ს. იპოვეთ მატარებლის სიჩქარე, თუ მანძილი A და B ქალაქებს შორის 160 კმ-ია.

10.104. თზომავალმა მანძილი ორ ნავმისადგომს შორის გაიარა მდინარის დინების მიმართულებით 4 საათში, ხოლო მდინარის დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით–5 საათში. იპოვეთ მანძილი ნავმისადგომებს შორის, თუ მდინარის დინების სიჩქარეა 2 კმ/სთ.

10.105. თვითმფრინავმა მანძილი ორ ქალაქს შორის ზურგის ქარის დროს 5 სთ 30 წუთში გაიარა, ხოლო პირქარის დროს–6 საათში. იპოვეთ მანძილი ქალაქებს შორის და თვითმფრინავის საკუთარი სიჩქარე, თუ ქარის სიჩქარე იყო 10 კმ/სთ.

10.106. კატერმა მდინარის დინების მიმართულებით 5 საათში იმდენი კილომეტრი გაცურა, რამდენიც 6 სთ 15 წთ-ში მდინარის დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით. იპოვეთ კატერის სიჩქარე მდგარ წყალში, თუ მდინარის დინების სიჩქარეა 2,4 კმ/სთ.

10.107. მენავე დინების მიმარულებით 3 საათში იმდენ კილომეტრს მიცურავდა, რამდენსაც 3 სთ 40 წთ-ში დინების საწინააღმდეგოდ. იპოვეთ დინების სიჩქარე, თუ ნავის სიჩქარე მდგარ წყალში 5 კმ/სთ-ია.

10.108. მოსწავლეთა ჯგუფი გაემგზავრა ნავმისადგომიდან ნავით მდინარის დინების მიმართულებით იმ პირობით, რომ უკან დაბრუნებულიყვნენ 4 საათის შემდეგ. მდინარის დინების სიჩქარეა 2 კმ/სთ; სიჩქარე, რომელსაც მენიჩბეები აძლევენ ნავს, არის 8 კმ/სთ. რა უდიდესი მანძილით შეუძლიათ მოსწავლეებს დაშორდნენ ნავმისადგომს, თუ უკან დაბრუნებამდე ისინი უნდა დარჩნენ ნაპირზე 2 საათი?

10.109. ექსკურსანტებმა 3 საათით დაიქირავეს ნავი და გაემგზავრნენ მდინარის დინების მიმართულებით. რამდენი კილომეტრით შეუძლიათ მათ დაშორდნენ ნავსადგურს, რომ 3 საათის შემდეგ მოასწრონ უკან დაბრუნება, თუ ცნობილია, რომ ნავის სიჩქარე მდგარ წყალში არის 7,5 კმ საათში, ხოლო მდინარის დინების სიჩქარეა 2,5 კმ საათში?

10.110. რამდენი საათის განმავლობაში შეიძლება იცურო მდინარის დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით ნავით, რომლის სიჩქარე მდგარ წყალში უდრის 7 კმ/სთ-ს, რომ მოასწრო გასვლის ადგილას დაბრუნება 7 საათის შემდეგ, თუ მდინარის დინების სიჩქარეა 3 კმ/სთ?

10.111. ტურისტი A ქალაქიდან B ქალაქში უნდა ჩავიდეს დანიშნულ ვადაზე. თუ ის საათში გაივლის 35 კმ-ს, მაშინ დაიგვიანებს 2 საათით; თუკი საათში გაივლის 50 კმ-ს, მაშინ ის ჩავა ვადაზე 1 საათით ადრე. გაიგეთ მანძილი A და B

ქალაქებს შორის და დრო, რომელიც უნდა მოენდომებინა ტურისტს A ქალაქიდან B ქალაქში ჩასასვლელად.

10.112. საქონლის გასაგზავნად ჩამოყენებული იყო რამდენიმე ვაგონი. თუ ვაგონში ჩატვირთავენ 15,5 ტ-ს, მაშინ 4 ტ საქონელი ჩაუტვირთავი დარჩება; თუ ვაგონში ჩატვირთავენ 16,5 ტ-ს, მაშინ ვაგონების მთლიანად დატვირთვისათვის დააკლდება 8 ტ საქონელი. რამდენი ვაგონი იყო ჩამოყენებული და რამდენი ტონა საქონელი იყო?

10.113. რამდენიმე კაცი ექსკურსიაზე გაემგზავრა. თუ თითოეული ხარჯებისათვის შეიტანს 12 ლარს და 50 თეთრს, მაშინ ხარჯების დასაფარავად დააკლდებათ 100 ლარი. თუ კი თითოეული შეიტანს 16 ლარს, მაშინ ზედმეტი გადარჩებათ 12 ლარი. რამდენი კაცი ღებულობს მონაწილეობას ექსკურსიაში?

10.114. სკოლის დარბაზში დადგმულია მერხები; თუ თითოეულ მერხზე 5 მოსწავლეს დავსვამთ, მაშინ დაგვაკლდება 8 მერხი; თუ კი თითოეულ მერხზე 6 მოსწავლეს დავსვამთ, მაშინ ორი მერხი დარჩება თავისუფალი. რამდენი მერხი იყო დადგმული დარბაზში?

10.115. წრეწირზე, რომლის სიგრძე 999 მ-ს უდრის, ორი სხეული მოძრაობს ერთი და იმავე მიმართულებით და ხვდებიან ერთმანეთს ყოველი 37 წუთის შემდეგ. იპოვეთ თითოეული სხეულის სიჩქარე, თუ ცნობილია, რომ პირველის სიჩქარე ოთხჯერ მეტია მეორის სიჩქარეზე.

10.116. ეტლის წინა ბორბალმა გარკვეულ მანძილზე 15 ბრუნით მეტი გააკეთა, ვიდრე უკანამ. წინა ბორბლის წრეწირის სიგრძე უდრის 2,5 მეტრს, უკანასი კი 4 მეტრს. რამდენი ბრუნი გააკეთა თითოეულმა ბორბალმა და რა მანძილი გაიარა ეტლმა?

10.117. ორი ბორბალი ღვედითაა შეერთებული. პირველი ბორბლის წრეწირის სიგრძე უდრის 60 სმ-ს, მეორესი კი 35 სმ-ს. რამდენ ბრუნს გააკეთებს წუთში მეორე ბორბალი, თუ პირველი წუთში აკეთებს 84 ბრუნს?

10.118. ერთ ბრიგადას მოსავლის აღება შეუძლია 20 საათში, მეორეს კი 30 საათში. რამდენ საათში აიღებს მოსავალს ორივე ბრიგადა ერთად?

10.119. ერთი მუშა სამუშაოს ასრულებს 14 საათში, მეორე კი 21 საათში. რამდენ საათში შეასრულებს ამ სამუშაოს $\frac{5}{7}$ ნაწილს ორივე ერთად მუშაობით?

10.120. სხვადასხვა სიმძლავრის ორმა ტრაქტორმა ერთად მუშაობით 8 საათის განმავლობაში შეასრულა სამუშაო. რამდენ საათში შეასრულებს ამ სამუშაოს მარტო პირველი ტრაქტორი,

თუ იგივე სამუშაოს მარტო მეორე ტრაქტორი ასრულებს 12 საათში?

10.121. ავზში მიერთებულია ონკანი და მილი. გახსნილი ონკანით ცარიელი ავზი ივსება 4 სთ-ში, ხოლო გახსნილი მილით სავსე ავზი იცლება 6 სთ-ში. რამდენ სთ-ში აივსება ნახევრად სავსე ავზი, თუ ონკანს და მილს ერთდროულად გავხსნით?

10.122. ერთ ბრიგადას მთელი მოსავლის აღება შეუძლია 12 დღეში, მეორეს კი – 9 დღეში. მას შემდეგ, რაც 5 დღეს იმუშავა მარტო პირველმა ბრიგადამ, მას შეუერთდა მეორე ბრიგადა და ორივემ ერთად დაასრულა სამუშაო. რამდენი დღე იმუშავა ორივე ბრიგადამ ერთად?

10.123. თოვლის აღებაზე მუშაობს ორი თოვლსაწმენდი მანქანა. ერთ მათგანს შეუძლია მთელი ქუჩა გაასუფთაოს ერთ საათში, მეორეს კი – 45 წთ-ში. ორივე მანქანამ ქუჩის გაწმენდა ერთდროულად დაიწყო და ერთად იმუშავა 20 წუთს, რის შემდეგაც პირველმა მანქანამ შეწყვიტა მუშაობა. რა დროა საჭირო, რომ მარტო მეორე მანქანამ დაასრულოს მთელი სამუშაო?

10.124. ორმა ექსკავატორმა ქვაბული ამოთხარა 12 დღეში. მარტო პირველ ექსკავატორს შეეძლო ეს სამუშაო შეესრულებია $1\frac{1}{2}$-ჯერ უფრო ჩქარა, ვიდრე მარტო მეორეს. რამდენ დღეში შეეძლო ამ სამუშაოს შესრულება თითოეულ ექსკავატორს?

10.125. ორმა ბრიგადამ ერთდროული მუშაობით მიწის ნაკვეთი 12 საათის განმავლობაში დაამუშავა. რა დროს მოანდომებდა ამ ნაკვეთის დამუშავებას პირველი ბრიგადა, თუ ბრიგადების მიერ სამუშაოს შესრულების დროები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3?

10.126. მაღაროდან წყლის ამოსაქაჩავად დადგმულია სამი ტუმბო. პირველი ტუმბო ცალკე მუშაობის დროს წყალს ამოქაჩავს 12 საათში, მეორე 15 საათში და მესამე 20 საათში. პირველი სამი საათის განმავლობაში მოქმედებდნენ პირველი და მესამე ტუმბოები, შემდეგ კი მათ შეუერთეს მეორე ტუმბოც. რამდენი დრო დაიხარჯა სულ მაღაროდან წყლის ამოსაქაჩავად?

10.127. სამი მილის ერთდროული მოქმედებით ავზის $\frac{7}{8}$ ნაწილი ივსება 1 სთ-ში. რამდენ საათში აავსებს ავზს მარტო პირველი მილი, თუ ის ავზს ავსებს 2-ჯერ უფრო სწრაფად, ვიდრე მარტო მეორე და 2-ჯერ უფრო ნელა, ვიდრე მარტო მესამე მილი?

10.128. სამ კალატოზს ერთად მუშაობით კედლის აშენება შეუძლია 12 სთ-ში. რამდენ საათში ააშენებს ამ კედელს თითოეული ცალ-ცალკე, თუ ეს დროები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3:4?

10.129. მოცემული ოთხი რიცხვის საშუალო არითმეტიკულია 30. ამ რიცხვებიდან ერთ-ერთი უდრის 60-ს. იპოვეთ დანარჩენი სამი რიცხვის საშუალო არითმეტიკული.

10.130. მოცემული ათი რიცხვის საშუალო არითმეტიკულია 7. ამ რიცხვებიდან ექვსის საშუალო არითმეტიკულია 5. იპოვეთ დანარჩენი ოთხი რიცხვის საშუალო არითმეტიკული.

10.131. ოჯახში (მამა, დედა და შვილი) მამის ხელფასი შეადგენს ოჯახის შემოსავლის $\frac{3}{5}$-ს, ხოლო შვილის შემოსავალია ოჯახის შემოსავლის 10%. იპოვეთ ოჯახის წევრების საშუალო შემოსავალი, თუ დედის ხელფასია 360 ლარი.

10.132. წლის განმავლობაში კლასის ხუთმა მოსწავლემ წონაში მოიმატა 5-5 კგ, ხოლო დანარჩენებმა 3-3 კგ, რის შედეგადაც მოსწავლეთა საშუალო წონა 30-დან 34 კგ-მდე გაიზარდა. რამდენი მოსწავლეა კლასში?

10.133. მოსწავლეთა მესამედი აბარებდა თსუ-ში და მათი საშუალო ქულა აღმოჩნდა 80, ნახევარი–სტუ-ში და მათი საშუალო ქულა აღმოჩნდა 72, ხოლო დანარჩენი მოსწავლეების–62. იპოვეთ მოსწავლეთა საშუალო ქულა.

10.134. ბრიგადაში იყო 11 კაცი და მათი საშუალო ხელფასი შეადგენდა 720 ლარს. მას შემდეგ, რაც რამოდენიმე წევრმა დატოვა ბრიგადა, ბრიგადის დარჩენილი წევრების საშუალო ხელფასი გახდა 670 ლარი. რამდენმა წევრმა დატოვა ბრიგადა, თუ მათი (გადასულების) საშუალო ხელფასი იყო 780 ლარი?

10.135. კლასის მოსწავლეებიდან 18 საშუალოდ იწონის 65 კგ–ს, 11 საშუალოდ იწონის 63 კგ-ს, ხოლო დარჩენილი ორი ბავშვის საერთო წონაა 152 კგ. იპოვეთ მოსწავლეთა საშუალო წონა.

10.136. ფეხბურთელთა გუნდის (11 ფეხბურთელი) საშუალო ასაკი იყო 22 წელი. როდესაც გუნდის კაპიტანი სხვა გუნდში გადავიდა და მისი ადგილი 18 წლის ახალგაზრდა ფეხბურთელმა დაიკავა, გუნდის საშუალო ასაკი გახდა 21 წელი. იპოვეთ კაპიტნის ასაკი.

10.137. რამდენი კილოგრამი წყალი უნდა ავაორთქლოთ 0,5 ტონა ცელულოზის მასიდან, რომელიც 85% წყალს შეიცავს, რომ მივიღოთ 75% წყლის შემცველი მასა?

10.138. ახალი სოკო წონის მიხედვით შეიცავს 90% წყალს, ხოლო გამხმარი–12% წყალს. რამდენი გამხმარი სოკო მიიღება 22 კგ ახალი სოკოსაგან?

10.139. ხსნარი შეიცავს 40 გ მარილს. მას დაუმატეს 200 გ მტკნარი წყალი და ამის შემდეგ მარილის კონცენტრაციამ შეადგინა 8%. რამდენი გრამი ხსნარი იყო თავდაპირველად?

10.140. რამდენი ლიტრი წყალი უნდა დაემატოს 12% შაქრის შემცველ 20 ლიტრ სიროფს, რომ მივიღოთ 10% შაქრის შემცველი სიროფი?

10.141. ზღვის წყალი მასის მიხედვით შეიცავს 5% მარილს. რამდენი კილოგრამი მტკნარი წყალი უნდა დაემატოს 30 კგ ზღვის წყალს, რომ მარილის კონცენტრაციამ შეადგინოს 1,5%?

10.142. გვაქვს ოქროსა და სპილენძის ორი შენადნობი. პირველ შენადნობში ამ ლითონების შეფარდება შესაბამისად არის 2:3, ხოლო მეორეში 3:5. ამ ორი შენადნობიდან გვინდა მივიღოთ 26 გრ ლითონი, რომელშიც ოქროსა და სპილენძის შეფარდება შესაბამისად იქნება 5:8. რამდენი გრ თითოეული შენადნობის აღებაა საჭირო ამისათვის?

10.143. ტბის წყალში მარილის კონცენტრაციაა 7%, ხოლო ზღვის წყალში 2%. ამ ორი სახის წყლის შერევით გვინდა მივიღოთ 20ლ წყალი, რომელშიც მარილის კონცენტრაცია იქნება 4%. რამდენი ლიტრი ტბის და რამდენი ლიტრი ზღვის წყალი უნდა შევურიოთ ამისათვის?

II. ამოცანების ამოხსნა კვადრატული განტოლებების გამოყენებით

10.144. მართკუთხედის ფორმის ნაკვეთი, რომლის ერთი გვერდი 10 მ-ით მეტია მეორეზე, უნდა შემოიღობოს. იპოვეთ ღობის სიგრძე, თუ ცნობილია, რომ ნაკვეთის ფართობი 1200 $მ^2$-ს უდრის.

10.145. მართკუთხედის სიმაღლე მისივე ფუძის 75%-ს შეადგენს. იპოვეთ ამ მართკუთხედის პერიმეტრი, თუ ცნობილია, რომ მართკუთხედის ფართობი 48 $მ^2$-ს უდრის.

10.146. კვადრატის ფორმის თუნუქის ფურცელს ჩამოჭრეს 10 სმ სიგანის ზოლი, რის შემდეგ ფურცლის დარჩენილი ნაწილის ფართობი 5600 $სმ^2$-ის ტოლი გახდა. იპოვეთ მოცემული თუნუქის ფურცლის ფართობი.

10.147. ორი ავტომობილი ერთდროულად გაემგზავრა ერთი ქალაქიდან მეორისაკენ. პირველის სიჩქარე 10 კმ/სთ-ით მეტია მეორის სიჩქარეზე, და ამიტომ პირველი ავტომობილი 1 საათით ადრე მიდის ადგილზე, ვიდრე მეორე. იპოვეთ ორივე ავტომობილის სიჩქარე, თუ ცნობილია, რომ მანძილი ქალაქებს შორის 560 კმ-ია.

10.148. აეროდრომიდან 1600 კმ-ით დაშორებული პუნქტისაკენ ერთდროულად ორი თვითმფრინავი გაფრინდა. ერთის სიჩქარე მეორის სიჩქარეზე 80 კმ/სთ-ით მეტი იყო და ამიტომ იგი 1 საათით ადრე მიფრინდა დანიშნულების ადგილზე. იპოვეთ თითოეული თვითმფრინავის სიჩქარე.

10.149. ტურისტმა გაიარა 72 კილომეტრი და შენიშნა, რომ თუ იგი ამ მგზავრობას 6 დღით მეტ დროს მოანდომებდა, მაშინ მას შეეძლო დღეში 2 კმ-ით ნაკლები გაევლო, ვიდრე გადიოდა. რამდენ კილომეტრს გადიოდა იგი დღეში?

10.150. ორი ქალაქიდან, რომელთა შორის მანძილი 900 კმ-ია, ერთმანეთის შესახვედრად გამოდის ორი მატარებელი და ხვდებიან ერთმანეთს შუა გზაზე. იპოვეთ თითოეული მატარებლის სიჩქარე, თუ პირველი მატარებელი 1 საათით გვიან გამოვიდა მეორეზე და მისი სიჩქარე 5 კმ/სთ-ით მეტია, ვიდრე მეორე მატარებლის სიჩქარე?

10.151. მატარებელი 6 წუთით იქნა შეჩერებული გზაში და ეს დაგვიანება მან აანაზღაურა 40 კმ-იან გადასარბენზე, რომელიც გაიარა 20 კმ/სთ-ით მეტი სიჩქარით, ვიდრე განრიგით იყო დადგენილი. იპოვეთ განრიგის მიხედვით მატარებლის სიჩქარე ამ გადასარბენზე.

10.152. A და B სადგურებს შორის შუა გზაზე მატარებელი შეჩერებულ იქნა 10 წუთით. B-ში რომ განრიგის მიხედვით მისულიყო, მემანქანემ მატარებლის სიჩქარე გაადიდა 12 კმ/სთ-ით. იპოვეთ მატარებლის საწყისი სიჩქარე, თუ ცნობილია, რომ მანძილი სადგურებს შორის 120 კმ-ია.

10.153. მატარებელს 800 კმ უნდა გაევლო. შუა გზაზე იგი შეჩერებული იქნა 1 საათით, და ამიტომ, დროზე რომ მისულიყო დანიშნულ ადგილზე სიჩქარე უნდა გაედიდებინა 20 კმ/სთ-ით. რა დრო დასჭირდა მატარებელს მთელი გზის გასავლელად?

10.154. ორთქლმავალი 24 კმ-იანი პირველი გადასარბენის გავლის შემდეგ შეჩერებულ იქნა რამდენიმე ხნით, მეორე გადასარბენი მან გაიარა წინანდელზე 4 კმ/სთ-ით მეტი სიჩქარით. მიუხედავად იმისა, რომ მეორე გადასარბენი პირველზე 15 კმ-ით გრძელი იყო, ორთქლმავალმა იგი გაიარა

მხოლოდ 20 წუთით მეტ დროში, ვიდრე პირველი. იპოვეთ ორთქლმავლის საწყისი სიჩქარე.

10.155. ველოსიპედისტი ყოველ წუთში 500 მეტრით ნაკლებს გადის, ვიდრე მოტოციკლისტი, ამიტომ 120 კმ მანძილის გასავლელად იგი ხარჯავს ორი საათით მეტ დროს, ვიდრე მოტოციკლისტი. გამოთვალეთ ველოსიპედისტის სიჩქარე.

10.156. ვერტმფრენი ყოველ წამში 150 მ-ით ნაკლებს გადის, ვიდრე თვითმფრინავი, ამიტომ 900 კმ-ის გასავლელად იგი ხარჯავს 1 სთ და 30 წთ-ით მეტ დროს, ვიდრე თვითმფრინავი. იპოვეთ ვერტმფრენის და თვითმფრინავის სიჩქარე.

10.157. ველოსიპედისტმა 100 კმ გაიარა $2\frac{2}{3}$ სთ-ით ადრე, ვიდრე გათვალიწინებული ჰქონდა თავდაპირველად, რადგან 12 წთ-ში გადიოდა 2 კმ-ით მეტს , ვიდრე ჰქონდა ნავარაუდევი. რა სიჩქარით უნდა ემოძრავა ველოსიპედისტს?

10.158. მატარებელს 300 კმ-ის ტოლი MN მანძილი გარკვეული სიჩქარით უნდა გაევლო. მაგრამ დასაწყისში მისი სიჩქარე ნავარაუდევზე 8 კმ/სთ-ით ნაკლები იყო და იმისათვის, რომ N-ში დროზე ჩასულიყო, M-დან 180 კმ-ით დაშორებულ სადგურიდან ნავარაუდევზე 16 კმ/სთ-ით მეტი სიჩქარით მიდიოდა. რა დრო მოანდომა მატარებელმა M-დან N-მდე მანძილის გავლას?

10.159. ტურისტმა ავტომანქანით გაიარა მთელი გზის $\frac{5}{8}$ ნაწილი, ხოლო დანარჩენი გაიარა კატარღით, კატარღის სიჩქარე 20 კმ/სთ-ით ნაკლებია ავტომანქანის სიჩქარეზე. ავტომანქანით ტურისტი 15 წუთით მეტ ხანს მოგზაურობდა, ვიდრე კატარღით. რას უდრის ავტომანქანის სიჩქარე და კატარღის სიჩქარე, თუ ტურისტის მიერ გასავლელი მთელი გზა 160 კმ-ია?

10.160. გემმა მდინარის დინების მიმართულებით გაიარა 48 კმ და ამდენივე დინების წინააღმდეგ, სულ ამ მგზავრობას დასჭირდა 5 საათი. იპოვეთ გემის სიჩქარე მდგარ წყალში, თუ მდინარის დინების სიჩქარეა 4 კმ/სთ.

10.161. მანძილი ორ ნავსადგურს შორის მდინარით 80 კმ-ია. გემი ამ მანძილის გავლას იქით-აქეთ 8 სთ 20წთ-ს უნდება. იპოვეთ გემის სიჩქარე მდგარ წყალში, თუ მდინარის დინების სიჩქარეა 4 კმ/სთ.

10.162. A პუნქტიდან მდინარის დინების მიმართულებით ტივი გაგზავნეს. 5 სთ 20 წუთის შემდეგ იმავე პუნქტიდან ტივს მოტორიანი ნავი დაედევნა, რომელმაც გაიარა 20 კმ და ტივს

დაეწია. რამდენ კილომეტრს გადიოდა საათში ტივი, თუ მოტორიანი ნავი მასზე 12 კმ-ით ჩქარა მოძრაობდა საათში?

10.163. მანძილი ერთი ნავსადგურიდან მეორემდე მდინარის გასწვრივ 30 კმ-ია. მოტორიანი ნავი ამ მანძილს იქით-აქეთ 6 საათში გადის, 40 წუთით გზაში გაჩერების ჩათვლით. იპოვეთ მოტორიანი ნავის საკუთარი სიჩქარე, თუ მდინარის დინების სიჩქარე 3 კმ-ის ტოლია საათში.

10.164. ორი ავტომობილი გამოვიდა ერთმანეთის შესახვედრად A და B ქალაქებიდან. ერთი საათის შემდეგ ავტომობილები შეხვდნენ ერთმანეთს და შეუჩერებლად განაგრძეს გზა იმავე სიჩქარით. პირველი B ქალაქში 27 წთ-ით გვიან მივიდა, ვიდრე მეორე A ქალაქში. იპოვეთ თითოეული ავტომობილის სიჩქარე, თუ ცნობილია, რომ მანძილი ქალაქებს შორის 90 კმ-ია.

10.165. ორი ველოსიპედისტი ერთდროულად გამოდის ერთმანეთის შესახვედრად A და B ორი პუნქტიდან, რომელთა შორის მანძილი 28 კმ-ია, და ერთი საათის შემდეგ ხვდებიან ერთმანეთს. ისინი შეუჩერებლად განაგრძობენ გზას იმავე სიჩქარით და პირველი B პუნქტში მიდის 35 წთ-ით უფრო ადრე, ვიდრე მეორე A პუნქტში. იპოვეთ თითოეული ველოსიპედისტის სიჩქარე.

10.166. A და B ორი პუნქტიდან, რომელთა შორის მანძილი 24 კმ-ია ერთსა და იმავე დროს ერთმანეთის შესახვედრად ორი ავტომობილი გაიგზავნა. მათი შეხვედრის შემდეგ A-დან გამოსული ავტომობილი B პუნქტში მიდის 16 წთ-ში, ხოლო მეორე ავტომობილი 4 წუთში მიდის A-ში. იპოვეთ თითოეული ავტომობილის სიჩქარე.

10.167. ორი ტურისტი ერთდროულად გამოვიდა ერთმანეთის შესახვედრად A და B ორი ადგილიდან. შეხვედრისას აღმოჩნდა, რომ პირველს 4 კილომეტრით ნაკლები გაუვლია მეორეზე. განაგრძეს რა მოძრაობა იმავე სიჩქარით, პირველი მივიდა B-ში 4 სთ და 48 წთ-ში შეხვედრის შემდეგ, ხოლო მეორე მივიდა A-ში 3 სთ და 20 წთ-ში შეხვედრის შემდეგ. იპოვეთ მანძილი A-დან B-მდე.

10.168. A და C ორი პუნქტიდან B პუნქტისაკენ ერთდროულად ორი ველოსიპედისტი გავიდა, პირველი A-დან მეორე – C-დან. მანძილი C-დან B-მდე 12 კმ-ით მეტია, ვიდრე მანძილი A-დან B-მდე. ველოსიპედისტები B პუნქტში ჩავიდნენ 3 სთ-ში. მეორე ველოსიპედისტი თითოეულ კილომეტრს გადიოდა $\frac{3}{4}$ წთ-ით უფრო ჩქარა, ვიდრე პირველი. იპოვეთ მანძილი A-დან B-მდე და თითოეული ველოსიპედისტის სიჩქარე.

10.169. ორი გემი ერთდროულად გავიდა ნავსადგურიდან: ერთი ჩრდილოეთით, მეორე აღმოსავლეთით. ორი საათის შემდეგ მათ შორის მანძილი 60 კმ აღმოჩნდა. იპოვეთ თითოეული გემის სიჩქარე, თუ ცნობილია, რომ ერთის სიჩქარე საათში 6 კმ-ით მეტია მეორის სიჩქარეზე.

10.170. *A* პუნქტიდან გამომავალ ორ გზაზე ორმა ავტომობილმა ერთდროულად დაიწყო მოძრაობა. გზებს შორის კუთხე 60°-ია. ერთი ავტომობილის სიჩქარე ორჯერ მეტია მეორის სიჩქარეზე. დროის გარკვეულ მომენტში ავტომობილებს შორის მანძილი 300 კმ გახდა. რა მანძილი ჰქონდა გავლილი დროის ამ მომენტისათვის თითოეულ ავტომობილს?

10.171. *A* პუნქტიდან გამომავალ ორ გზაზე ორმა ტურისტმა ერთდროულად დაიწყო მოძრაობა ერთიდაიგივე სიჩქარით. გზებს შორის კუთხე 120°-ია. დროის გარკვეულ მომენტში ტურისტებს შორის მანძილი 60 კმ გახდა. რა მანძილი ჰქონდა გავლილი დროის ამ მომენტისათვის თითოეულ ტურისტს?

10.172. ორ კონცენტრულ წრეწირზე თანაბრად მოძრაობს ორი წერტილი. ერთ სრულ ბრუნს ერთი მათგანი 5 წამით ნაკლებს ანდომებს, ვიდრე მეორე, რის გამოც იგი 1 წუთში ორი ბრუნით მეტს აკეთებს. რამდენ ბრუნს აკეთებს წუთში პირველი წერტილი?

10.173. ფერმერს განსაზღვრული ვადისათვის უნდა დაეთესა 200 ჰა, მაგრამ იგი ყოველდღიურად 5 ჰა-თი მეტს თესავდა, ვიდრე გეგმით იყო გათვალისწინებული, და ამიტომ თესვა ვადაზე 2 დღით ადრე დაამთავრა. რამდენ დღეში დამთავრებულა თესვა?

10.174. თივის მარაგი იმდენია, რომ შეიძლება ყოველდღიურად გაიცეს ყველა ცხენისათვის 96 კგ. სინამდვილეში შეძლეს თითოეული ცხენის ყოველდღიური ულუფის 4 კგ-ით გადიდება, რადგანაც ორი ცხენი გადაიყვანეს სხვა თავლაში. რამდენი ცხენი იყო თავდაპირველად?

10.175. 15 ტ ბოსტნეულის გადასაზიდად მოითხოვეს განსაზღვრული ტვირთმზიდაობის რამდენიმე მანქანა. გარაჟმა გაგზავნა 0,5 ტონით ნაკლები ტვირთმზიდაობის მანქანები, რომელთა რაოდენობა იყო მოთხოვნილზე ერთით მეტი. რამდენი ტონა ბოსტნეული წაიღო თითოეულმა მანქანამ?

10.176. პირველმა ოსტატმა 60 დეტალის დამზადებაზე 3 საათით ნაკლები დრო დახარჯა ვიდრე მეორემ. რამდენ საათში დაამზადებს 90 დეტალს მეორე ოსტატი, თუ ერთად მუშაობით ერთ საათში ისინი ამზადებენ 30 დეტალს?

10.177. სიმინდით დათესილი ერთი ნაკვეთის ფართობი 2 ჰა-თი ნაკლები იყო მეორე ნაკვეთის ფართობზე. მოსავლის აღებისას თითოეული ნაკვეთიდან მიიღეს 60 ტ სიმინდი. რამდენი ტონა სიმინდი იყო აღებული თითოეული ნაკვეთის ერთი ჰექტარიდან, თუ პირველ ნაკვეთზე 1 ტ-ით მეტი სიმინდი აიღეს ჰექტარიდან, ვიდრე მეორეზე?

10.178. ერთ ნაკვეთზე აღებული იყო 200 ც ხორბალი, ხოლო მეორე ნაკვეთზე, რომლის ფართობი 2 ჰა-თი მეტია, ვიდრე პირველი ნაკვეთის ფართობი–300 ც. ამასთანავე, თითოეულ ჰექტარზე 5 ც-ით მეტი, ვიდრე პირველი ნაკვეთის თითოეულ ჰექტარზე. იპოვეთ მიწის თითოეული ნაკვეთის ფართობი.

10.179. მიწის ერთ ნაკვეთზე აიღეს 4,8 ტ კარტოფილი; მეორე ნაკვეთზე, რომლის ფართობიც 0,03 ჰა-თი ნაკლებია პირველზე, აიღეს 2 ტ კარტოფილი. ამასთანავე მეორე ნაკვეთის 1 მ^2-ზე აიღეს 2 კგ-ით ნაკლები, ვიდრე პირველი ნაკვეთის 1 მ^2-ზე. იპოვეთ თითოეული ნაკვეთის ფართობი.

10.180. საკონცერტო დარბაზში 600 ადგილია. იმის შემდეგ, რაც თითოეულ რიგში ადგილების რიცხვი 4-ით გაადიდეს და კიდევ ორი რიგი დაუმატეს, დარბაზში 748 ადგილი გახდა. რამდენი რიგია ახლა დარბაზში?

10.181. ორმა ბრიგადამ ერთად მუშაობით ხეების დარგვა ნაკვეთზე 4 დღეში დაამთავრა. რამდენი დღე დასჭირდებოდა ამ სამუშაოს შესასრულებლად თითოეულ ბრიგადას ცალ-ცალკე, თუ ერთ მათგანს შეეძლო ხეების დარგვის დამთავრება 6 დღით ადრე მეორეზე?

10.182. წყალსადენის ავზი ორი მილით ივსება 2 სთ და 55 წუთში. პირველ მილს შეუძლია მისი ავსება 2 საათით უფრო მალე, ვიდრე მეორეს. რამდენ ხანში აავსებს ამ ავზს თითოეული მილი ცალ-ცალკე მოქმედებით?

10.183. ოთხი დღის ერთად მუშაობით სხვადასხვა სიმძლავრის ორმა ტრაქტორმა მთელი ფართობის $\frac{2}{3}$ ნაწილი მოხნა. რამდენ დღეში მოხნავდა მთელ ფართობს თითოეული ტრაქტორი ცალ-ცალკე, თუ პირველ ტრაქტორს შეუძლია მთელი ფართობის 5 დღით ჩქარა მოხვნა, ვიდრე მეორეს?

10.184. ორ კალატოზს, რომელთაგანაც მეორე $1\frac{1}{2}$ დღით გვიან იწყებს მუშაობას პირველზე, შეუძლია კედლის ამოყვანა 7 დღეში. რამდენ დღეში ამოიყვანდა ამ კედელს თითოეული

მათგანი ცალ-ცალკე, თუ ცნობილია, რომ მეორე კალატოზს შეუძლია კედლის ამოყვანა 3 დღით ადრე პირველზე?

10.185. ერთი მუშა გეგმით გათვალისწინებულ სამუშაოს ასრულებს 4 დღით ადრე, ვიდრე მეორე. თუ ორივე ერთად 48 დღეს იმუშავებს, შესრულდება 7-ჯერ მეტი სამუშაო ვიდრე გეგმით იყო გათვალისწინებული. გეგმით გათვალისწინებული სამუშაოს რა ნაწილი შესრულდება, თუ მარტო პირველი მუშა იმუშავებს 3 დღეს, ხოლო მარტო მეორე 4 დღეს?

10.186. სამ კალატოზს ერთად შეუძლია კედლის აშენება 12 საათში. პირველს, მარტო მუშაობით, შეუძლია კედლის აშენება მესამეზე $1\frac{7}{9}$-ჯერ უფრო სწრაფად და მეორეზე 2 საათით უფრო სწრაფად. კედლის რა ნაწილს ააშენებს პირველი კალატოზი მარტო მუშაობით 5 საათში?

10.187. სამ ბრიგადას ერთად მუშაობით სამუშაოს შესრულება შეუძლია 6 დღეში. მარტო მეორე ბრიგადას იგივე სამუშაოს შესრულება შეუძლია 4-ჯერ უფრო ჩქარა ვიდრე მარტო მესამეს და 4 დღით ჩქარა ვიდრე მარტო პირველს. სამუშაოს რა ნაწილის შესრულება შეუძლია მესამე ბრიგადას 2 დღეში მარტო მუშაობით?

10.188. პირველი მილი ავზს ავსებს 4 საათით გვიან, ხოლო მეორე მილი 9 საათით გვიან, ვიდრე ორივე მილი ერთად. რა დროში აავსებს ავზს თითოეული მილი ცალ-ცალკე?

10.189. ქსოვილის ფასმა იმდენი პროცენტით დაიკლო, რამდენი ლარიც ღირდა მეტრი ქსოვილი ფასების დაკლებამდე. რამდენი პროცენტით იქნა დაკლებული ქსოვილის ფასი, თუ მეტრი ქსოვილი 16 ლარად გაყიდეს?

10.190. ქსოვილის ფასმა მოიმატა იმაზე ორჯერ მეტი პროცენტით, რამდენი ლარიც ღირდა მეტრი ქსოვილი ფასის მომატებამდე. რამდენი პროცენტით მოიმატა ქსოვილის ფასმა, თუ მომატების შემდეგ მისი ფასი გახდა 28 ლარი?

10.191. პროცენტების ერთი და იმავე რიცხვით ფასების ორი თანმიმდევრობითი დაკლების შემდეგ ფოტოაპარატის ფასი 150 ლარიდან 96 ლარამდე დაეცა. რამდენი პროცენტით კლებულობდა ფოტოაპარატის ფასი თითოეულ შემთხვევაში?

10.192. ქალაქის მცხოვრებთა რიცხვი ორი წლის განმავლობაში 20000 კაციდან 22050 კაცამდე გაიზარდა. იპოვეთ ამ ქალაქის მცხოვრებთა ზრდის საშუალო ყოველწლიური პროცენტი.

10.193. საწვავზე ფასების ორჯერ თანმიმდევრული გაზრდის შემდეგ ფასი საწვავზე გახდა 3-ჯერ მეტი თავდაპირველ ფასთან

შედარებით. ამასთან ფასი პირველად 2-ჯერ ნაკლები პროცენ-ტით გაიზარდა, ვიდრე მეორედ. რამდენი პროცენტით გაიზარდა ფასი პირველად?

10.194. ფოტოაპარატი, რომლის ფასი იყო 20 ლარი, ჯერ გაძვირდა და შემდეგ გაიაფდა. ამასთან გაიაფება მოხდა 4-ჯერ მეტი პროცენტით ვიდრე გაძვირება. რამდენი პროცენტით გაიაფდა და რამდენი პროცენტით გაძვირდა ფოტოაპარატი, თუ იგი ახლა 16 ლარი და 80 თეთრი ღირს?

10.195. კურსის სტუდენტთა საშუალო ქულა მათი რაოდენო-ბის ტოლი იყო. მას შემდეგ, რაც 5 სტუდენტი, საშუალო ქულით 50, სხვა ფაკულტეტზე გადავიდა, კურსის სტუდენტთა საშუალო ქულა გახდა 82. რამდენი სტუდენტი იყო თავიდან კურსზე?

10.196. ბრიგადის წევრთა საშუალო ყოველდღიური შემოსავა-ლი იყო 30 ლარი. თუ ბრიგადას დაემატება ერთი მუშა, რომლის ყოველდღიური შემოსავალია 61 ლარი, მაშინ ბრიგადის წევრთა საშუალო ყოველდღიური შემოსავალი ლარებში რიცხობრივად გახდება ბრიგადის წევრთა რაოდენობის ტოლი. რამდენი წევრია ბრიგადაში?

10.197. პირველ და მეორე ჯგუფში სტუდენტთა რაოდენობა ერთი და იგივეა. სესიების შედეგად მიღებული მათი საშუალო ქულა ერთი და იგივე რიცხვი–60 აღმოჩნდა. თუ პირველი ჯგუფიდან მეორეში გადავიყვანთ 42 ქულის მქონე ერთ სტუდენტს, მაშინ პირველი ჯგუფის სტუდენტთა საშუალო ქულა 1,9-ით მეტი იქნება მეორე ჯგუფის საშუალო ქულაზე. რამდენი სტუდენტია თითოეულ ჯგუფში?

10.198. ჭიდაობის სექციის ერთი წევრი იწონიდა 63 კგ-ს, ხოლო დანარჩენების საშუალო წონა იყო 60 კგ. მას შემდეგ, რაც სექციაში მოვიდა 57 კგ წონის მქონე ახალი მოჭიდავე, სექციის წევრთა საშუალო წონამ მოიკლო 100 გრამით. რამდენი მოჭიდავე იყო სექციაში თავდაპირველად?

10.199. ფეხბურთში პირველობის გათამაშების დროს ჩატარდა 55 თამაში: ამასთანავე, თითოეულმა გუნდმა დანარჩენ გუნდებთან მხოლოდ თითო თამაში ჩაატარა. რამდენი გუნდი მონაწილეობდა გათამაშებაში?

10.200. თუ მოჭადრაკეთა შეჯიბრების თითოეული მონაწილე დანარჩენ მონაწილეებთან მხოლოდ თითო პარტიას ითამაშებს, მაშინ სულ გათამაშებული იქნება 231 პარტია. რამდენი მონაწილეა მოჭადრაკეთა შეჯიბრებაში?

10.201. მოსწავლეები ერთმანეთს უცვლიან თავის ფოტოსურათებს. რამდენი მოსწავლე ყოფილა, თუ გაცვლა-გამოცვლისათვის საჭიროა 870 ფოტოსურათი?

10.202. რამდენიმე წერტილზე, რომელთაგან არცერთი სამი წერტილი ერთ წრფეზე არ მდებარეობს, გავლებულია ამ წერტილების წყვილ-წყვილად შემაერთებელი ყველა წრფე. განსაზღვრეთ, რამდენი წერტილი იყო აღებული, თუ გატარებული წრფეების რიცხვი აღმოჩნდა 45?

10.203. ამოზნექილ მრავალკუთხედში გავლებულია ყველა შესაძლო დიაგონალი; მათი რიცხვი 14 აღმოჩნდა. რამდენი გვერდი აქვს ამ მრავალკუთხედს?

10.204. რომელ მრავალკუთხედს აქვს დიაგონალების რიცხვი 12-ით მეტი გვერდების რიცხვზე?

10.205. ყუთის სახურავში, რომელსაც მართკუთხედის ფორმა აქვს სიგრძით 30 სმ და სიგანით 20 სმ, უნდა ამოიჭრას 200 სმ^2 ფართობის მართკუთხა ნახვრეტი ისე, რომ ამ ნახვრეტის ნაპირები ყველგან ერთნაირ მანძილზე იყოს სახურავის ნაპირებიდან. რა მანძილით უნდა იყოს დაშორებული ნახვრეტის ნაპირი სახურავის ნაპირიდან?

10.206. ფოტოგრაფიულ სურათს, ზომით 12 სმ$\times$18 სმ, ერთნაირი სიგანის ჩარჩო აქვს. იპოვეთ ჩარჩოს სიგანე, თუ მისი ფართობი უდრის სურათის ფართობს.

10.207. ყვავილნარი, რომელსაც მართკუთხედის ფორმა აქვს 2 მ და 4 მ გვერდებით, ერთნაირი სიგანის ბილიკით არის შემოვლებული. იპოვეთ ამ ბილიკის სიგანე, თუ მისი ფართობი 9-ჯერ მეტია ყვავილნარის ფართობზე.

10.208. ნაკვეთს მართკუთხედის ფორმა აქვს, რომლის სიგრძე ორჯერ მეტია სიგანეზე. ნაკვეთს მთელ სიგრძეზე ჭრის 2 მ სიგანის ბილიკი, ხოლო ნაკვეთის დანარჩენ ნაწილზე ხორბალია დათესილი. იპოვეთ ნაკვეთის სიგრძე, თუ ხორბლიანი ნაწილის ფართობი 4600 მ^2-ით მეტია ბილიკის ფართობზე.

10.209. მართკუთხედის ფორმის თუნუქის ფურცლისაგან თავ-ღია ყუთი დაამზადეს ისე, რომ ამ ფურცლის კუთხეებში ამოჭრილია კვადრატები 5 სმ გვერდით და დარჩენილი ნაპირები გადაკეცილია. რა ზომის იყო თუნუქის ფურცელი, თუ მისი სიგრძე ორჯერ მეტი იყო სიგანეზე და ყუთის მოცულობა აღმოჩნდა 1500 სმ^3-ის ტოლი?

10.210. ხსნარს, რომელიც 40 გ მარილს შეიცავდა, დაუმატეს 200 გ წყალი, რის შემდეგ მისი კონცენტრაცია 10%-ით

შემცირდა. რამდენ წყალს შეიცავდა ხსნარი და როგორი იყო მისი კონცენტრაცია?

10.211. ჭურჭლიდან, რომელიც 20 ლ-ს იტევს და სპირტით არის სავსე, გადმოასხეს სპირტის რაღაც რაოდენობა და ჭურჭელი წყლით შეავსეს; შემდეგ გადმოასხეს ნარევის იმდენივე რაოდენობა და ისევ შეავსეს წყლით. ამის შემდეგ ჭურჭელში აღმოჩნდა 5 ლ სუფთა სპირტი. რამდენი სითხე გადმოუსხამთ თითოეულ ჯერზე?

10.212. ჭურჭელში იყო 10 ლ მარილმჟავა. მარილმჟავას ნაწილი გადაასხეს და ჭურჭელში ჩაასხეს იგივე რაოდენობის წყალი. შემდეგ ისევ გადაასხეს ნარევის იგივე რაოდენობა და შეავსეს იგივე რაოდენობის წყლით. რამდენ ლიტრს ასხამდნენ ყოველ ჩასხმაზე თუ ჭურჭელში დარჩა მარილმჟავას 64%-იანი ხსნარი?

III. ამოცანების ამოხსნა განტოლებათა სისტემების გამოყენებით

10.213. მოსწავლემ 3 რვეულსა და 2 ფანქარში გადაიხადა 65 თეთრი. მეორე მოსწავლემ იმგვარსავე 2 რვეულსა და 4 ფანქარში გადაიხადა 70 თეთრი. რამდენი თეთრი ღირს ერთი რვეული?

10.214. 8 ცხენისა და 15 ძროხის გამოსაკვებად ყოველდღი-ურად იძლეოდნენ 162 კგ თივას. რამდენ თივას აძლევდნენ ყოვე-ლდღიურად თითოეულ ცხენს და თითოეულ ძროხას, თუ ვიცით, რომ 5 ცხენი ღებულობდა 3 კგ-ით მეტ თივას, ვიდრე 7 ძროხა?

10.215. ორმა ხელოსანმა სამუშაოში მიიღო 1170 ლარი. პირველმა იმუშავა 15 დღე. მეორემ კი 14 დღე. რამდენ ლარს ღებულობდა დღეში მეორე ხელოსანი, თუ ცნობილია, რომ პირველმა ხელოსანმა 4 დღეში მიიღო 110 ლარით მეტი, ვიდრე მეორემ 3 დღეში?

10.216. ორი ნატურალური რიცხვის ნამრავლი 2,4-ჯერ მეტია ამ რიცხვების სხვაობაზე, მათი საშუალო არითმეტიკული $2\frac{6}{7}$-ით მეტია $4\frac{1}{7}$-ზე. იპოვეთ ეს რიცხვები.

10.217. ორი დადებითი რიცხვის ჯამი ერთით მეტია პირველი და მეორე რიცხვების გაორკეცებულ სხვაობაზე. იპოვეთ ეს რიცხვები, თუ პირველის კვადრატი სამით მეტია მეორეზე.

10.218. ბოსტნეულის მაღაზიაში კარტოფილი და კომბოსტო მიიტანეს. პირველ დღეს გაყიდეს კარტოფილის ნახევარი და კომბოსტოს $\frac{1}{3}$, სულ 150 კგ. მეორე დღეს გაყიდეს დარჩენილი კარტოფილის $\frac{1}{2}$ და დარჩენილი კომბოსტოს $\frac{1}{2}$, სულ 100 კგ. რამდენი კარტოფილი და რამდენი კომბოსტო მიიტანეს მაღაზიაში?

10.219. სამკერვალომ მიიღო ორი ხარისხის მაუდი, მეტრი 6 ლარიანი და 5 ლარიანი, სულ 1600 ლარის. პალტოების შესაკერად სამკერვალომ დახარჯა პირველი ხარისხის მაუდის მარაგის 25% და მეორე ხარისხის მაუდის მარაგის 20%, სულ 350 ლარის ღირებულებისა. თითოეული ხარისხის რამდენი მეტრი მაუდი მიიღო სამკერვალომ?

10.220. 10 ცხენისა და 14 ძროხის გამოსაკვებად ყოველდღიურად 180 კგ თივას იძლეოდნენ; თივის ნორმის გადიდების შემდეგ ცხენებისათვის 25%-ით, ხოლო ძროხებისათვის $33\frac{1}{3}$%-ით, დაიწყეს დღეში 232 კგ თივის მიცემა, თავდაპირველად რამდენ კილოგრამ თივას აძლევდნენ დღეში ერთ ცხენსა და ერთ ძროხას?

10.221. ორი მემანქანე ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ბეჭდავდა 60-გვერდიან ხელნაწერს. პირველი მემანქანე 6 გვერდის ბეჭდვას ანდომებდა იმდენ დროს, რასაც მეორე მემანქანე 5 გვერდის ბეჭდვას. რამდენ გვერდს ბეჭდავდა საათში თითოეული მემანქანე, თუ პირველმა მთელი სამუშაო შეასრულა 2 საათით უფრო ადრე, ვიდრე მეორემ?

10.222. ტვირთის გადასაზიდად განსაზღვრული ვადით დაქირავებულია ერთი და იმავე სიმძლავრის რამდენიმე საბარგო მანქანა. მანქანებიო რომ 2-ით ნაკლები ყოფილიყო, მაშინ ტვირთის გადასაზიდად დასჭირდებოდათ ვადაზე 2 საათით მეტი დრო; მანქანები რომ 4-ით მეტი ყოფილიყო, მაშინ ტვირთის გადასაზიდად დასჭირდებოდათ ვადაზე 2 საათით ნაკლები დრო. რამდენი მანქანა იყო დაქირავებული და რამდენი დრო დასჭირდათ ტვირთის გადასაზიდად?

10.223. თუ წიგნის გვერდზე სტრიქონების რიცხვს შევამცირებთ 4-ით, ხოლო სტრიქონში ასოების რიცხვს 5-ით, მაშინ მთელ გვერდზე ასოების რიცხვი 360-ით შემცირდება. თუ კი გვერდზე გავადიდებთ სტრიქონების წინანდელ რიცხვს 3-ით, ხოლო ასოების რიცხვს სტრიქონში 2-ით, მაშინ გვერდზე 228

ასოთი მეტი დაეტევა, ვიდრე წინათ. იპოვეთ სტრიქონების რიცხვი გვერდზე და ასოების რიცხვი სტრიქონში.

10.224. რამოდენიმე მთიბავს გარკვეულ დროში უნდა გაეთიბა 15 ჰა მინდორი. თუ მთიბავები იქნებოდნენ 5-ით მეტი, მაშინ ისინი სამუშაოს დაამთავრებდნენ ვადაზე 2 სთ-ით ადრე. რამდენი მთიბავი მუშაობდა მინდვრის გასათიბად, თუ 3 მთიბავი 4 საათში თიბავს 3 ჰა მინდორს?

10.225. ტრაქტორისტთა ბრიგადა გარკვეულ ვადაში ხნავს 300 ჰა მიწას. თუ ბრიგადაში იქნებოდა 3 ტრაქტორით მეტი, მაშინ ბრიგადა ხვნას დაამთავრებდა ვადაზე 6 დღით ადრე. რამდენი ტრაქტორი იყო ბრიგადაში, თუ სამი ტრაქტორი 2 დღეში ხნავს 90 ჰა მიწას?

10.226. ორნიშნა რიცხვის ათეულების რიცხვი სამჯერ მეტია მისი ერთეულების რიცხვზე. თუ ამ რიცხვის ციფრებს გადავაადგილებთ, მაშინ მივიღებთ რიცხვს, რომელიც 36 ერთეულით ნაკლებია საძებნ რიცხვზე. იპოვეთ ორნიშნა რიცხვი.

10.227. ორნიშნა რიცხვის ციფრების ჯამი უდრის 11-ს. თუ ამ რიცხვს 63-ს დავუმატებთ, მაშინ მიიღება იმავე ციფრებით, მხოლოდ შებრუნებულ რიგზე დაწერილი რიცხვი. იპოვეთ ორნიშნა რიცხვი.

10.228. ორნიშნა რიცხვის ციფრების ჯამი უდრის 12-ს. თუ ამ რიცხვის ციფრებს გადავაადგილებთ, მაშინ მივიღებთ რიცხვს, რომელიც 18-ით მეტია საძებნ რიცხვზე. იპოვეთ ორნიშნა რიცხვი.

10.229. ორნიშნა რიცხვის ციფრთა ჯამი უდრის 15-ს. თუ ამ რიცხვს 7-ზე გავამრავლებთ და მიღებული ნამრავლიდან გამოვაკლებთ ორნიშნა რიცხვს, რომელიც ჩაწერილია მოცემული ორნიშნა რიცხვის ციფრებით, მაგრამ შებრუნებული მიმდევრობით, მივიღებთ 387-ს. იპოვეთ ორნიშნა რიცხვი.

10.230. ორნიშნა რიცხვი 4-ჯერ მეტია თავისავე ციფრთა ჯამზე და 3-ჯერ მეტია მათსავე ნამრავლზე. იპოვეთ ორნიშნა რიცხვი.

10.231. ორნიშნა რიცხვის ციფრთა ჯამი უდრის 13-ს. თუ ამ რიცხვს 9-ს გამოვაკლებთ, მაშინ მივიღებთ რიცხვს, რომელიც ჩაწერილი იქნება იმავე ციფრებით, მაგრამ შებრუნებული მიმდევრობით. იპოვეთ ეს რიცხვი.

10.232. მოცემულია ერთი და იმავე ციფრებით გამოსახული ორი ორნიშნა რიცხვი. პირველი რიცხვის განაყოფი მეორეზე უდრის 1,75-ს. პირველი რიცხვის ნამრავლი მისი ათეულების რიცხვზე 3,5-ჯერ მეტია მეორე რიცხვზე. იპოვეთ მეორე რიცხვი.

10.233. ორნიშნა რიცხვის ციფრთა ნამრავლი სამჯერ ნაკლებია თვით ამ რიცხვზე. თუ საძიებელ რიცხვს მივუმატებთ 18-ს, მაშინ მიიღება რიცხვი დაწერილი იმავე ციფრებით, მაგრამ შებრუნებული მიმდევრობით. იპოვეთ ეს რიცხვი.

10.234. იპოვეთ ორნიშნა რიცხვი, რომლის განაყოფი მისი ციფრების ნამრავლზე არის $2\frac{2}{3}$, ხოლო სხვაობა საძიებელ რიცხვსა და იმავე ციფრებით, მაგრამ შებრუნებული მიმდევრობით, დაწერილი რიცხვს შორის არის 18.

10.235. თუ მოცემულ ორნიშნა რიცხვს გავყოფთ მისი ციფრების ჯამზე, მაშინ მიიღება განაყოფი 3 და ნაშთი 7. თუ მოცემულ ორნიშნა რიცხვის ციფრთა კვადრატების ჯამს გამოვაკლებთ მოცემული ორნიშნა რიცხვის ციფრების ნამრავლს, მივიღებთ მოცემულ ორნიშნა რიცხვს. იპოვეთ ეს რიცხვი.

10.236. თუ ორნიშნა რიცხვს გავყოფთ რიცხვზე, რომელიც იმავე ციფრებით არის დაწერილი მხოლოდ შებრუნებული მიმდევრობით, მაშინ მივიღებთ განაყოფს 4-ს და ნაშთს 3-ს; თუ საძიებელ რიცხვს გავყოფთ მის ციფრთა ჯამზე, მაშინ მივიღებთ განაყოფს 8-ს და ნაშთს 7-ს. იპოვეთ ეს რიცხვი.

10.237. მოკრივეთა და მოჭიდავეთა სექციის სპორტსმენთა საშუალო წონა ერთიდაიგივეა და 60 კგ-ის ტოლია. თუ კრივის სექციიდან ჭიდაობის სექციაში გადავა სპორტსმენი, რომლის წონა 44 კგ-ია, მაშინ სექციათა საშუალო წონებს შორის სხვაობა გახდება 1,8 კგ. თუ ჭიდაობის სექციიდან წავა სპორტსმენი, რომლის წონა 88 კგ-ია (კრივის სექცია უცვლელი დარჩება), მაშინ აღნიშნულ საშუალო წონებს შორის სხვაობა 2 კგ გახდება. რამდენი სპორტსმენია თითოეულ სექციაში?

10.238. პირველი სემესტრის შემდეგ ორ კლასს აღმოაჩნდა ერთიდაიგივე საშუალო ქულა– 50. თუ ერთი კლასიდან მეორეში გადავა 18 ქულის მქონე ბავშვი, მაშინ ამ კლასების საშუალო ქულებს შორის სხვაობა გახდება 3. თუ მეორე კლასიდან პირველში გადავა 95 ქულის მქონე ბავშვი, მაშინ აღნიშნული სხვაობა გახდება 4. რამდენი მოსწავლეა თითოეულ კლასში?

10.239. სხვადასხვა სიმძლავრის ორმა ტრაქტორმა ერთად მუშაობით 30 წუთის განმავლობაში მოხნა მთელი ყანის $\frac{1}{6}$ ნაწილი. მარტო პირველ ტრაქტორს რომ 24 წუთი ემუშავა, შემდეგ კი მარტო მეორე ტრაქტორს 40 წუთი, მაშინ ისინი მოხნავდნენ მთელი ყანის 20%-ს. რა ხნის განმავლობაში მოხნავს მთელ ყანას თითოეული ტრაქტორი ცალ-ცალკე?

10.240. ორ ბრიგადას მოსავლის აღება უნდა დაემთავრებია 12 დღეში. 8 დღის ერთად მუშაობის შემდეგ პირველმა ბრიგადამ მიიღო სხვა დავალება, ამიტომ მეორემ სამუშაოს დარჩენილი ნაწილი 7 დღეში დაამთავრა. რა ხნის განმავლობაში შეეძლო თითოეულ ბრიგადას ცალ-ცალკე მოსავლის აღება?

10.241. ერთად მუშაობით ორი ხელოსანი სამუშაოს დაამთავრებს 12 დღეში. თუ კი პირველი ხელოსანი 2 დღეს იმუშავებს, მეორე კი 3 დღეს, მაშინ ისინი შეასრულებენ მთელი სამუშაოს მხოლოდ 20%-ს. რამდენ დღეში დაამთავრებს ამ სამუშაოს თითოეული ხელოსანი ცალ-ცალკე?

10.242. ორი მილის ერთად მუშაობით ავზი 1 სთ 20 წუთში ივსება; თუ პირველ მილს გავხსნით 10 წუთით, მეორეს კი 12 წუთით, მაშინ გაივსება ავზის მხოლოდ $\frac{2}{15}$ ნაწილი. რა ხნის განმავლობაში აავსებს ავზს თითოეული მილი ცალ-ცალკე?

10.243. ორი მუშა ერთად მუშაობით სამუშაოს ასრულებს 6 დღეში. თუ პირველი იმუშავებდა ორჯერ ნელა, ხოლო მეორე 3-ჯერ ჩქარა, მაშინ სამუშაოს შესრულებას დასჭირდებოდა 4 დღე. რამდენ დღეში შეასრულებს სამუშაოს თითოეული მუშა ცალ-ცალკე?

10.244. თუ პირველი მუშა 1 სთ-ს იმუშავებს, ხოლო მეორე 3 სთ-ს, მაშინ მთელი სამუშაოს $\frac{11}{24}$ ნაწილი შესრულდება. თუ ამის შემდეგ ისინი ერთად კიდევ 2 სთ-ს იმუშავებენ, აღმოჩნდება, რომ მათ დარჩათ შესასრულებელი მთელი სამუშაოს $\frac{1}{8}$ ნაწილი. რამდენ საათში შეძლებს მთელი სამუშაოს შესრულებას მარტო პირველი მუშა?

10.245. ორი ტრაქტორი ხნავს მინდორს. მას შემდეგ, რაც პირველმა იმუშავა 2 საათი, ხოლო მეორემ 5 საათი, მოხნული აღმოჩნდა მინდვრის ნახევარი. ამის შემდეგ 1,5 საათის განმავლობაში ისინი მუშაობდნენ ერთად და მოხნეს კიდევ მინდვრის მეოთხედი. რა დრო დასჭირდება მარტო პირველ ტრაქორს სამუშაოს დასამთავრებლად?

10.246. ორ მუშას ერთად მუშაობით შეუძლია განსაზღვრული დავალება 12 დღეში დაამთავროს. ჯერ თუ მარტო ერთი მათგანი იმუშავებს და, როდესაც იგი მთელი სამუშაოს ნახევარს შეასრულებს, მას მეორე მუშა შეცვლის, მაშინ მთელი დავალება 25 დღეში დამთავრდება. რამდენ დღეში შეუძლია თითოეულ მუშას ცალ-ცალკე მთელი დავალების შესრულება?

10.247. ორი სალეწი მანქანა შეგროვილ თავთავს 4 დღეში ლეწავს. თუ პირველი გალეწავს მთელი თავთავის $\frac{2}{3}$ ნაწილს, ხოლო შემდეგ მეორე დარჩენილ ნაწილს, მაშინ მთელი სამუშაო 10 დღეში დამთავრდება. თავთავის რა ნაწილს გალეწავს მარტო მეორე მანქანა 5 დღეში, თუ ის მუშაობს უფრო ნელა, ვიდრე პირველი?

10.248. ორი მილით აუზი ივსება 3 საათში. თუ ჯერ მარტო პირველი მილი აავსებს აუზის 25%, ხოლო შემდეგ მარტო მეორე დარჩენილ ნაწილს, მაშინ აუზი 10 საათში აივსება. რამდენ საათში აავსებს მარტო პირველი მილი აუზის $\frac{1}{4}$ ნაწილს, თუ ის აუზს ავსებს უფრო სწრაფად, ვიდრე მეორე?

10.249. გემმა გაიარა 100 კმ მდინარის დინების მიმართულებით და 64 კმ დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით, რასაც სულ 9 საათი მოანდომა. მეორედ იმავე დროის განმავლობაში გაიარა 80 კმ მდინარის დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით და 80 კმ მდინარის დინების მიმართულებით. იპოვეთ გემის სიჩქარე მდგარ წყალში და მდინარის დინების სიჩქარე.

10.250. მოტორიან ნავს მდინარის დინების მიმართულებით 12 კმ-ის გასავლელად და უკან დაბრუნებისათვის დასჭირდა 2 სთ და 30 წთ. მეორედ იმავე მოტორიანმა ნავმა 1 სთ 20 წუთში გაიარა 4 კმ მდინარის დინების მიმართულებით და 8 კმ საწინააღმდეგო მიმართულებით. იპოვეთ მოტორიანი ნავის სიჩქარე მდგარ წყალში და მდინარის დინების სიჩქარე.

10.251. ორი ტურისტი გამოდის ერთმანეთის შესახვედრად ორი ქალაქიდან, რომელთა შორის მანძილი 48 კმ-ია. ისინი შეხვდებიან ერთმანეთს შუა გზაზე, თუ მეორე ტურისტი გამოვა 2 საათით ადრე პირველზე. თუკი ისინი ერთდროულად გამოვლენ ქალაქებიდან, მაშინ 4 საათის შემდეგ მათ შორის მანძილი დარჩება 8 კმ. იპოვეთ თითოეული ტურისტის სიჩქარე.

10.252. ველოსიპედისტი მიდიოდა გარკვეული სიჩქარით და A პუნქტიდან B პუნქტში დანიშნულ დროზე ჩავიდა; მას რომ ეს სიჩქარე გაედიდებინა 3 კმ-ით საათში, მაშინ ადგილზე ჩავიდოდა ვადაზე ერთი საათით ადრე, ხოლო მას რომ საათში გაევლო 2 კმ-ით ნაკლები იმაზე, რასაც ის სინამდვილეში გადიოდა, მაშინ დააგვიანდებოდა 1 საათი. იპოვეთ მანძილი A და B პუნქტებს შორის, ველოსიპედისტის სიჩქარე და რამდენი საათი იყო ის გზაში.

10.253. ორი ტურისტი გამოვიდა ერთმანეთის შესახვედრად ქალაქებიდან, რომელთა შორის მანძილი 30 კმ-ს უდრის. თუ პირველი გამოვა ორი საათით ადრე მეორეზე, მაშინ ისინი შეხვდებიან ერთმანეთს 2,5 საათის შემდეგ მეორე ტურისტის გამოსვლის მომენტიდან; თუ მეორე გამოვა 2 საათით ადრე პირველზე, მაშინ შეხვედრა მოხდება პირველი ტურისტის გამოსვლიდან 3 საათის შემდეგ. რამდენ კილომეტრს გადის საათში თითოეული ტურისტი?

10.254. ორი ქალაქიდან, რომელთა შორის მანძილი 650 კმ-ს უდრის, ერთმანეთის შესახვედრად ერთდროულად გაგზავნეს ორი მატარებელი. გამგზავრებიდან 5 საათის შემდეგ მატარებლები შეხვდნენ ერთმანეთს. თუ პირველ მატარებელს გაგზავნიან მეორეზე 2 სთ 10 წუთით ადრე, მაშინ შეხვედრა მოხდება მეორე მატარებლის გამოსვლიდან 4 საათის შემდეგ. რამდენ კილომეტრს გადის საათში თითოეული მატარებელი?

10.255. ორ ქალაქს შორის 960 კმ-ის ტოლ მანძილს სამგზავრო მატარებელი 4 საათით ჩქარა გადის, ვიდრე საბარგო. თუ სამგზავრო მატარებლის სიჩქარეს საათში 8 კმ-ით გავადიდებთ, ხოლო საბარგო მატარებლის სიჩქარეს 2 კმ-ით, მაშინ სამგზავრო მატარებელი მთელ მანძილს 5 საათით ჩქარა გაივლის საბარგოზე. იპოვეთ თითოეული მატარებლის სიჩქარე.

10.256. ველოსიპედისტი მოძრაობს AB გზაზე, რომელიც შედგება გზის ჰორიზონტალური ნაწილის, აღმართისა და დაღმართისაგან. სწორ ადგილზე ველოსიპედისტის სიჩქარე არის 12 კმ/სთ, აღმართზე 8 კმ/სთ, ხოლო დაღმართზე 15 კმ/სთ. A-დან B-ში მისვლას ველოსიპედისტი ანდომებს 5 საათს, ხოლო B-დან A-ში–4 სთ 39 წუთს. იპოვეთ აღმართისა და დაღმართის სიგრძე A-დან B-სკენ მიმართულებით, თუ ცნობილია, რომ გზის სწორი ნაწილის სიგრძეა 28 კმ.

10.257. A და B პუნქტებს შორის გზა შედგება აღმართისა და დაღმართისაგან. ველოსიპედისტი, მოძრაობს რა დაღმართზე 6 კმ-ით მეტი სიჩქარით საათში, ვიდრე აღმართზე, A-დან B-მდე გზის გავლაზე 2 სთ 40 წთ-ს ხარჯავს, ხოლო B-დან A-მდე გზის უკან გამოვლაზე 20 წთ-ით ნაკლებს. იპოვეთ ველოსიპედისტის სიჩქარე აღმართსა და დაღმართზე და აღმართის სიგრძე A-დან B-სკენ მიმართულებით, თუ მთელი გზის სიგრძე 36 კმ-ია.

10.258. წრეწირზე, რომლის სიგრძე უდრის 100 მ-ს, მოძრაობს ორი სხეული. ისინი ერთმანეთს ხვდებიან ყოველი 20 წამის შემდეგ, როდესაც ერთი და იმავე მიმართულებით მოძრაობენ, ხოლო ხვდებიან ყოველი 4 წამის შემდეგ, როდესაც

მოპირდაპირე მიმართულებით მოძრაობენ. იპოვეთ თითოეული სხეულის სიჩქარე.

10.259. ორი სხეული თანაბრად მოძრაობს ერთსადაიმავე წრეწირზე ერთიდაიგივე მიმართულებით. პირველი სხეული ერთ ბრუნს აკეთებს 2 წმ-ით ჩქარა მეორეზე და ეწევა მეორე სხეულს ყოველ 12 წმ-ში. რა დროში აკეთებს ერთ ბრუნს თითოეული სხეული?

IV. *სხვადასხვა ამოცანები*

10.260. პირველი რიცხვი ისე შეეფარდება მეორეს, როგორც 2:3, ხოლო მეორე მესამეს, როგორც 4:5. იპოვეთ პირველი რიცხვის შეფარდება მესამესთან.

10.261. პროპორციის პირველი სამი წევრის ჯამი უდრის 58-ს. მესამე წევრი შეადგენს პირველი წევრის $\frac{2}{3}$, ხოლო მეორე პირველის $\frac{3}{4}$ ნაწილს. იპოვეთ პროპორციის მეოთხე წევრი.

10.262. კლასში 40 მოსწავლეა. აქედან 25 სწავლობს ინგლისურ ენას, 22–გერმანულს, ხოლო 10 სწავლობს ორივე ამ ენას. რამდენი მოსწავლე არ სწავლობს არც ინგლისურს და არც გერმანულს?

10.263. კლასში 35 მოსწავლეა. აქედან 20 დადის მათემატიკის წრეში, 11–ფიზიკის წრეში, ხოლო 10 მოსწავლე არ დადის ამ წრეებიდან არც ერთში. რამდენი მოსწავლე დადის ერთდროულად ფიზიკისა და მათემატიკის წრეში?

10.264. ოთახის იატაკზე, რომლის ფართობია 12 მ^2, გაშლილია სამი ხალიჩა. პირველი ხალიჩის ფართობია 5 მ^2, მეორის– 4მ^2, ხოლო მესამის– 3 მ^2. ყოველი ორი ხალიჩა ერთმანეთზე გადადებულია 1,5 მ^2 ფართობზე, ამასთან 0,5 მ^2 ფართობზე ერთმანეთზე დევს სამივე ხალიჩა. იპოვეთ: 1) იატაკის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც დაფარული არ არის; 2) მხოლოდ პირველი ხალიჩით დაფარული იატაკის ნაწილის ფართობი.

10.265. 100 სტუდენტიდან ინგლისური ენა იცის 28 სტუდენტმა, გერმანული ენა– 30 სტუდენტმა, ფრანგული ენა– 42 სტუდენტმა, ინგლისური და გერმანული– 8 სტუდენტმა, ინგლისური და ფრანგული– 10 სტუდენტმა, სამივე ეს ენა იცის 3 სტუდენტმა, არცერთი ამ ენიდან არ იცის 20 სტუდენტმა.

დაადგინეთ რამდენმა სტუდენტმა იცის: 1) გერმანული და ფრანგული? 2) ინგლისური ან გერმანული? 3) ინგლისური ან ფრანგული? 4) გერმანული ან ფრანგული?

10.266. შაქრის ფასის 15%-ით გაზრდის შემდეგ ყოველდღიურად შემოსული თანხა 8%-ით შემცირდა. რამდენ კილოგრამ შაქარს ყიდის დღეში გამყიდველი ახლა, თუ ადრე იგი დღეში ყიდიდა 50 კილოგრამს?

10.267. სტადიონზე შესასვლელი ბილეთის გაიაფების შემდეგ მაყურებელთა რიცხვმა 50%-ით მოიმატა და ბილეთების გაყიდვით შემოსული თანხა 20%-ით გაიზარდა. რამდენი ლარი გახდა ბილეთის ფასი, თუ გაიაფებამდე ის ღირდა 10 ლარი?

10.268. საქონლის ფასი თავდაპირველად შეამცირეს 20%-ით, ხოლო შემდეგ ეს ახალი ფასი კვლავ 15%-ით შეამცირეს და ბოლოს, ახალი გადაანგარიშების შემდეგ, საქონლის ფასი კიდევ 10%-ით შემცირდა. სულ რამდენი პროცენტით შეამცირეს საქონლის პირვანდელი ფასი?

10.269. მეწარმემ თავისი პროდუქცია ჯერ გააძვირა და შემდეგ გააიაფა. ამასთან გაძვირება და გაიაფება მოხდა პროცენტების ერთიდაიგივე რიცხვით. რამდენი პროცენტით გაძვირდა და რამდენით გაიაფდა პროდუქცია, თუ ის თავდაპირველად ღირდა 500 ლარი, ახლა კი ღირს 480 ლარი?

10.270. კარაქი ჯერ გაიაფდა 20%-ით, ხოლო შემდეგ გაძვირდა იმდენი პროცენტით რამდენი ლარიც ღირდა 1 კილოგრამი კარაქი გაიაფებამდე. რა ღირდა 1 კილოგრამი კარაქი გაიაფებამდე, თუ ის ახლა ღირს 4 ლარი და 20 თეთრი?

10.271. სამუშაო დღე შემცირდა 8 საათიდან 7 საათამდე. რამდენი პროცენტით უნდა გადიდდეს შრომის ნაყოფიერება, რომ იმავე პირობებში ხელფასი გადიდდეს 5%-ით?

10.272. ფულის ორი თანხა, რომელთა ჯამია 5000 ლარი რაღაც ვადით შეტანილი იყო ბანკში წლიურ 3%-იან ანაბარზე. თითოეულმა ამ თანხამ მოიმატა 60 ლარით. პირველი თანხა ბანკში იყო 4 თვით ნაკლები დროის განმავლობაში, ვიდრე მეორე. რას უდრის თითოეული თანხა და რამდენი ხნით იყო თითოეული შეტანილი ბანკში?

10.273. ფულის ორი თანხა რომელთა ჯამია 8000 ლარი შეტანილ იქნა ბანკში წლიურ 3%-იან ანაბარზე. პირველი თანხა ბანკში იყო 10 თვით ნაკლები დროის განმავლობაში ვიდრე მეორე. ამ თანხებიდან პირველმა მოიმატა 80 ლარი, ხოლო მეორემ 60 ლარი. რას უდრის თითოეული თანხა და რამდენი თვე იყო თითოეული მათგანი ბანკში?

10.274. კომპიუტერის ფასი ყოველ 5 წელიწადში 90%-ით მცირდება. რა დროა საჭირო, რომ 10000 ლარის ღირებულების კომპიუტერის ფასი 100 ლარი გახდეს?

10.275. ერთნიშნა რიცხვი გაადიდეს ათი ერთეულით. თუ მიღებულ რიცხვს გავადიდებთ იმდენივე პროცენტით, რამდენითაც პირველ შემთხვევაში, მაშინ მიიღება 72. იპოვეთ საწყისი რიცხვი.

10.276. ერთ წისქვილს შეუძლია 19 ცენტნერი ხორბალი დაფქვას 3 საათში, მეორეს 32 ცენტნერი–5 საათში, ხოლო მესამეს 10 ცენტნერი 2 საათში. როგორ უნდა განაწილდეს 1330 ცენტნერი ხორბალი წისქვილებს შორის იმგვარად, რომ მათ ერთდროულად დაიწყონ მუშაობა და ერთდროულადვე დაამთავრონ დაფქვა?

10.277. იმ სამუშაოსათვის, რომელსაც პირველი მემანქანე 4 სთ-ში ბეჭდავს, მეორეს სჭირდება 6 სთ, ხოლო მესამეს–4 სთ 30 წთ. როგორ გავანაწილოთ მემანქანეებს შორის 460-გვერდიანი ხელნაწერი, რათა სამივემ ერთიდაიგივე დროში დაასრულოს მისი გადაბეჭდვა?

10.278. ოსტატი 18 დეტალს ამზადებს იმავე დროში, რომელშიც მოსწავლე–10 დეტალს. დავალების შესასრულებლად ოსტატს 32 საათი დასჭირდა, რა დროში შეასრულებს ამავე დავალებას მოსწავლე?

10.279. რამდენიმე მუშა ასრულებს სამუშაოს 20 დღეში. თუ მათი რაოდენობა 4-ით მეტი იქნებოდა და თითოეული იმუშავებდა დღეში 1 საათით მეტს, მაშინ იგივე სამუშაო შესრულდებოდა 16 დღეში. თუ მუშების რაოდენობა კიდევ 12 კაცით გაიზრდება და თითოეული მათგანი დღეში იმუშავებს კიდევ 2 საათით მეტს, მაშინ მოცემული სამუშაო შესრულდება 10 დღეში. რამდენი მუშა იყო და რამდენ საათს მუშაობდნენ ისინი დღეში.

10.280. სხვადასხვა სიმძლავრის ორი ტუმბოს ერთდროული მუშაობით აუზი ივსება 4 სთ-ში. აუზის ნახევრის გასავსებად პირველ ტუმბოს სჭირდება 4 სთ-ით მეტი დრო, ვიდრე მეორეს აუზის $\frac{3}{4}$ ნაწილის გასავსებად. რა დროში გაავსებს აუზს თითოეული ტუმბო ცალ-ცალკე?

10.281. გემის გადმოსატვირთად გამოყოფილია ორი ბრიგადა. იმ დროთა ჯამი, რომელიც დასჭირდებოდა გემის დასაცლელად თითოეულ ბრიგადას ცალ-ცალკე 12 სთ-ია. იპოვეთ რა დრო დასჭირდებოდა თითოეულ ბრიგადას გემის დასაცლელად, თუ

მათი სხვაობა არის იმ დროის 45%, რომელიც სჭირდება ორივე ბრიგადის ერთდროული მუშაობით გემის დაცლას.

10.282. ერთ დაზგაზე დეტალების პარტიის დამუშავებას 3 დღით უფრო მეტს უნდებიან, ვიდრე მეორეზე. რამდენ დღეს გაგრძელდებოდა დეტალების ამ პარტიის დამუშავება პირველ დაზგაზე ცალკე, თუ ცნობილია, რომ დაზგების ერთობლივი მუშაობისას 20 დღეში სამჯერ მეტი რაოდენობის დეტალი იყო დამუშავებული?

10.283. სამმა ერთნაირმა კომბაინმა ერთად აიღო პირველი მინდორი, ხოლო შემდეგ ორმა მათგანმა მეორე მინდორი (სხვა ფართობის). სულ ამ სამუშაოს დასჭირდა 12 სთ. თუ სამი კომბაინი შეასრულებდა მთელი სამუშაოს ნახევარს, ხოლო შემდეგ დარჩენილ ნაწილს აიღებდა ერთ-ერთი მათგანი, მაშინ სამუშაოს შესრულებას დასჭირდებოდა 20 სთ. რა დროში შეუძლია ორ კომბაინს პირველი მინდვრის აღება?

10.284. მიწისმთხრელთა ორმა ბრიგადამ ერთდროული მუშაობით ამოთხარა პირველი თხრილი 2 დღეში. ამის შემდეგ მათ დაიწყეს მეორე თხრილის ამოთხრა, რომლის სიგრძე 5-ჯერ მეტია პირველი თხრილის სიგრძეზე. ჯერ მუშაობდა მხოლოდ პირველი ბრიგადა, ხოლო შემდეგ იგი შეცვალა მეორე ბრიგადამ და დაამთავრა სამუშაო. ამასთან მეორე ბრიგადამ შეასრულა 1,5-ჯერ ნაკლები სამუშაო, ვიდრე პირველმა. მეორე თხრილის ამოთხრაზე დაიხარჯა 21 დღე. რამდენ დღეში შეძლებდა მეორე ბრიგადა პირველი თხრილის ამოთხრას, თუ იგი უფრო ნელა მუშაობს, ვიდრე პირველი?

10.285. რა დროს გვიჩვენებს საათი (წუთის სიზუსტით), თუ ეს დრო მოთავსებულია 12^{00} სთ-სა და 12^{30} სთ-ს შორის და საათის ისრები ადგენენ: 1) 66°-იან კუთხეს? 2) 90°-იან კუთხეს? 3) 45°-იან კუთხეს? 4) α კუთხეს ($\alpha<165^\circ$)?

10.286. რა დროს გვიჩვენებს საათი (წუთის სიზუსტით), თუ ეს დრო მოთავსებულია 2^{00} სთ-სა და 2^{40} სთ-ს შორის და საათის ისრები ადგენენ: 1) 132°-იან კუთხეს? 2) 90°-იან კუთხეს? 3) 33°-იან კუთხეს? 4) α კუთხეს?

10.287. ტურისტმა მთელი გზის $\dfrac{4}{5}$ გაიარა ველოსიპედით, ხოლო დანარჩენი გზა ფეხით. ველოსიპედით მოძრაობისას მან დახარჯა 2-ჯერ ნაკლები დრო ვიდრე ფეხით სიარულისას. რამდენჯერ სწრაფად მოძრაობს ტურისტი ველოსიპედით ვიდრე ფეხით?

10.288. A და B ქალაქებიდან ერთმანეთის შესახვედრად ერთდროულად ველოსიპედისტი და მოტოციკლისტი გამოვიდა. A ქალაქიდან გამოსული ველოსიპედისტი ქალაქებს შორის მანძილის $\frac{1}{3}$-ის გავლის შემდეგ შეჩერდა და B ქალაქისაკენ გზა მხოლოდ მას შემდეგ გააგრძელა, როდესაც მასთან B ქალაქიდან მომავალი მოტოციკლისტი მოვიდა. მოტოციკლისტმა შეუჩერებლად გააგრძელა გზა A ქალაქისაკენ და შემდეგ იმავე გზით დაბრუნდა B ქალაქში ისე, რომ გზაში არ შეჩერებულა. რომელი უფრო ადრე ჩავა B ქალაქში ველოსიპედისტი თუ მოტოციკლისტი?

10.289. სოფლიდან ქალაქისაკენ ერთდროულად გაემგზავრა ველოსიპედისტი და ავტომობილი. მთელი გზის მეხუთედის გავლის შემდეგ ველოსიპედისტი შეჩერდა და გააგრძელა გზა მხოლოდ მაშინ, როდესაც ავტომობილს გასავლელი დარჩა მთელი გზის $\frac{3}{5}$. ავტომობილი ჩავიდა რა ქალაქში, მაშინვე გამობრუნდა უკან. რომელი უფრო ადრე ჩავა, ავტომობილი სოფელში თუ ველოსიპედისტი ქალაქში?

10.290. გზა შედგება სამი მონაკვეთისაგან. პირველი მონაკვეთის სიგრძე მთელი გზის ნახევრის ტოლია, ხოლო მეორე მონაკვეთის – მთელი გზის მესამედის. ავტომობილის სიჩქარე გზის პირველ მონაკვეთზე ორჯერ ნაკლებია ვიდრე მეორე მონაკვეთზე და სამჯერ ნაკლებია ვიდრე მესამეზე. რამდენჯერ მეტია მთელ გზაზე ავტომობილის საშუალო სიჩქარე გზის პირველ მონაკვეთზე მის სიჩქარეზე?

10.291. მგზავრი სოფლიდან ქალაქში ჩავიდა და შემდეგ უკან დაბრუნდა. სოფლიდან ქალაქისაკენ მოძრაობის დროს გზის პირველი ნახევარი მან გაიარა ავტომობილით, ხოლო მეორე ნახევარი ფეხით. უკან დაბრუნებისას დახარჯული მთელი დროის ნახევარი მან იმოძრავა ავტომობილით, მეორე ნახევარი კი ფეხით. როდის უფრო ნაკლები დრო დახარჯა მგზავრმა: სოფლიდან ქალაქში ჩასვლაზე თუ უკან დაბრუნებაზე?

10.292. ორი მგზავრი სოფლიდან ქალაქისკენ გაემგზავრა. პირველმა მგზავრმა გზის მესამედი ავტობუსით გაიარა, ხოლო დანარჩენი გზა ფეხით. მეორე მგზავრმა იმავე გზის გავლისას დახარჯული დროის მესამედი ავტობუსით იარა, დანარჩენი დროის განმავლობაში კი ფეხით მიდიოდა. რომელი მგზავრის საშუალო სიჩქარეა მეტი?

10.293. M და N პუნქტებიდან, რომელთა შორის მანძილი 33 კმ-ია, ერთმანეთის შესახვედრად ერთდროულად ორი ტურისტი

გამოვიდა. 3 სთ და 12 წთ-ის შემდეგ მათ შორის მანძილი 1 კმ-მდე შემცირდა, ხოლო კიდევ 2 სთ 18 წთ-ის შემდეგ პირველს N-მდე გასავლელი დარჩა სამჯერ მეტი მანძილი, ვიდრე მეორეს M-მდე. იპოვეთ ტურისტების სიჩქარეები.

10.294. ორი ველოსიპედისტი ერთდროულად გამოვიდა ერთმანეთის შესახვედრად ორი პუნქტიდან, რომელთა შორის მანძილი 270 კმ-ია. მეორე ველოსიპედისტი საათში გადიოდა $1\frac{1}{2}$ კილომეტრით ნაკლებს, ვიდრე პირველი და შეხვდა მას იმდენი საათის შემდეგ. რამდენ კილომეტრსაც გადის პირველი ველოსიპედისტი ერთ საათში. იპოვეთ პირველი ველოსიპედისტის სიჩქარე.

10.295. ველოსიპედისტმა A პუნქტიდან B პუნქტამდე გაიარა 60 კმ. უკან დაბრუნებისას მან პირველი საათი იარა წინანდელი სიჩქარით, შემდეგ კი შეისვენა 20 წუთი. შესვენების შემდეგ სიჩქარე გაადიდა 4 კმ/სთ-ით და ამიტომ B-დან A-ში მისასვლელად დახარჯა იმდენივე დრო, რამდენიც მას დასჭირდა A-დან B-ში მისასვლელად. იპოვეთ რა სიჩქარით მიდიოდა ველოსიპედისტი A-დან B-მდე.

10.296. A და B პუნქტებს შორის მანძილი 120 კმ-ია. მოტოციკლისტი გაემგზავრა A-დან B-ში. იგი უკან გამოემგზავრა იმავე სიჩქარით, მაგრამ გამოსვლის მომენტიდან ერთი საათის შემდეგ იძულებული გახდა შეჩერებულიყო 10 წუთით, შემდეგ კვლავ განაგრძო გზა A პუნქტამდე, მაგრამ გაადიდა სიჩქარე 6 კმ/სთ-ით. როგორი იყო მოტოციკლისტის სიჩქარე თავდაპირველად, თუ ცნობილია, რომ უკან დასაბრუნებლად მან იმდენივე დრო დახარჯა, რამდენიც A-დან B-ში ჩასვლაზე?

10.297. ტურისტმა ნავით გაცურა მდინარეზე 90 კმ და შემდეგ ფეხით გაიარა 10 კმ. ამასთან, ფეხით სიარულს 4 საათით ნაკლები დრო მოანდომა, ვიდრე ნავით ცურვას. ტურისტს ფეხით იმდენ ხანს რო ევლო, რამდენ ხანსაც იცურა ნავით, ხოლო ნავით იმდენ ხანს ეცურა, რამდენ ხანსაც ფეხით იარა, მაშინ ეს მანძილები ტოლი იქნებოდა. რამდენი საათი იცურა ტურისტმა ნავით?

10.298. ორი მოტოციკლისტი ერთდროულად გაეშურა ერთმანეთის შესახვედრად A და B პუნქტებიდან, რომელთა შორის მანძილი უდრის 600 კმ-ს. იმ დროში, რასაც პირველი ანდომებს 250 კმ-ის გავლას, მეორე გადის მხოლოდ 200 კმ-ს. იპოვეთ პირველი მოტოციკლისტის სიჩქარე თუ იგი B პუნქტში ჩადის 3 საათით უფრო ადრე, ვიდრე მეორე A პუნქტში.

10.299. როდესაც აქილევსი კუს გამოეკიდა, მათ შორის მანძილი 50 მეტრის ტოლი იყო. მას შემდეგ, რაც მათ შორის მანძილი 10-ჯერ შემცირდა, კუ მიხვდა, რომ ის მდევარს თავს ვერ დააღწევდა და გაჩერდა. რა მანძილი გაიარა კუმ დევნის დაწყებიდან, თუ მისი სიჩქარე 16-ჯერ ნაკლებია აქილევსის სიჩქარეზე და ისინი ერთი მიმართულებით მოძრაობენ?

10.300. A და B ქალაქებიდან, რომელთა შორის მანძილი 150 კმ-ია, ერთიდაიგივე მიმართულებით (A-დან B-კენ) გავიდა ორი ტურისტი. პირველი ტურისტი A-დან გაემგზავრა ავტომანქანით, ხოლო მეორე B-დან ფეხით. მას შემდეგ, რაც მათ შორის მანძილი შემცირდა 25-ჯერ, ტურისტები გაჩერდნენ. რას უდრის მანძილი პირველი ტურისტის გაჩერების ადგილიდან B ქალაქამდე, თუ მეორე ტურისტის სიჩქარე 17-ჯერ ნაკლებია პირველის სიჩქარეზე?

10.301. A და B პუნქტებს შორის მანძილია 300 კმ. ავტომობილმა გაიარა მთელი ეს მანძილი და დაბრუნდა უკან. B-დან გამოსვლის 1 საათისა და 12 წუთის შემდეგ მან სიჩქარე გაადიდა 16 კმ/სთ-ით, რის შედეგადაც უკან დაბრუნებაზე დახარჯა 48 წუთით ნაკლები, ვიდრე A-დან B-ში ჩასვლაზე. იპოვეთ ავტომობილის საწყისი სიჩქარე.

10.302. ორი მატარებელი გამოდის A და B პუნქტებიდან ერთმანეთის შესახვედრად. ისინი ერთმანეთს შეხვდებიან შუა გზაზე იმ შემთხვევაში, თუ A-დან მატარებელი გამოვა ორი საათით ადრე, ვიდრე B-დან. თუკი ისინი A და B პუნქტებიდან ერთდროულად გამოვლენ, მაშინ ორი საათის შემდეგ მატარებლებს შორის დარჩენილი მანძილი A და B პუნქტებს შორის მანძილის $\frac{1}{4}$-ის ტოლი იქნება. რამდენ დროს მოანდომებს თითოეული მატარებელი მთელი გზის გავლას?

10.303. A-დან B პუნქტისაკენ, რომელთა შორის მანძილი 120 კმ-ია, გავიდა ქვეითი. ერთდროულად B-დან A-სკენ გამოვიდა მოტოციკლისტი, რომელიც 5 საათის შემდეგ შეხვდა ქვეითს. ჩაისვა რა ქვეითი მოტოციკლში, მოტოციკლისტი დაბრუნდა უკან და ჩაიყვანა ქვეითი B-ში, რის შემდეგ შეუჩერებლივ წავიდა A-ში. ამის გამო მოტოციკლისტმა დახარჯა 2,5-ჯერ მეტი დრო, ვიდრე მას დასჭირდებოდა B-დან A-ში ჩასასვლელად. იპოვეთ თითოეულის სიჩქარე.

10.304. მანძილი A და B პუნქტებს შორის 32 კმ-ია. A პუნქტიდან B პუნქტისაკენ ორი ველოსიპედისტი გავიდა. ცნობილია, რომ პირველი ველოსიპედისტი, რომლის სიჩქარე არის 8 კმ/სთ, A პუნქტიდან ნახევარი საათით ადრე გამოდის.

იმ მომენტში, როცა მას მეორე ველოსიპედისტი დაეწევა, უკან ბრუნდება და A პუნქტამდე მისვლას ნახევარი საათით უფრო ნაკლებ დროს ანდომებს, ვიდრე მეორე ველოსიპედისტი B პუნქტამდე მისვლას. იპოვეთ მეორე ველოსიპედისტის სიჩქარე.

10.305. ქალაქიდან ერთდროულად ერთი და იგივე მიმართულებით გაემგზავრა ველოსიპედისტი და მორბენალი. ველოსიპედისტი მოძრაობს 18 კმ/სთ სიჩქარით, ხოლო მორბენალი 12 კმ/სთ სიჩქარით. მათი გამგზავრებიდან ნახევარი საათის შემდეგ იმავე ქალაქიდან იმავე მიმართულებით გაემგზავრა ცხენოსანი. იპოვეთ ცხენოსნის სიჩქარე, თუ ცნობილია, რო იგი ველოსიპედისტს დაეწია 1 საათით უფრო გვიან, ვიდრე მორბენალს.

10.306. A პუნქტიდან B პუნქტისაკენ გაემგზავრა სატვირთო ავტომობილი. 1 სთ-ის შემდეგ იმავე A პუნქტიდან B პუნქტისაკენ გაემგზავრა მსუბუქი ავტომობილი, რომელიც B პუნქტში სატვირთო ავტომობილთან ერთად მივიდა. თუ სატვირთო და მსუბუქი ავტომობილები ერთდროულად გამოვიდოდნენ A და B პუნქტებიდან ერთმანეთის შესახვედრად, მაშინ ისინი ერთმანეთს შეხვდებოდნენ გამოსვლიდან 1 სთ-ისა და 12 წთ-ის შემდეგ. რა დრო მოანდომა სატვირთო ავტომობილმა A და B პუნქტებს შორის მანძილის გავლას.

10.307. წრეწირზე, რომლის სიგრძეა 400 მ ერთი და იმავე წერტილიდან ერთდროულად ერთმანეთის საწინააღმდეგო მიმართულებით მოძრაობას იწყებს ორი სხეული. შეხვედრისთანავე მეორე სხეული მობრუნდა და დაიწყო მოძრაობა იმავე მიმართულებით რა მიმართულებითაც მოძრაობდა პირველი. პირველი დაეწია მეორეს (გაასწრო მას ერთი წრით) 2 წუთსა და 5 წმ-ში მოძრაობის დაწყებიდან. თუ პირველის სიჩქარე იქნებოდა მის თავდაპირველ სიჩქარეზე 2 მ/წმ-ით მეტი, ხოლო მეორის მის თავდაპირველ სიჩქარეზე 2 მ/წმ-ით ნაკლები, მაშინ ეს შეხვედრა მოხდებოდა მოძრაობის დაწყებიდან 1 წთ-სა და 15 წმ-ში. იპოვეთ თითოეული სხეულის სიჩქარე.

10.308. ორი პუნქტიდან, რომელთა შორის მანძილი 2400 კმ-ია, ერთმანეთის შესახვედრად ერთდროულად გამოვიდა სამგზავრო და ჩქარი მატარებელი. თუ ორივე მატარებელი იმოძრავებდა ჩქარი მატარებლის სიჩქარით, მაშინ მათი შეხვედრა მოხდებოდა ფაქტიურ შეხვედრამდე 3 საათით ადრე, ხოლო თუ ორივე მატარებელი იმოძრავებდა სამგზავრო მატარებლის სიჩქარით, მაშინ მათი შეხვედრა მოხდებოდა ფაქტიურ შეხვედრასთან შედარებით 5 საათით გვიან. იპოვეთ თითოეული მატარებლის სიჩქარე.

10.309. *A* პუნქტიდან გავიდა პირველი მორბენალი, ორი წუთის შემდეგ მის კვალდაკვალ გავიდა მეორე მორბენალი, რომელიც დაეწია პირველს *A*-დან 1 კმ მანძილზე. *A*-დან 5 კმ-ის გავლის შემდეგ მეორე მობრუნდა უკან და შეხვდა პირველს 20 წუთში პირველი მორბენალის მოძრაობის დაწყებიდან. იპოვეთ მეორე მორბენალის სიჩქარე.

10.310. *A* პუნქტიდან *B*-საკენ, რომელთა შორის მანძილი 70 კმ-ია, გავიდა ველოსიპედისტი, ხოლო გარკვეული დროის შემდეგ მის კვალდაკვალ გავიდა მოტოციკლისტი 50 კმ/სთ სიჩქარით. იგი დაეწია ველოსიპედისტს *A*-დან 20 კმ მანძილზე. მოტოციკლისტი *B*-ში ჩასვლიდან 48 წუთის შემდეგ დაბრუნდა უკან და შეხვდა ველოსიპედისტს 2 სთ-სა და 40 წუთში ველოსიპედისტის მოძრაობის დაწყებიდან. იპოვეთ ველოსიპედისტის სიჩქარე.

10.311. სოფლიდან ქალაქისაკენ, რომელთა შორის მანძილი 100 კმ-ია, გავიდა ველოსიპედისტი, ხოლო რაღაც დროის შემდეგ მის კვალდაკვალ გაემგზავრა ავტობუსი 50 კმ/სთ სიჩქარით. იგი დაეწია ველოსიპედისტს 36 წთ-ში (ავტობუსის გამოსვლიდან). ავტობუსი ქალაქში ჩასვლისთანავე გამობრუნდა უკან და შეხვდა ველოსიპედისტს 5 სთ და 20 წთ-ში ველოსიპედისტის მოძრაობის დაწყებიდან. იპოვეთ ველოსიპედისტის სიჩქარე.

10.312. *A* ქალაქიდან *B* ქალაქში გაემგზავრა მგზავრი, ხოლო ერთი საათის შემდეგ მეორე მგზავრი. თუ მგზავრების სიჩქარეები დარჩებოდა უცვლელი, მაშინ ისინი *B* ქალაქში მივიდოდნენ ერთდროულად. მაგრამ მთელი გზის $7/_{10}$-ის გავლის შემდეგ პირველმა მგზავრმა გაადიდა სიჩქარე $3/_{2}$-ჯერ და ამიტომ *B* ქალაქში მისი ჩასვლის მომენტში მეორე მგზავრი იმყოფებოდა 2,5 კმ მანძილზე *B* ქალაქიდან. იპოვეთ მეორე მგზავრის სიჩქარე, თუ მანძილი *A* და *B* ქალაქებს შორის 20 კმ-ია.

10.313. *A* ქალაქიდან *B* ქალაქში, რომელთა შორის მანძილი 100 კმ-ია, გაემგზავრა ველოსიპედისტი. ერთი საათის შემდეგ *A*-დან გამოვიდა მეორე ველოსიპედისტი, რომელიც დაეწია პირველს და იგივე სიჩქარით გაემგზავრა უკან. ცნობილია, რომ პირველი ველოსიპედისტი *B*-ში ჩავიდა მაშინ, როცა მეორე დაბრუნდა *A*-ში. იპოვეთ პირველი ველოსიპედისტის სიჩქარე, თუ მეორის სიჩქარეა 30 კმ/სთ.

10.314. *A* ქალაქიდან *B* ქალაქში, რომელთა შორის მანძილია 270 კმ, გაემგზავრა ტურისტი. გზის პირველი 120 კმ მან გაიარა ავტომობილით, მეორე ნაწილი მოტოციკლით, ხოლო გზის დარჩენილი ნაწილი მან გაიარა ისევ ავტომობილით 1 სთ-

ში. მოტოციკლის სიჩქარე 15 კმ/სთ-ით ნაკლებია ავტომობილის სიჩქარეზე. იპოვეთ ავტომობილის სიჩქარე, თუ ტურისტის მოძრაობის საშუალო სიჩქარეა 54 კმ/სთ.

10.315. ტბას უერთდება ორი მდინარე. ნავი პირველი მდინარის დინების მიმართულებით ტბამდე გადის 36 კმ-ს, შემდეგ 19 კმ-ს ტბაზე და 24 კმ-ს მეორე მდინარეზე დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით. სულ მგზავრობაზე ნავმა დახარჯა 8 სთ, აქედან 2 საათი იმოძრავა ტბაზე. პირველი მდინარის დინების სიჩქარე 1 კმ/სთ-ით მეტია მეორე მდინარის დინების სიჩქარეზე. იპოვეთ თითოეული მდინარის დინების სიჩქარე.

10.316. თუ გემი და კატარღა მდინარის დინების მიმართულებით იმოძრავებენ და A პუნქტიდან B პუნქტში ჩავლენ, მაშინ გემი ჩავა 1,5-ჯერ უფრო ჩქარა ვიდრე კატარღა, ამასთან კატარღა ყოველ საათში გაივლის გემზე 8 კმ-ით ნაკლებს. თუ ისინი იგივე მანძილს გაივლიან დინების საწინააღმდეგოდ, მაშინ გემი ჩავა 2-ჯერ უფრო ჩქარა ვიდრე კატარღა. იპოვეთ გემის და კატარღის სიჩქარე მდგარ წყალში.

10.317. ორ ჭურჭელში, რომელთა ტევადობაა 144 ლიტრი და 100 ლიტრი, წყლის გარკვეული რაოდენობაა. თუ მცირე ჭურჭლიდან დიდში ჩავასხამთ წყალს ისე, რომ უკანასკნელი პირამდე აივსოს მცირე ჭურჭელში წყლის პირვანდელი რაოდენობის $\frac{1}{5}$ დარჩება. თუკი დიდიდან მცირეში ჩავასხამთ წყალს და მას პირამდე ავავსებთ, მაშინ დიდ ჭურჭელში წყლის პირვანდელი რაოდენობის $\frac{7}{12}$ აღმოჩნდება. რამდენი ლიტრი წყალია თითოეულ ჭურჭელში?

10.318. გვაქვს სპირტის ორი ხსნარი. თუ პირველი ხსნარის 2 კგ, მეორის 5 კგ და 1 კგ სუფთა სპირტს ავურევთ, მივიღებთ ხსნარს, რომელშიც სპირტის კონცენტრაცია იქნება $\frac{3}{8}$. თუ პირველი ხსნარის 4 კგ, მეორის 15 კგ და 3 კგ სუფთა სპირტს ავურევთ, მივიღებთ ხსნარს, რომელშიც სპირტის კონცენტრაცია არის $\frac{4}{11}$. იპოვეთ სპირტის კონცენტრაცია თითოეულ ხსნარში.

10.319. გვაქვს სპილენძის ორი შენადნობი. ერთი მათგანი იწონის 5 კგ და შეიცავს 2 კგ სპილენძს, მეორე იწონის 11 კგ და შეიცავს 2,75 კგ სპილენძს. შეიძლება თუ არა ამ შენადნობებიდან მოვჭრათ ნაწილები, გადავადნოთ და მივიღოთ

8 კგ შენადნობი, რომლის ყოველი კილოგრამი $\frac{7}{20}$ კგ სპილენძს შეიცავს?

10.320. გოგირდმჟავას ორი ხსნარიდან პირველი არის 40%-იანი, მეორე 60%-იანი. ეს ორი ხსნარი შეურიეს ერთმანეთს და დაუმატეს 5 კგ სუფთა წყალი, რის შედეგად მიიღეს 20%-იანი ხსნარი. თუ 5 კგ წყლის ნაცვლად დაუმატებდნენ 5 კგ 80%-იან ხსნარს, მაშინ მიიღებდნენ 70%-იან ხსნარს. რამდენი კილოგრამი იყო პირველი და რამდენი კილოგრამი მეორე ხსნარი?

10.321. ჭურჭლიდან, რომელიც სავსეა სუფთა გლიცერინით გადმოასხეს ორი ლიტრი გლიცერინი და ჭურჭელი შეავსეს წყლით; ამის შემდეგ გადმოასხეს ნარევის იმდენივე რაოდენობა და ისევ შეავსეს წყლით. ბოლოს ჭურჭლიდან ისევ გადმოასხეს 2 ლიტრი ნარევი და კვლავ შეავსეს წყლით. ამის შემდეგ ჭურჭელში დარჩა 3 ლიტრით მეტი წყალი ვიდრე სუფთა გლიცერინი. რამდენი ლიტრი გლიცერინი და წყალია ჭურჭელში?

10.322. ლითონის ორი ნაჭერი ერთად იწონის 30 კგ-ს. პირველი ნაჭერი შეიცავს 5 კგ სუფთა ვერცხლს, ხოლო მეორე–4 კგ-ს. როგორია ვერცხლის პროცენტული შემცველობა პირველ ნაჭერში, თუ იგი 15%-ით ნაკლებია, ვიდრე მეორე ნაჭერში?

10.323. გვაქვს სპილენძისა და კალის ორი შენადნობი. ერთ შენადნობში ამ მეტალების რაოდენობები ისე შეეფარდება, როგორც 3:2, ხოლო მეორეში როგორც 2:3. რამდენი გრამი თითოეული შენადნობი უნდა ავიღოთ, რომ მივიღოთ 24 გრამი ახალი შენადნობი, რომელშიც სპილენძის რაოდენობის შეფარდება კალის რაოდენობასთან იქნება 5:7?

10.324. ოქროს პროცენტული შემადგენლობა ერთ შენადნობში 2,5-ჯერ მეტია, ვიდრე მეორეში. თუ ორივე შენადნობს ერთად გადავადნობთ, მაშინ მიიღება შენადნობი, რომელშიც იქნება 40% ოქრო. იპოვეთ რამდენჯერ მძიმეა პირველი შენადნობი მეორეზე, თუ ერთი და იმავე წონის პირველი და მეორე შენადნობების ერთად გადადნობით მიღებული შენადნობი შეიცავს 35% ოქროს.

§11. მიმდევრობები და პროგრესიები

I. *მიმდევრობები*

11.1. იპოვეთ პირველი ექვსი წევრი მიმდევრობისა, რომელიც შემდეგი ფორმულითაა მოცემული:

1) $x_n = 3+2n$; 2) $x_n = (-1)^n$; 3) $x_n = 2^{n-1}$; 4) $x_n = 2^{-n}$;

5) $x_n = 8-n^2$; 6) $x_n = 2n^2 - n + 3$; 7) $x_n = \dfrac{n+2}{n}$;

8) $x_n = \dfrac{1}{n}$; 9) $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$; 10) $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$.

11.2. მიმდევრობა მოცემულია ფორმულით: $x_n = n^2 + 5$. იპოვეთ:

1) x_{20}; 2) x_{100}; 3) x_{k-1}; 4) x_{2^k}.

11.3. მიმდევრობა მოცემულია $x_n = 4n-1$ ფორმულით. იპოვეთ მიმდევრობის იმ წევრის ნომერი, რომელიც უდრის:

1) 95-ს; 2) 115-ს; 3) 399-ს; 4)479-ს.

11.4. მიმდევრობა მოცემულია $x_n = n^2 + 2n + 1$ ფორმულით. არის თუ არა ამ მიმდევრობის წევრი შემდეგი რიცხვი:

1) 289; 2) 361; 3) 223; 4) 1000?

თუ არის, იპოვეთ ამ წევრის ნომერი.

11.5. მიმდევრობა მოცემულია $x_n = n^2 - 17n$ ფორმულით. არის თუ არა ამ მიმდევრობის წევრი შემდეგი რიცხვი:

1) –30; 2) -100?

თუ არის, იპოვეთ ამ წევრის ნომერი.

11.6. მიმდევრობა მოცემულია $x_n = 3n+2$ ფორმულით. იპოვეთ n–ის იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლებისთვისაც ჭეშმარიტია უტოლობა:

1) $x_n \ge 29$; 2) $x_n \le 47$; 3) $x_n > 100$; 4) $80 \le x_n \le 180$.

11.7. მიმდევრობა მოცემულია $x_n = n + \dfrac{1}{n}$ ფორმულით. იპოვეთ n-ის იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლებისთვისაც ჭეშმარიტია უტოლობა:

1) $x_n > 2$; 2) $x_n > 5$; 3) $x_n \le 6$; 4) $3 < x_n < 20$.

11.8. მიმდევრობა მოცემულია $x_n = n^2$ ფორმულით. იპოვეთ იმ წევრის ნომერი, რომლიდანაც დაწყებული მიმდევრობის წევრები მეტია:

1) 100-ზე; 2) 1000-ზე.

11.9. იპოვეთ მიმდევრობის ზოგადი წევრის ფორმულა:

1) 1, 3, 5, 7, 9,… 2) 2, 4, 6, 8, 10,…

3) 2, 5, 8, 11, 14,… 4) 1, 4, 9, 16, 25,…

5) 1, 8, 27, 64, 125,… 6) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5},\dots$

7) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5},\dots$ 8) 3, -3, 3, -3,…

9) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8},\dots$ 10) 1, 9, 25, 49, 81,…

11.10. იპოვეთ (a_n) მიმდევრობის პირველი ხუთი წევრი, თუ

1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 1$; 2) $a_1 = 7, \quad a_{n+1} = a_n - 3$;

3) $a_1 = -5, \quad a_{n+1} = 2a_n$; 4) $a_1 = 75, \; a_{n+1} = 0{,}1a_n$;

5) $a_1 = \frac{1}{6}, \quad a_{n+1} = -a_n$; 6) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$.

11.11. (x_n) მიმდევრობა მოცემულია რეკურენტულად. დაწერეთ ამ მიმდევრობის n-ური წევრის ფორმულა:

1) $x_1 = -4, \; x_{n+1} = x_n - 4$; 2) $x_1 = 4, \; x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n$;

3) $x_1 = 2, \; x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 1$; 4) $x_1 = 3, \; x_{n+1} = x_n + 2$.

11.12. არის თუ არა მონოტონური მიმდევრობა, რომელიც შემდეგი ფორმულითაა მოცემული:

1) $x_n = 10 - n$; 2) $x_n = \frac{n+3}{2}$; 3) $x_n = |3-n|$;

4) $x_n = \frac{1}{n}$; 5) $x_n = 1 + \frac{2}{n}$; 6) $x_n = \frac{n^2}{4}$;

7) $x_n = (n-6)^2$; 8) $x_n = 1 - \frac{1}{n}$; 9) $x_n = n - \frac{1}{n}$;

10) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$; 11) $x_n = \frac{3n+7}{2n+5}$; 12) $x_n = 3 - n^2$.

11.13. დაამტკიცეთ, რომ მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია

$$x_n = \left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^n,$$

სადაც a არის 1-საგან განსხვავებული დადებითი რიცხვი, ზრდადია.

11.14. ვთქვათ, $x_n = \frac{5n-1}{n}$. იპოვეთ n-ის იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელთათვისაც:

1) $5 - x_n < \frac{1}{8}$; 2) $5 - x_n < 0{,}1$;

3) $5 - x_n < \frac{1}{32}$; 4) $5 - x_n < 0{,}001$.

11.15. იპოვეთ (x_n) მიმდევრობის უდიდესი და უმცირესი წევრები, თუ ასეთები არსებობს:

1) $x_n = -n^2 + 6n + 3$; 2) $x_n = n^2 - 8n + 1$;

3) $x_n = \frac{1}{n-3{,}5}$; 4) $x_n = \frac{5n-12}{n}$.

11.16. არსებობს თუ არა სასრული რიცხვითი შუალედი, რომელსაც შემდეგი მიმდევრობის ყველა წევრი ეკუთვნის?

1) $3,\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{3}, \ldots, \frac{2n+1}{n}, \ldots$; 2) $1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{3},\ 3,\ \frac{1}{4}, \ldots, n,\ \frac{1}{n}, \ldots$;

11.17. დაადგინეთ, მოცემული მიმდევრობებიდან რომელია შემოსაზღვრული და რომელი არა:

1) $x_n = 2n+1$; 2) $x_n = n^2$; 3) $x_n = \frac{2n+1}{n}$;

4) $x_n = (-2)^n$; 5) $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; 6) $x_n = \frac{2n+7}{n}$;

7) $x_n = \frac{1}{2n-1}$; 8) $x_n = (-1)^n \cdot n$; 9) $x_n = \frac{3n+8}{2n}$;

10) $x_n = \frac{(-1)^n}{2}$.

II. არითმეტიკული პროგრესია

11.18. იპოვეთ (a_n) არითმეტიკული პროგრესიის პირველი წევრი, თუ:

1) $a_{10} = 131,\ d = 12$; 2) $a_{52} = -250,\ d = -5$;

3) $a_{100} = 0,\ d = -3$; 4) $a_{66} = 12{,}7,\ d = 0{,}2$.

11.19. იპოვეთ (a_n) არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა, თუ:

1) $a_1 = 2,\ a_{10} = 92$; 2) $a_1 = -7,\ a_{16} = 2$;

11.20. მოცემულია (a_n) არითმეტიკული პროგრესიის პირველი წევრი და სხვაობა. იპოვეთ პროგრესიის პირველი 8 წევრის ჯამი.

1) $a_1 = 100,\ d = -20$; 2) $a_1 = -23,\ d = 3$;

3) $a_1 = -13,\ d = 7$; 4) $a_1 = 9,\ d = -4$.

11.21. იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი 10 წევრის ჯამი:

1) $2,\ 5, \ldots$; 2) $-17,\ -11, \ldots$; 3) $-2,\ 0,\ 2, \ldots$;

4) $14{,}2;\ 9{,}6; \ldots$.

11.22. იპოვეთ (a_n) არითმეტიკული პროგრესიის პირველი წევრი და სხვაობა, თუ:

1) $a_5 = 27,\ a_{27} = 60$; 2) $a_{47} = 74,\ a_{74} = 47$;

3) $a_{20} = 0,\ a_{66} = -92$; 4) $a_8 = 1,\ a_{25} = 9{,}5$.

11.23. იპოვეთ (a_n) არითმეტიკული პროგრესიის n-ური წევრი და წევრთა ჯამი, თუ:

1) $a_1 = 8,\ d = 5,\ n = 15$; 2) $a_1 = -3,\ d = 0{,}7,\ n = 11$;

3) $a_1 = 4,\ d = -\dfrac{1}{4},\ n = 13$; 4) $a_1 = -1\dfrac{5}{6},\ d = \dfrac{1}{3},\ n = 61$.

11.24. იპოვეთ (a_n) არითმეტიკული პროგრესიის წევრთა რიცხვი და წევრთა ჯამი, თუ:

1) $a_1 = 0,\ d = \dfrac{1}{2},\ a_n = 5$; 2) $a_1 = -4{,}5,\ d = 5{,}5,\ a_n = 100$;

3) $a_1 = -37\dfrac{1}{2},\ d = 4,\ a_n = 46\dfrac{1}{2}$;

4) $a_1 = 14{,}5,\ d = 0{,}7,\ a_n = 32$.

11.25. არითმეტიკულ პროგრესიაში:

1) $a_1 = 5,\ a_{26} = 105$. იპოვეთ d და S_{26};

2) $a_1 = -10,\ a_6 = -20$. იპოვეთ d და S_6;

3) $a_1 = \frac{3}{4},\ a_{26} = 3\frac{7}{8}$. იპოვეთ d და S_{26};

4) $a_1 = \alpha,\ a_9 = 9\alpha + 8\beta$. იპოვეთ d და S_9.

11.26. არითმეტიკულ პროგრესიაში:

1) $d = 10,\ a_{45} = 459$. იპოვეთ a_1 და S_{45};

2) $d = 2,\ a_{15} = -10$. იპოვეთ a_1 და S_{15};

3) $d = -\frac{1}{4},\ a_{13} = 1$. იპოვეთ a_1 და S_{13}.

4) $d = 1 - \alpha,\ a_{28} = 28 + 27\alpha$. იპოვეთ a_1 და S_{28}.

11.27. არითმეტიკულ პროგრესიაში:

1) $a_1 = 1{,}5,\ a_n = 54,\ S_n = 999$. იპოვეთ d და n;

2) $a_1 = 0{,}2,\ a_n = 5{,}2,\ S_n = 137{,}7$. იპოვეთ d და n;

3) $a_1 = 1,\ a_n = 67,\ S_n = 3400$. იპოვეთ d და n;

4) $a_1 = -6,\ a_n = 15\frac{3}{4},\ S_n = 146\frac{1}{4}$. იპოვეთ d და n.

11.28. არითმეტიკულ პროგრესიაში:

1) $a_1 = -9,\ d = \frac{1}{2},\ S_n = -75$. იპოვეთ a_n და n;

2) $a_1 = \frac{5}{6},\ d = -\frac{1}{3},\ S_n = -158\frac{2}{3}$. იპოვეთ a_n და n.

11.29. არითმეტიკულ პროგრესიაში:

1) $a_1 = -28,\ S_9 = 0$. იპოვეთ d და a_9;

2) $a_1 = 0{,}7,\ S_{30} = 108$. იპოვეთ d და a_{30}.

11.30. არითმეტიკულ პროგრესიაში:

1) $d = 3,\ S_{31} = 0$. იპოვეთ a_1 და a_{31};

2) $d = \frac{1}{3},\ S_{37} = 209\frac{2}{3}$. იპოვეთ a_1 და a_{37}.

11.31. არითმეტიკულ პროგრესიაში:

1) $a_{14} = 140,\ S_{14} = 1050$. იპოვეთ a_1 და d;

2) $a_{10} = -37,\ S_{10} = -55$. იპოვეთ a_1 და d.

11.32. არითმეტიკულ პროგრესიაში:

1) $d = -2,\ a_n = -25,\ S_n = 155$. იპოვეთ a_1 და n;

2) $d = 2,\ a_n = 123,\ S_n = 3843$. იპოვეთ a_1 და n.

11.33. არითმეტიკულ პროგრესიაში:

1) $a_{30} = 53,\ d = 2$. იპოვეთ a_{17};

2) $a_{32} = 76,\ d = 3$. იპოვეთ a_{15};

3) $a_1 = 13,\ a_{15} = -1$. იპოვეთ S_{18};

4) $a_1 = 8,\ a_{11} = 18$. იპოვეთ S_{13}.

11.34. 1) 7-სა და 35-ს შორის ჩასვით ექვსი რიცხვი ისე, რომ მათ მოცემულ რიცხვებთან ერთად არითმეტიკული პროგრესია შეადგინონ.

2) 1-სა და 16-ს შორის ჩასვით 8 რიცხვი ისე, რომ მათ მოცემულ რიცხვებთან ერთად არითმეტიკული პროგრესია შეადგინონ.

11.35. არითმეტიკულ პროგრესიაში:

1) $a_3 = 12,\ a_7 = 32$. იპოვეთ a_{10};

2) $a_3 = 3,\ a_7 = 11$. იპოვეთ d;

3) $a_5 = 7,\ a_9 = 19$. იპოვეთ S_{15};

4) $a_4 = -4,\ a_8 = -34$. იპოვეთ a_7.

5) $a_n = m,\ a_m = n\ (n \neq m)$. იპოვეთ a_1 და d;

6) $a_n = m,\ a_m = n\ (n \neq m)$. იპოვეთ S_{n+m}.

იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი წევრი და სხვაობა, თუ (№№11.36; 11.37):

11.36. 1) $\begin{cases} a_1 + a_7 = 42 \\ a_{10} - a_3 = 21 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_5 + a_{11} = -0{,}2 \\ a_5 + a_{10} = 2{,}6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} a_1 + a_5 = 24 \\ a_2 \cdot a_3 = 60 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} a_7 - a_3 = 8 \\ a_2 \cdot a_7 = 75 \end{cases}$

11.37. 1) $\begin{cases} a_2 + a_5 - a_3 = 10 \\ a_1 + a_6 = 17 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} S_2 - S_5 + a_2 = 8 \\ S_3 + a_3 = 17 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5a_1 + 10a_5 = 0 \\ S_4 = 14 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} a_4^2 + a_{12}^2 = 1170 \\ a_7 + a_{15} = 60 \end{cases}$

11.38. იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი წევრი, წევრთა რიცხვი და სხვაობა, თუ:

1) $\begin{cases} a_n = 55 \\ a_2 + a_5 = 32{,}5 \\ S_{15} = 412{,}5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} S_3 = 30 \\ S_5 = 75 \\ S_n = 105 \end{cases}$

11.39. არითმეტიკულ პროგრესიაში:

1) $\begin{cases} S_5 + S_7 = 69 \\ 2a_3 + a_6 = 21. \end{cases}$ იპოვეთ S_9.

2) $\begin{cases} S_4 + S_8 = -20 \\ 3a_4 + a_5 = -10. \end{cases}$ იპოვეთ S_{12}.

11.40. არითმეტიკულ პროგრესიაში იპოვეთ პირველი n წევრის ჯამი, თუ:

1) $a_n = 2n - 1$; 2) $a_n = 3n + 2$; 3) $a_n = 4 - \frac{1}{2}n$;

4) $a_n = -12n + 7$.

11.41. 1) გამოთვალეთ ყველა ნატურალური რიცხვის ჯამი 1-დან 100-მდე;

2) გამოთვალეთ ყველა ნატურალური რიცხვის ჯამი 1-დან n-მდე;

3) იპოვეთ ყველა ლუწი ნატურალური რიცხვის ჯამი 100-მდე ჩათვლით;

4) იპოვეთ ყველა კენტი ნატურალური რიცხვის ჯამი 13-დან 81-მდე ჩათვლით;

5) გამოიანგარიშეთ ყველა ორნიშნა ნატურალური რიცხვის ჯამი.

6) იპოვეთ ყველა კენტი სამნიშნა რიცხვის ჯამი 112-დან 128-მდე.

11.42. არითმეტიკულ პროგრესიაში:

1) $a_1 = 7,\ d = 15$. იპოვეთ $a_{10} + a_{11} + \cdots + a_{20}$;

2) $a_1 = 2,\ d = 8$. იპოვეთ $a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{25}$.

11.43. არითმეტიკულ პროგრესიაში:

1) $a_9 = 20$. იპოვეთ S_{17};

2) $a_{16} = 2$. იპოვეთ S_{31}.

11.44. არითმეტიკულ პროგრესიაში:

1) $a_8 + a_{15} = 48$. იპოვეთ S_{22};

2) $a_4 + a_7 + a_{10} + a_{15} = 98$. იპოვეთ a_9;

3) $a_7 + a_{11} + a_{14} + a_{16} = 120$. იპოვეთ a_{12};

4) $a_2 + a_8 + a_{12} + a_{18} = 100$. იპოვეთ a_{10}.

11.45. 1) იპოვეთ $\frac{7}{12},\ 0{,}55, \ldots$ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი უარყოფითი წევრი.

2) იპოვეთ $-3\frac{1}{2},\ -3\frac{2}{9},\ldots$ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი დადებითი წევრი.

11.46. იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის უდიდესი უარყოფითი წევრი, თუ:

1) $a_1 = 37,\ d = -1\frac{2}{3}$; 2) $a_1 = -30,\ d = 1\frac{1}{4}$.

11.47. იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის უმცირესი დადებითი წევრი, თუ:

1) $a_1 = 50,\ d = -\frac{4}{5}$; 2) $a_1 = -60,\ d = 1\frac{1}{3}$.

11.48. იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის ყველა დადებითი წევრის ჯამი, თუ:

1) $a_1 = 35,\ d = -\frac{3}{4}$; 2) $a_1 = 28,\ d = -\frac{2}{5}$.

11.49. იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის ყველა უარყოფითი წევრის ჯამი, თუ:

1) $a_1 = -22,\ d = \frac{1}{3}$; 2) $a_1 = -35,\ d = \frac{3}{4}$.

11.50. 1) იპოვეთ $a_n = 18 - \frac{2}{3}n$ მიმდევრობის ყველა ისეთი წევრის ჯამი, რომლებიც მეტია 6-ზე.

2) იპოვეთ $a_n = 14 - \frac{6}{7}n$ მიმდევრობის ყველა ისეთი წევრის ჯამი, რომლებიც მეტია 2-ზე.

11.51. 1) იპოვეთ 10 და 20-ს შორის მოთავსებული ყველა იმ უკვეცი წილადების ჯამი, რომელთა მნიშვნელია 3.
2) იპოვეთ 8 და 16-ს შორის მოთავსებული ყველა იმ უკვეცი წილადების ჯამი, რომელთა მნიშვნელია 5.

11.52. არითმეტიკულ პროგრესიაში:

1) $S_{10} = 100,\ S_{30} = 900$. იპოვეთ S_{40};

2) $S_{15} = S_{25} = 150$. იპოვეთ S_{30}.

11.53. არის თუ არა (a_n) მიმდევრობა არითმეტიკული პროგრესია, თუ ამ მიმდევრობის პირველი n წევრის ჯამი შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

1) $S_n = n^2 - 2n$; 2) $S_n = -4n^2 + 11$;

3) $S_n = 7n - 1$; 4) $S_n = n^2 - n + 3$.

11.54. რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს a, b და c რიცხვები, რომ მიმდევრობა, რომლის პირველი n წევრის ჯამი გამოითვლება ფორმულით $S_n = an^2 + bn + c$, იყოს არითმეტიკული პროგრესია?

11.55. ამოხსენით განტოლება:

1) $1 + 3 + 5 + \cdots + x = 441$;

2) $1 + 4 + 7 + \cdots + x = 117$;

3) $1 + 3 + 5 + \cdots + (x - 10) = 400$;

4) $4 + 7 + 10 + \cdots + (x - 2) = 209$;

5) $2 + 4{,}5 + 7 + \cdots + (x + 30) = 515$;

6) $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \cdots + (x + 28) = 155$.

11.56. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ არითმეტიკული პროგრესიაა, მაშინ:

$$ab + bc = 2ac.$$

11.57. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$ და $\frac{1}{a+b}$ არითმეტიკული პროგრესიაა, მაშინ a^2, b^2, c^2 არითმეტიკული პროგრესია იქნება.

11.58. დაამტკიცეთ, რომ (a_n) მიმდევრობის არცერთი სამი მომდევნო წევრი არ ადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას, თუ:

1) $a_n = n^2$; 2) $a_n = \sqrt{n}$; 3) $a_n = \frac{1}{n}$.

11.59. დაამტკიცეთ, რომ თუ a, b, c არითმეტიკული პროგრესიაა, მაშინ

1) $3(a^2 + b^2 + c^2) = 6(a - b)^2 + (a + b + c)^2$;

2) $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$.

11.60. რამდენ საათში გაივლის ველოსიპედისტი 54 კმ-ს, თუ პირველ საათში იგი გადის 15 კმ-ს, ხოლო ყოველ შემდეგ საათში 1 კმ-ით ნაკლებს, ვიდრე წინაში?

11.61. ამფითეატრი შედგება 10 რიგისაგან, ამასთანავე ყოველ შემდეგ რიგში 20 ადგილით მეტია, ვიდრე წინაში, ხოლო უკანასკნელ რიგში 280 ადგილია. რამდენ კაცს იტევს ამფითეატრი?

11.62. ბურთულები სამკუთხედის ფორმით არის დალაგებული. ამასთან ზემოდან პირველ რიგში 1 ბურთულაა,

მეორეში–2, მესამეში–3 და ა. შ. რამდენ რიგადაა დალაგებული ბურთულები, თუ მათი საერთო რაოდენობა 120-ია? რამდენი ბურთულაა საჭირო ოცდაათრიგიანი სამკუთხედის შესადგენად?

11.63. ტურისტმა, რომელიც ადიოდა მთის ფერდობზე, პირველი საათის განმავლობაში მიაღწია 800 მ სიმაღლეს, ხოლო ყოველ შემდეგ საათში 25 მეტრით ნაკლები სიმაღლე დაფარა, ვიდრე წინაში. რამდენ საათში მიაღწევს ტურისტი 5700 მ სიმაღლეს?

11.64. მამა თავის შვილს მისი დაბადების დღეს, დაწყებული 5 წლიდან, საჩუქრად აძლევს იმდენ წიგნს, რამდენი წლისაც არის შვილი. ხუთი შვილის წლოვანებათა რიცხვი შეადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას, რომლის სხვაობაა 3. რამდენი წლის იყო თითოეული შვილი, როდესაც მათი ბიბლიოთეკა 325 წიგნისაგან შედგებოდა?

11.65. A პუნქტიდან გამოვიდა ველოსიპედისტი, რომელმაც პირველ საათში გაიარა 10 კმ, ხოლო ყოველ შემდეგ საათში 1 კმ-ით მეტს გადიოდა, ვიდრე წინაში. ერთდროულად, მის კვალდაკვალ A-დან 7,5 კმ-ის მანძილზე მდებარე B პუნქტიდან გამოვიდა მეორე ველოსიპედისტი, რომელმაც პირველ საათში გაიარა 12 კმ, ხოლო ყოველ შემდეგ საათში გადიოდა 1,5 კმ-ით მეტს, ვიდრე წინაში. იპოვეთ რამდენი საათის შემდეგ დაეწევა მეორე ველოსიპედისტი პირველს.

11.66. ორი სხეული, რომელთა შორის მანძილი 153 მ-ია, ერთმანეთის შესახვედრად მოძრაობს. პირველი სხეული წამში 10 მ-ს გადის. მეორე სხეულმა კი პირველ წამში გაიარა 3 მ და ყოველ შემდეგ წამში 5 მ-ით მეტი, ვიდრე წინაში. რამდენი წამის შემდეგ შეხვდებიან სხეულები ერთმანეთს?

11.67. სხეული პირველ წუთში 3 მ-ს გადის, ხოლო ყოველ შემდეგ წუთში 6 მ-ით მეტს, ვიდრე წინაში. პირველი სხეულის გამოსვლიდან 5 წუთის შემდეგ იმავე პუნქტიდან საწინააღმდეგო მიმართულებით გამოდის მეორე სხეული, რომელიც პირველ წუთში გადის 54 მ-ს, ხოლო ყოველ შემდეგ წუთში 3 მ-ით მეტს, ვიდრე წინაში. მეორე სხეულის გამოსვლიდან რამდენი წუთის შემდეგ იქნებიან სხეულები მოცემული პუნქტიდან ტოლი მანძილებით დაშორებული?

11.68. ორი პუნქტიდან ერთმანეთის შესახვედრად ერთდროულად ორი სხეული გამოვიდა; პუნქტებს შორის მანძილი 200 მ-

ია. პირველი სხეული წამში გადის 12 მ-ს; მეორე სხეულმა პირველ წამში გაიარა 20 მ, ხოლო ყოველ შემდეგ წამში გადიოდა 2 მ-ით ნაკლებს, ვიდრე წინაში. რამდენი წამის შემდეგ შეხვდებიან სხეულები ერთმანეთს?

11.69. შეიძლება თუ არა, რომ მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებმა შეადგინონ არითმეტიკული პროგრესია?

11.70. შეიძლება თუ არა, რომ სამკუთხედის გვერდებმა და პერიმეტრმა შეადგინონ არითმეტიკული პროგრესია?

11.71. არითმეტიკული პროგრესიის შემადგენელი სამი რიცხვის ჯამი უდრის 2, ხოლო ამავე რიცხვთა კვადრატების ჯამია $1\frac{5}{9}$. იპოვეთ ეს რიცხვები.

11.72. იპოვეთ ნატურალურ რიცხვთაგან შედგენილი ისეთი არითმეტიკული პროგრესია, რომლის პირველი სამი და პირველი ოთხი წევრის ნამრავლი შესაბამისად უდრის 6 და 24.

11.73. მოცემულია ორი არითმეტიკული პროგრესია. პირველი პროგრესიის პირველი და მეხუთე წევრები შესაბამისად ტოლია 7 და –5, ხოლო მეორე პროგრესიის პირველი წევრი უდრის 0-ს და უკანასკნელი წევრი $3\frac{1}{2}$. იპოვეთ მეორე პროგრესიის წევრების ჯამი, თუ ცნობილია, რომ ორივე პროგრესიის მესამე წევრი ერთმანეთის ტოლია.

11.74. მოცემულია ორი არითმეტიკული პროგრესია 5,9,13,… და 3,9,15,…. თითოეული შეიცავს 50 წევრს. იპოვეთ ყველა იმ რიცხვების ჯამი, რომლებიც ერთდროულად წარმოადგენენ ამ ორი პროგრესიის წევრებს.

III. გეომეტრიული პროგრესია

11.75. იპოვეთ გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი, თუ:

1) $b_1 = 12,\ b_2 = 9$; 2) $b_4 = 20,\ b_5 = -30$;

3) $b_8 = -40,\ b_9 = -80$; 4) $b_3 = \sqrt{2},\ b_4 = 2$.

გეომეტრიულ პროგრესიაში (№№11.76-11.87):

11.76. 1) $b_1 = \frac{1}{4},\ q = 2$. იპოვეთ b_6;

2) $b_1 = 8,\ q = \frac{1}{2}$. იპოვეთ b_7;

3) $b_1 = -4,\ q = -\frac{1}{2}$. იპოვეთ b_6;

4) $b_1 = -4,\ q = -\frac{1}{3}$. იპოვეთ b_4.

11.77. 1) $b_5 = 256,\ q = 4$. იპოვეთ b_3;

2) $b_5 = 162,\ q = 3$. იპოვეთ b_3;

3) $b_6 = -486,\ q = -3$. იპოვეთ b_2;

4) $b_7 = 320,\ q = -2$. იპოვეთ b_3.

11.78. 1) $b_1 = -2,\ b_6 = -486$. იპოვეთ q;

2) $b_1 = 2,\ b_5 = 512$. იპოვეთ q;

3) $b_1 = 3,\ b_8 = -384$. იპოვეთ q;

4) $b_1 = 8,\ b_6 = 256$. იპოვეთ q.

11.79. 1) $b_1 = 8,\ q = \frac{1}{2}$. იპოვეთ S_5; 2) $b_1 = 1,\ q = -2$. იპოვეთ S_9;

3) $b_1 = 4,\ q = \frac{2}{3}$. იპოვეთ S_6; 4) $b_1 = 3,\ q = -\frac{1}{2}$. იპოვეთ S_{10}.

11.80. 1) $b_1 = 96,\ q = \frac{1}{2}$. იპოვეთ b_7 და S_7;

2) $b_1 = 0{,}125,\ q = -2$. იპოვეთ b_6 და S_6.

11.81. 1) $b_1 = 256,\ q = \frac{1}{2},\ b_n = 2$. იპოვეთ n და S_n;

2) $b_1 = \frac{1}{4},\ q = 4,\ b_n = 1024$. იპოვეთ n და S_n.

11.82. 1) $b_1 = 2,\ b_7 = 1458$. იპოვეთ q და S_7;

2) $b_1 = 2,\ b_5 = \frac{1}{8}$. იპოვეთ q და S_5.

11.83. 1) $q = 2\frac{1}{2},\ b_6 = 3125$. იპოვეთ b_1 და S_6;

2) $q = 2,\ b_6 = 96$. იპოვეთ b_1 და S_6.

11.84. 1) $b_1 = 1,\ b_n = -512,\ S_n = -341$. იპოვეთ n და q;

2) $b_1 = 90,\ b_n = \frac{10}{9},\ S_n = \frac{1210}{9}$. იპოვეთ n და q.

11.85. 1) $q = 2,\ S_8 = 765$. იპოვეთ b_1 და b_8;

2) $q = 3,\ S_5 = 847$. იპოვეთ b_1 და b_5.

11.86. 1) $b_1 = 128,\ q = \frac{1}{2},\ S_n = 254$. იპოვეთ n და b_n;

2) $b_1 = 27,\ q = \dfrac{2}{3},\ S_n = 65$. იპოვეთ n და b_n.

11.87. 1) $q = \dfrac{3}{4},\ b_n = \dfrac{27}{4},\ S_n = 43{,}75$. იპოვეთ n და b_1;

2) $q = \dfrac{1}{2},\ b_n = 7,\ S_n = 7161$. იპოვეთ n და b_1.

11.88. იპოვეთ (b_n) გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი, მე-6 და მე-7 წევრები, თუ:

1) $b_3 = 6,\ b_5 = 24$; 2) $b_5 = 10,\ b_8 = -10$;

3) $b_3 = -2,\ b_5 = -18$; 4) $b_5 = 24,\ b_8 = 3$.

11.89. გეომეტრიული პროგრესიის მე-8 წევრი უდრის 13-ს, ხოლო მნიშვნელი–3-ს. იპოვეთ მეათე და მეცამეტე წევრები.

11.90. 1) გამოსახეთ (b_n) გეომეტრიული პროგრესიის მეშვიდე, მეთხუთმეტე და მეორმოცე წევრები b_5-ისა და q-ს საშუალებით.

2) (b_n) გეომეტრიულ პროგრესიაში $(b_n > 0)$, $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$, ($n \ge 3$). იპოვეთ პროგრესიის მნიშვნელი.

11.91. გეომეტრიულ პროგრესიაში:

1) $b_1 = \dfrac{3}{2},\ q = \dfrac{1}{2}$. იპოვეთ $b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7$;

2) $b_1 = 18,\ q = \dfrac{2}{3}$. იპოვეთ $b_3 + b_4 + b_5 + b_6$;

3) $b_1 = \dfrac{2}{3},\ q = -3$. იპოვეთ $b_2 + b_3 + b_4 + b_5$;

4) $b_1 = -\dfrac{3}{2},\ q = -2$. იპოვეთ $b_3 + b_4 + b_5 + b_6$.

11.92. 1) 9-სა და 243-ს შორის ჩასვით ორი რიცხვი, რომლებიც მოცემულ რიცხვებთან ერთად გეომეტრიულ პროგრესიას შეადგენენ.

2) 160-სა და 5-ს შორის ჩასვით ოთხი რიცხვი ისე, რომ მათ მოცემულ რიცხვებთან ერთად შეადგინონ გეომეტრიული პროგრესია.

3) 1-სა და 7-ს შორის ჩასვით ექვსი რიცხვი ისე, რომ მათ მოცემულ რიცხვებთან ერთად შეადგინონ გეომეტრიული პროგრესია.

4) 60-სა და $\frac{15}{16}$-ს შორის ჩასვით ხუთი ისეთი რიცხვი, რომლებიც მოცემულ რიცხვებთან ერთად გეომეტრიულ პროგრესიას ადგენენ.

11.93. იპოვეთ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი წევრი და მნიშვნელი, თუ:

1) $\begin{cases} b_2 - b_1 = -4 \\ b_3 - b_1 = 8 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} b_4 + b_1 = \frac{7}{16} \\ b_3 - b_2 + b_1 = \frac{7}{8} \end{cases}$

3) $\begin{cases} b_5 - b_1 = 15 \\ b_4 - b_2 = 6 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} b_2 + b_5 - b_4 = 10 \\ b_3 + b_6 - b_5 = 20 \end{cases}$

11.94. იპოვეთ იმ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი წევრი, მნიშვნელი და წევრთა რიცხვი, რომელშიც:

1) $b_7 - b_5 = 48,$ $b_6 + b_5 = 48$, $S_n = 1023$; 2) $b_6 - b_4 = 216,$ $b_3 - b_1 = 8$, $S_n = 40$.

11.95. იპოვეთ S_3, S_5, S_n, თუ (b_n) გეომეტრიული პროგრესია n-ური წევრის ფორმულითაა მოცემული:

1) $b_n = 1{,}5 \cdot 4^n$; 2) $b_n = 2 \cdot 3^{n+1}$.

11.96. იპოვეთ ჯამი:

1) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{10}$; 2) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \cdots - \frac{1}{2^{10}}$;

3) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{10}}$; 4) $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \cdots + 2^{12}$.

5) $1 + x + x^2 + \cdots + x^{100}$; 6) $x - x^3 + x^5 - \cdots + x^{13}$.

11.97. ამოხსენით განტოლება:

1) $1 + x + x^2 + \cdots + x^{10} = \frac{x^{11} + x}{x - 1}$;

2) $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^{12} = \frac{x^{13} + x^2}{1 + x}$.

3) $1 + x + x^2 + \cdots + x^{99} = 0$; 4) $1 + x + x^2 + \cdots + x^{100} = 0$;

5) $\frac{1}{x} + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1 - x} = \frac{7}{2}$;

6) $\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\frac{x-3}{x}+\cdots+\frac{1}{x}=1+x+x^2+\cdots+x^{10}+\frac{x^{11}-3x+2}{1-x}$,
სადაც x მთელი რიცხვია.

11.98. დაამტკიცეთ, რომ შემდეგი ფორმულით მოცემული (b_n) მიმდევრობა გეომეტრიული პროგრესიაა:

1) $b_n=2^n$, 2) $b_n=\frac{3}{5^n}$;

3) $b_n=4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$; 4) $b_n=-3^n$.

11.99. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი a-სა და b-სათვის ($|a|\neq|b|$) $(a+b)^2$, a^2-b^2, $(a-b)^2$ გეომეტრიული პროგრესიაა.

11.100. დაამტკიცეთ, რომ თუ a, b, c, d გეომეტრიული პროგრესიაა, მაშინ $(a-d)^2=(d-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$.

11.101. ცნობილია, რომ (b_n) გეომეტრიული პროგრესიაა. იქნება თუ არა გეომეტრიული პროგრესია შემდეგი მიმდევრობა:

1) $2b_1$, $2b_2$, $2b_3$, …, $2b_n$, …; 2) $b_1, b_3, b_5, \ldots, b_{2n-1}, \ldots$;

3) $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3}, \ldots, \frac{1}{b_n}, \ldots$; 4) $b_1^3, b_2^3, b_3^3, \ldots, b_n^3, \ldots$.

11.102. არის თუ არა (b_n) მიმდევრობა გეომეტრიული პროგრესია, თუ ცნობილია, რომ ამ მიმდევრობის პირველი n წევრის ჯამი შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

1) $S_n=3^n-1$; 2) $S_n=n^2-1$; 3) $S_n=2^n-1$; 4) $S_n=3^n+1$.

11.103. იპოვეთ ფორმულა, რომელიც გამოსახავს გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ნამრავლს პირველი წევრისა და მნიშვნელის საშუალებით.

11.104. თუ გეომეტრიული პროგრესიის ყველა წევრს გავამრავლებთ სხვა გეომეტრიული პროგრესიის შესაბამის (დაკავებული ადგილის ნომრის მიხედვით) წევრებზე, მაშინ იქნება თუ არა მიღებული მიმდევრობა გეომეტრიული პროგრესია?

11.105. დაამტკიცეთ, რომ თუ (b_n) გეომეტრიული პროგრესიაა, მაშინ

$$S_n=b_1\cdot b_n\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}\right).$$

11.106. გეომეტრიული პროგრესიის პირველი ოთხი წევრის ჯამი უდრის 30-ს, მომდევნო ოთხი წევრის კი 480-ს. იპოვეთ პირველი თორმეტი წევრის ჯამი.

11.107. გეომეტრიული პროგრესიის პირველი სამი წევრის ჯამია 40, ექვსი წევრისა კი 60; იპოვეთ S_9.

11.108. იპოვეთ ოთხი რიცხვი, რომლებიც შეადგენს კლებად გეომეტრიულ პროგრესიას, თუ ვიცით, რომ ამ პროგრესიის კიდური წევრების ჯამია 27, ხოლო შუა წევრების ჯამი არის 18.

11.109. იპოვეთ სამი რიცხვი, რომლებიც ზრდად გეომეტრიულ პროგრესიას შეადგენენ, თუ ვიცით, რომ მათი ჯამი არის 26, ხოლო ამ რიცხვების კვადრატების ჯამია 364.

11.110. რიცხვები 15, $17q$, $15q^2$ ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას. იპოვეთ 2, $2q$, $2q^2,\ldots$ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი 4 წევრის ჯამი, თუ ის კლებადია.

11.111. რიცხვები $6-d,\ d,\ 1$ ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას. იპოვეთ $3,\ 3+d,\ 3+2d,\ldots$ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი 13 წევრის ჯამი, თუ ის კლებადია.

11.112. არითმეტიკული პროგრესიის 1-ლი, მე-3 და მე-13 წევრები გეომეტრიულ პროგრესიას ადგენენ. იპოვეთ ამ უკანასკნელის მნიშვნელი.

11.113. გეომეტრიული პროგრესიის 1-ლი, მე-2 და მე-4 წევრები არითმეტიკულ პროგრესიას ადგენენ. იპოვეთ გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი.

11.114. იპოვეთ არითმეტიკული და გეომეტრიული პროგრესიები, თუ ცნობილია, რომ თითოეული პროგრესიის პირველი წევრი უდრის 1-ს, ორივე პროგრესიის მესამე წევრები ტოლია, ხოლო არითმეტიკული პროგრესიის 21-ე წევრი უდრის გეომეტრიული პროგრესიის მე-5 წევრს.

11.115. სამი დადებითი რიცხვი, რომელთა ჯამი 21-ია, არითმეტიკულ პროგრესიას შეადგენენ. თუ მათ შესაბამისად 2-ით, 3-ით და 9-ით გავადიდებთ, მივიღებთ გეომეტრიულ პროგრესიას. იპოვეთ ეს რიცხვები.

11.116. სამი დადებითი რიცხვი, რომლებიც არითმეტიკულ პროგრესიას შეადგენენ, ჯამში 15-ს იძლევა. თუ პირველსა და მეორეს ერთით გავადიდებთ, ხოლო მესამე რიცხვს 4-ით, მაშინ მივიღებთ გეომეტრიულ პროგრესიას. იპოვეთ ეს რიცხვები.

11.117. სამი რიცხვი, რომელთა ჯამი უდრის 65-ს, გეომეტრიულ პროგრესიას შეადგენს. თუ ამ რიცხვებიდან უმცირესს 1-ს

გამოვაკლებთ, ხოლო უდიდესს 19-ს, მაშინ მიღებული რიცხვები არითმეტიკულ პროგრესიას შეადგენენ. იპოვეთ ეს რიცხვები.

11.118. იპოვეთ ოთხი მთელი რიცხვი, რომელთაგან პირველი სამი არითმეტიკულ პროგრესიას შეადგენს, უკანასკნელი სამი კი გეომეტრიულ პროგრესიას; ცნობილია, რომ ორი კიდური რიცხვის ჯამი უდრის 37-ს, ხოლო ორი შუა რიცხვის ჯამი 36-ს.

11.119. ოთხი რიცხვი არითმეტიკულ პროგრესიას ადგენს. თუ მათ შესაბამისად 2-ს, 6-ს, 7-სა და 2-ს დავაკლებთ, მაშინ ახლად მიღებული რიცხვები გეომეტრიულ პროგრესიას შეადგენენ. იპოვეთ ეს რიცხვები.

11.120. ოთხი რიცხვი გეომეტრიულ პროგრესიას ადგენს. თუ მათ შესაბამისად 2-ს, 1-ს, 7-სა და 27-ს დავაკლებთ, მაშინ ახლად მიღებული რიცხვები არითმეტიკულ პროგრესიას შეადგენენ. იპოვეთ ეს რიცხვები.

11.121. გეომეტრიული პროგრესიის პირველი წევრი არის 1, მნიშვნელია 2, წევრთა რიცხვი კი $2n$. პროგრესიის წევრთა ჯამი $\frac{33}{32}$-ჯერ მეტია ბოლო n-წევრის ჯამზე. იპოვეთ n.

11.122. არითმეტიკულ და გეომეტრიულ პროგრესიებს აქვთ 5-ის ტოლი პირველი წევრები; ამ პროგრესიების მესამე წევრებიც ერთმანეთის ტოლია, ხოლო არითმეტიკული პროგრესიის მეორე წევრი 10-ით მეტია გეომეტრიული პროგრესიის მეორე წევრზე. იპოვეთ ეს პროგრესიები.

11.123. იპოვეთ ოთხი ისეთი რიცხვი, რომელთაგან პირველი სამი შეადგენს გეომეტრიულ პროგრესიას, ხოლო უკანასკნელი სამი–არითმეტიკულ პროგრესიას: კიდურა წევრების ჯამია 21, ხოლო შუა წევრების- 18.

11.124. სამი რიცხვი შეადგენს გეომეტრიულ პროგრესიას. თუ მესამე წევრს გამოვაკლებთ ოთხს, მაშინ ეს რიცხვები შეადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას. თუ მიღებული არითმეტიკული პროგრესიის მეორე და მესამე წევრებს თითო-თითოს გამოვაკლებთ, მაშინ ისევ მივიღებთ გეომეტრიულ პროგრესიას. იპოვეთ ეს რიცხვები.

11.125. იპოვეთ ოთხი რიცხვი, რომლებიც შეადგენენ ისეთ გეომეტრიულ პროგრესიას, რომლის კიდურა წევრების ჯამი უდრის –49-ს, ხოლო შუა წევრთა ჯამია 14.

11.126. იპოვეთ გეომეტრიული პროგრესიის შემადგენელი ოთხი რიცხვი, თუ ცნობილია, რომ ამ პროგრესიის მესამე წევრი

9-ით მეტია პირველზე, ხოლო მეორე 18-ით მეტია მეოთხეზე.

IV. გეომეტრიული პროგრესია, როცა $|q|<1$

11.127. იპოვეთ გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$; 2) $16,\ 4,\ 1, \ldots$;

3) $6\frac{2}{3}, 1\frac{1}{3}, \frac{4}{15}, \ldots$; 4) $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \ldots$.

11.128. 1) იპოვეთ მნიშვნელი გეომეტრიული პროგრესიისა, რომელშიც პირველი წევრი უდრის 66-ს, ხოლო პროგრესიის ჯამი 110-ს.

2) იპოვეთ მეოთხე წევრი გეომეტრიული პროგრესიისა, რომელშიც მნიშვნელი უდრის 0,4-ს, ხოლო პროგრესიის ჯამი $33\frac{1}{3}$-ს.

3) იპოვეთ ჯამი გეომეტრიული პროგრესიისა, რომელშიც მეორე წევრი უდრის $1\frac{2}{3}$-ს, ხოლო პროგრესიის მნიშვნელი $\frac{2}{3}$-ს.

4) გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი უდრის 12,5-ს, ხოლო მისი პირველი და მეორე წევრების ჯამი 12-ს. იპოვეთ ეს პროგრესია.

11.129. იპოვეთ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი წევრი, თუ:

1) პროგრესიის ჯამი უდრის 10,8-ს, ხოლო პროგრესიის მნიშვნელი $\frac{2}{9}$-ია;

2) პროგრესიის ჯამი უდრის 729-ს, ხოლო მეორე წევრი 162-ს;

3) პროგრესიის ჯამი უდრის 14,4-ს, ხოლო პროგრესიის მნიშვნელი $\frac{3}{8}$-ია;

4) პირველი ოთხი წევრის ჯამი უდრის $33\frac{3}{4}$, ხოლო პროგრესიის ჯამი 36-ია.

11.130. იპოვეთ გეომეტრიული პროგრესიის მესამე წევრი, თუ ცნობილია, რომ ამ პროგრესიის ჯამი უდრის $1\frac{3}{5}$, ხოლო მეორე წევრი ტოლია $-\frac{1}{2}$-ის.

11.131. იპოვეთ ისეთი გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი, რომლის ყოველი წევრი 4-ჯერ მეტია ყველა მისი მომდევნო წევრებისაგან შედგენილი პროგრესიის ჯამზე.

11.132. იპოვეთ ისეთი გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი, რომლის ყოველი წევრი ისე შეეფარდება თავის მომდევნო წევრთაგან შედგენილი პროგრესიის ჯამს, როგორც 2:3.

11.133. გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი ტოლია 4-ის, ხოლო მისი წევრების კუბებისაგან შედგენილი პროგრესიის ჯამია 192. იპოვეთ ამ პროგრესიის პირველი წევრი და მნიშვნელი.

11.134. ტოლგვერდა სამკუთხედში, რომლის გვერდი არის a, მისი გვერდების შუაწერტილების შეერთებით ჩახაზულია ახალი სამკუთხედი; ამ სამკუთხედში იმავე ხერხით ჩახაზულია კიდევ ახალი სამკუთხედი და ა. შ. უსასრულოდ. იპოვეთ:

1) ამ სამკუთხედების პერიმეტრების ჯამი;

2) ამ სამკუთხედების ფართობების ჯამი.

§12. ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გამარტივება და გამოთვლა

გამოთვალეთ (№№12.1; 12.2):

12.1. 1) $5\sin 90^\circ + 2\cos 0^\circ - 2\sin 270^\circ + 10\cos 180^\circ$;

2) $3tg 0^\circ + 2\cos 90^\circ + 3\sin 270^\circ - 3\cos 180^\circ$;

3) $4\sin\pi - 2\cos\frac{3}{2}\pi + 3\sin 2\pi - tg\pi$;

4) $6 - 2\sin 2\pi - 3\cos\pi + 2\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos 2\pi$;

5) $2\sin\frac{\pi}{4} + 3\cos 2\pi - 5tg 2\pi$;

6) $4tg 2\pi - 2\sin\frac{\pi}{2} + 3\cos\frac{3}{2}\pi - 4tg\pi$.

12.2. 1) $2\sin 30^\circ - tg45^\circ + 2ctg45^\circ + \cos 90^\circ$;

2) $3\sin\frac{\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{6} + 3tg\frac{\pi}{3} - 4ctg\frac{\pi}{2}$;

3) $3 - \sin^2\frac{\pi}{2} + 2\cos^2\frac{\pi}{3} - 3tg^2\frac{\pi}{4}$;

4) $\dfrac{4 - 2tg^2 45^\circ + ctg^4 60^\circ}{3\sin^2 90^\circ - 4\cos^2 60^\circ + 4ctg45^\circ}$;

5) $\left(2\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 - \left(3tg\frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(2\cos\frac{\pi}{6}\right)^4 - \left(2ctg\frac{\pi}{4}\right)^2$;

6) $3\sin^2\frac{\pi}{2} - \left(2tg\frac{\pi}{4}\right)^3 - 4\cos^2\frac{\pi}{6} + 3ctg^3\frac{\pi}{2}$.

12.3. შემდეგი ფუნქციებიდან რომელია ლუწი? კენტი? არც ლუწი და არც კენტი?

1) $tg\frac{x}{2}$, $\sin 2x$, $|\sin x|$, $\sin x + 2\cos x$, $\cos 5x$;

2) $\dfrac{2\sin x}{1+\cos x}$, $\sin x \cdot \cos x$, $x \cdot \cos x$, $\dfrac{\sin 2x + \cos x}{x^3}$;

3) $|1+\cos x|$, $x^2 + \sin^2 x$, $\dfrac{x^2 + \cos x}{x^2 - \cos x}$, $x^2 tgx$;

4) $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$, $1 - 2\sin^2 x + \cos x$, $\cos x + \dfrac{1}{tgx}$,

$1 - 2\sin^2 x + tgx$, $\dfrac{1-\cos^2 x}{x^5}$.

გამოთვალეთ (№№12.4; 12.5):

12.4. 1) $\sin(-90^\circ)$, $tg(-60^\circ)$, $\cos(-45^\circ)$, $ctg(-60^\circ)$;

2) $tg^2(-45^\circ)$, $\cos(-180^\circ)$, $\sin^3(-60^\circ)$, $ctg(-270^\circ)$;

3) $\sin(-180^\circ)$, $tg(-180^\circ)$, $\cos(-90^\circ)$, $ctg^3(-30^\circ)$.

12.5. 1) $\sin(-30^\circ) - 2tg(-45^\circ) + \cos(-60^\circ) - ctg(-90^\circ)$;

2) $\dfrac{\sin^3(-30^\circ) - 2ctg\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 1}{2 - tg45^\circ + 4\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$;

3) $2\cos^3\left(-\frac{\pi}{3}\right)-4ctg^3\left(-\frac{\pi}{6}\right)+6tg0$;

4) $5tg0+2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-3ctg\left(-\frac{\pi}{4}\right)+4\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა პერიოდულობის გათვალისწინებით გამოთვალეთ (№№12.6; 12.7):

12.6. 1) $\sin 780^\circ$, $\cos 765^\circ$, $tg390^\circ$, $ctg405^\circ$;

2) $\sin 1500^\circ$, $\cos 1020^\circ$, $tg1845^\circ$, $ctg1485^\circ$;

3) $\sin\left(-2205^\circ\right)$, $\cos\left(-1980^\circ\right)$, $tg2220^\circ$, $ctg\left(-1860^\circ\right)$;

4) $\sin 2250^\circ$, $\cos 2190^\circ$, $tg\left(-1980^\circ\right)$, $ctg1410^\circ$.

12.7. 1) $\sin 2190^\circ+2\cos\left(-2220^\circ\right)-\sin 1980^\circ-\cos 1170^\circ$;

2) $\dfrac{2\sin 2250^\circ-\cos 1740^\circ}{2tg\left(-1485^\circ\right)}$;

3) $\dfrac{\cos 1530^\circ\cdot tg1410^\circ-tg^2 2220^\circ\sin 1845^\circ}{\cos^2\left(-2550^\circ\right)}$;

4) $\dfrac{\sin^2\left(-2490^\circ\right)\cdot\cos 420^\circ-tg^2\left(-2940^\circ\right)\cdot ctg1845^\circ}{23\sin 1530^\circ-\cos^3 990^\circ}$.

იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი (№№12.8-12.11):

12.8. 1) $2\sin x$, 2) $\dfrac{\sin x}{2}$, 3) $3\cos x$,

4) $2tgx+1$, 5) $\dfrac{1}{3}tgx$, 6) $\dfrac{3}{4}ctgx+7$.

12.9. 1) $\sin 2x$. 2) $\sin\dfrac{x}{2}$, 3) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$,

4) $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, 5) $\cos\dfrac{x}{3}$, 6) $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$,

7) $\sin^3 x$, 8) $\cos^3\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

12.10. 1) $tg2x$, 2) $tg\dfrac{x}{3}$, 3) $tg\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$,

4) $\frac{1}{2}tg\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$, 5) $ctg\frac{x}{2}$, 6) $ctg4x$,

7) $\cos^2 x$, 8) $\frac{1}{\cos x}$.

12.11. 1) $\sin^2 x$, 2) $\cos^2 x$, 3) $\sin(4\pi x+2)$,

4) $tg\frac{\pi x}{3}$, 5) $|\sin x|$, 6) $|\sin 2x|$,

7) $|tgx|$, 8) $\sin ax$, 9) $\cos ax$,

10) $tgax$.

12.12. დაადგინეთ, შესაძლებელია თუ არა ერთდროულად ადგილი ჰქონდეს შემდეგ ტოლობებს:

1) $\sin\alpha=-\frac{12}{13},\ \cos\alpha=\frac{5}{13}$;

2) $\sin\alpha=\frac{24}{25},\ \cos\alpha=\frac{-8}{25}$;

3) $\sin\alpha=-\frac{3}{5},\ \cos\alpha=\frac{4}{5}$ და $tg\alpha=-\frac{3}{4}$;

4) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\alpha=-\frac{1}{2}$ და $tg\alpha=-\sqrt{3}$;

5) $\sin\alpha=\frac{1}{3},\ tg\alpha=2$; 6) $\cos\alpha=-\frac{1}{4},\ tg\alpha=6$.

გამოთვალეთ α არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები, თუ (№№12.13; 12.14):

12.13. 1) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ და $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; 2) $\sin\alpha=-\frac{9}{41}$ და $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$;

3) $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$ და $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

4) $\cos\alpha=-0{,}8$ და $180^\circ<\alpha<270^\circ$.

12.14. 1) $tg\alpha=-1$ და $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; 2) $tg\alpha=\frac{3}{4}$ და $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$;

3) $ctg\alpha=-\sqrt{3}$ და $270^\circ<\alpha<360^\circ$;

4) $ctg\alpha=1$ და $180^\circ<\alpha<270^\circ$.

12.15. 1) იპოვეთ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ და $ctg\alpha$, თუ ცნობილია, რომ $tg\alpha=3$ და α პირველ მეოთხედში არ ძევს.

2) გამოთვალეთ $\cos\alpha$, თუ $315^\circ < \alpha < 360^\circ$ და $2tg^2\alpha + 3tg\alpha + 1 = 0$.

გაამარტივეთ გამოსახულებები (№№12.16-12.18):

12.16. 1) $\cos 11^\circ tg 11^\circ + \sin 11^\circ$; 2) $\sin 42^\circ ctg 42^\circ - \cos 42^\circ$;

3) $\cos^2 76^\circ tg^2 76^\circ + \sin^2 76^\circ ctg^2 76^\circ$; 4) $\cos\alpha tg\alpha - \sin\alpha$;

5) $\cos\alpha - \sin\alpha ctg\alpha$; 6) $\dfrac{1}{tg^2 17^\circ + 1} + \dfrac{1}{ctg^2 17^\circ + 1}$;

7) $\dfrac{tg\alpha + tg\beta}{ctg\alpha + ctg\beta}$; 8) $\dfrac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta} \cdot ctg\beta$.

12.17. 1) $\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right) ctg^2\alpha$; 2) $\dfrac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} \cdot ctg\beta \cdot tg\alpha + 1$;

3) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta - \cos^2\beta - \cos^2\alpha$;

4) $1 + tg^2\alpha - tg^2\alpha(\cos^2\alpha + 1)$; 5) $(1 - \sin^2\alpha)ctg^2\alpha - 1 - ctg^2\alpha$;

6) $\dfrac{\sin^2\beta}{1 + \cos\beta}$; 7) $\dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$;

8) $\dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}\left(1 + \dfrac{(1 - \cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}\right)$.

12.18. 1) $tg\alpha + \dfrac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}$; 2) $ctg\alpha - \dfrac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}$;

3) $\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta} - ctg^2\alpha \cdot ctg^2\beta$;

4) $\sin^2\alpha(1 + ctg\alpha) + \cos^2\alpha(1 + tg\alpha) - 1$;

5) $\dfrac{\cos\alpha \cdot tg\alpha}{\sin^2\alpha} - ctg\alpha \cdot \cos\alpha$; 6) $\sin^4\beta - \cos^4\beta + \cos^2\beta$;

7) $\sin^2\beta + \cos^4\beta - \sin^4\beta$; 8) $\cos^4\beta + \sin^2\beta \cdot \cos^2\beta + \sin^2\beta$.

დაამტკიცეთ იგივეობები (№№12.19; 12.20):

12.19. 1) $(tg\alpha + ctg\alpha)^2 - (tg\alpha - ctg\alpha)^2 = 4$;

2) $\dfrac{1 - \sin^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha} = \dfrac{1}{tg^2\alpha}$;

3) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

4) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$;

5) $\frac{tg\alpha+ctg\beta}{ctg\alpha+tg\beta}=\frac{tg\alpha}{tg\beta}$;

6) $(1-ctg\alpha)^2+(1+ctg\alpha)^2=\frac{2}{\sin^2\alpha}$.

12.20. 1) $\frac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=2tg^2\alpha$;

2) $\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha$;

3) $\sin^3\alpha(1+ctg\alpha)+\cos^3\alpha(1+tg\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha$;

4) $3(\sin^4\beta+\cos^4\beta)-2(\sin^6\beta+\cos^6\beta)=1$;

5) $1+\frac{2}{tg\alpha+ctg\alpha}=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$;

6) $\frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\cdot\frac{1+ctg^2\alpha}{ctg^2\alpha}-tg^2\alpha=0$;

7) $tg^2\alpha-\sin^2\alpha=tg^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$;

8) $ctg^2\alpha-\cos^2\alpha=ctg^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$.

გამოთვალეთ (№№12.21; 12.22):

12.21. 1) $\sin 40^\circ\cos 50^\circ+\cos 40^\circ\sin 50^\circ$;

2) $\sin 70^\circ\cos 40^\circ-\cos 70^\circ\sin 40^\circ$;

3) $\cos\frac{7}{10}\pi\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{7}{10}\pi\sin\frac{\pi}{5}$;

4) $\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{8\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}$;

5) $\sin 50^\circ\cdot\cos 28^\circ-\cos 50^\circ\sin 28^\circ-\sin 22^\circ$;

6) $\cos 72^\circ\cos 22^\circ+\sin 72^\circ\cdot\sin 22^\circ-\cos 50^\circ$;

7) $\sin(10^\circ+\alpha)\cdot\cos(20^\circ-\alpha)+\cos(10^\circ+\alpha)\cdot\sin(20^\circ-\alpha)$;

8) $\cos(50^\circ+\alpha)\cdot\cos(20^\circ+\alpha)+\sin(50^\circ+\alpha)\cdot\sin(20^\circ+\alpha)$.

12.22. 1) $\sin 36^\circ\cos 6^\circ-\cos 36^\circ\sin 6^\circ$;

2) $2\sqrt{3}\left(\sin 21^\circ\cos 39^\circ+\cos 21^\circ\sin 39^\circ\right)$;

3) $\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\sin 10^\circ\cos 20^\circ$;

4) $\sin 21^\circ \cos 9^\circ + \sin 9^\circ \cos 21^\circ$.

გამოთვალეთ (№№12.23; 12.24):

12.23. 1) $\dfrac{tg 20^\circ + tg 25^\circ}{1 - tg 20^\circ \cdot tg 25^\circ}$; 2) $\dfrac{tg 70^\circ - tg 25^\circ}{tg 70^\circ \cdot tg 25^\circ + 1}$;

3) $\dfrac{tg 27^\circ + tg 33^\circ}{tg 27^\circ \cdot tg 33^\circ - 1}$; 4) $\dfrac{tg 65^\circ - tg 35^\circ}{1 + tg 65^\circ \cdot tg 35^\circ}$;

5) $\dfrac{tg 20^\circ - tg 80^\circ}{1 + tg 20^\circ tg 80^\circ}$; 6) $\dfrac{tg \frac{\pi}{9} + tg \frac{2\pi}{9}}{1 - tg \frac{\pi}{9} tg \frac{2\pi}{9}}$.

12.24. 1) $\cos 75^\circ$; 2) $tg 15^\circ$;

3) $\sin 105^\circ$; 4) $ctg 75^\circ$.

12.25. გაამარტივეთ გამოსახულებები:

1) $\dfrac{\sin 11^\circ \cdot \cos 15^\circ + \cos 11^\circ \cdot \sin 15^\circ}{\sin 18^\circ \cdot \cos 12^\circ + \cos 18^\circ \cdot \sin 12^\circ}$;

2) $\dfrac{\cos 65^\circ \cdot \cos 40^\circ + \sin 65^\circ \cdot \sin 40^\circ}{\sin 37^\circ \cdot \cos 12^\circ - \cos 37^\circ \cdot \sin 12^\circ}$;

3) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}$; 4) $\dfrac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}$.

5) $\dfrac{tg 4\alpha + tg 2\alpha}{1 - tg 4\alpha \cdot tg 2\alpha}$; 6) $\dfrac{tg 7\alpha - tg 3\alpha}{tg 7\alpha \cdot tg 3\alpha + 1}$.

დაამტკიცეთ იგივეობები (№№12.26-12.28):

12.26. 1) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cos\beta} = tg\alpha + tg\beta$; 2) $\dfrac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} = ctg\alpha \cdot ctg\beta - 1$;

3) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) - 2\sin\alpha \cdot \cos\beta}{2\sin\alpha \cdot \sin\beta + \cos(\alpha + \beta)} = tg(\beta - \alpha)$;

4) $\dfrac{2\sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - 2\sin\alpha \cdot \sin\beta} = tg(\alpha + \beta)$.

12.27. 1) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sqrt{2}\cos\alpha} = 1$;

2) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\dfrac{\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)}{2\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}=ctg^2\alpha\cdot ctg^2\beta+1$;

4) $\dfrac{1}{2}\left(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha\right)=\sin\left(30^\circ+\alpha\right)$;

5) $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha-60^\circ\right)$;

6) $\cos^2\alpha+\cos^2\left(60^\circ+\alpha\right)+\cos^2\left(60^\circ-\alpha\right)=\dfrac{3}{2}$.

12.28. 1) $tg\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}$; 2) $\dfrac{tg\alpha+tg\left(45^\circ-\alpha\right)}{1-tg\alpha tg\left(45^\circ-\alpha\right)}=1$;

3) $\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{tg(\alpha+\beta)}-\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{tg(\alpha-\beta)}=-2tg\alpha tg\beta$;

4) $tg\alpha\cdot tg\beta+(tg\alpha+tg\beta)\cdot ctg(\alpha+\beta)=1$;

5) $\dfrac{1+tg\alpha\cdot tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$;

6) $\dfrac{tg^2\alpha-tg^2\beta}{1-tg^2\alpha\cdot tg^2\beta}=tg(\alpha+\beta)\cdot tg(\alpha-\beta)$;

7) $tg\left(45^\circ+\alpha\right)-tg\alpha=1+tg\left(45^\circ+\alpha\right)\cdot tg\alpha$;

8) $tg(\alpha+\beta)-tg\alpha-tg\beta=tg(\alpha+\beta)\cdot tg\alpha\cdot tg\beta$.

12.29. 1) იპოვეთ $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$, თუ $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$ და $\pi<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi$;

2) იპოვეთ $\sin\left(\alpha-30^\circ\right)$, თუ $\sin\alpha=\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ და $90^\circ<\alpha<180^\circ$;

3) იპოვეთ $\cos(\alpha+\beta)$ და $\cos(\alpha-\beta)$, თუ $\cos\alpha=0{,}6$,

$\cos\beta=\dfrac{5}{13}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ და $\dfrac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$;

4) იპოვეთ $\sin(\alpha\pm\beta)$ და $\cos(\alpha\pm\beta)$, თუ $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$,

$\sin\beta=\dfrac{12}{13}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ და $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$;

5) იპოვეთ $\cos(\alpha+\beta)$, თუ $tg\alpha=4$, $ctg\beta=-3$,

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \quad \text{და} \quad \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi \quad ;$$

6) იპოვეთ $\sin(\alpha+\beta)$, თუ $tg\alpha = -\frac{2}{3}$, $\cos\beta = -\frac{1}{3}$,

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad \text{და} \quad \pi < \beta < \frac{3}{2}\pi .$$

12.30. 1) იპოვეთ $tg(\alpha+\beta)$, თუ $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ \quad \text{და} \quad 90^\circ < \beta < 180^\circ ;$$

2) იპოვეთ $ctg(\alpha+\beta)$, თუ $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$,

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad \text{და} \quad \frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi ;$$

3) იპოვეთ $tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}$, თუ $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{5}$, $\cos\frac{\beta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$180^\circ < \alpha < 360^\circ \quad \text{და} \quad 360^\circ < \beta < 540^\circ ;$$

4) იპოვეთ $ctg\,\frac{\alpha-\beta}{2}$, თუ $\sin\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{9}$, $\sin\frac{\beta}{2} = -\frac{2}{3}$,

$$360^\circ < \alpha < 540^\circ \quad \text{და} \quad 540^\circ < \beta < 720^\circ .$$

12.31. 1) იპოვეთ $\sin\alpha$, თუ $\sin(45^\circ - \alpha) = -\frac{2}{3}$ და $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

2) იპოვეთ $\cos\beta$, თუ $\cos\alpha = \frac{1}{7}$, $\cos(\alpha+\beta) = -\frac{11}{14}$,

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \text{და} \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2} ;$$

3) იპოვეთ $\sin(61^\circ + \alpha)$, თუ $\sin(1^\circ + \alpha) = \frac{3}{5}$, $90^\circ < \alpha < 170^\circ$;

4) იპოვეთ $\cos(87^\circ + \alpha)$, თუ $\cos(27^\circ + \alpha) = -\frac{1}{7}$,

$$90^\circ < \alpha < 150^\circ .$$

12.32. 1) დაამტკიცეთ, რომ $\alpha + \beta = 90^\circ$, თუ $\sin\alpha = \frac{8}{17}$,

$$\sin\beta = \frac{15}{17} \quad \text{და} \quad 0^\circ < \alpha < 90^\circ \quad \text{და} \quad 0^\circ < \beta < 90^\circ ;$$

2) დაამტკიცეთ, რომ $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, თუ $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$,

$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \text{და} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

გამოთვალეთ დაყვანის ფორმულებით (№№12.33; 12.34):

12.33. 1) $\sin 120^\circ$, $\cos 150^\circ$, $tg 135^\circ$, $ctg 120^\circ$;

2) $\sin 225^\circ$, $tg 210^\circ$, $\sin(-240^\circ)$, $\cos(-210^\circ)$.

12.34. 1) $\sin(-300^\circ) + \cos(-225^\circ) + tg(-330^\circ) + ctg(-240^\circ)$;

2) $\sin^2 120^\circ + \cos^2 150^\circ + tg^2 210^\circ - ctg^2 225^\circ$;

3) $\sin^2(-330^\circ) - \cos^2(-120^\circ) - tg^2(-240^\circ) + ctg^2(-330^\circ)$;

4) $4\sin 330^\circ \cdot \cos(-240^\circ) \cdot tg 120^\circ - 2\cos 150^\circ \cdot tg(-315^\circ)$.

12.35. დაიყვანეთ 45°-ზე ნაკლები დადებითი კუთხის ფუნქციებამდე:

1) $\sin 86^\circ$, $\cos 55^\circ$, $tg 73^\circ$, $ctg 47^\circ$;

2) $\sin 175^\circ$, $\cos 103^\circ$, $tg 159^\circ$, $ctg 188^\circ$;

3) $\sin 560^\circ$, $\cos 846^\circ$, $tg 758^\circ$, $ctg 1000^\circ$;

4) $\sin(-310^\circ)$, $\cos(-500^\circ)$, $tg(-405^\circ)$, $ctg(-820^\circ)$.

12.36. დაიყვანეთ იმ კუთხის ფუნქციებამდე, რომელიც მოთავსებულია $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ შუალედში:

1) $\sin 0{,}7\pi$, $\cos 3{,}2\pi$, $tg 4{,}8\pi$, $ctg 2{,}9\pi$;

2) $\sin(-2{,}1\pi)$, $\cos 3{,}4\pi$, $tg(-17{,}1\pi)$, $ctg(-39{,}2\pi)$.

გამოთვალეთ (№№12.37-12.39):

12.37. 1) $\dfrac{4\cos 330^\circ - 3tg 330^\circ}{6tg 210^\circ - 4\sin 240^\circ}$; 2) $\dfrac{3tg 840^\circ + 4\cos 870^\circ}{2\sin 510^\circ}$;

3) $\dfrac{7\cos\frac{7\pi}{3} - 5\sin\frac{17\pi}{6}}{tg\frac{9\pi}{4}}$; 4) $\dfrac{tg\frac{20\pi}{3} + 2\cos\frac{19\pi}{6}}{\sin\frac{25\pi}{6}}$.

12.38. 1) $\sin(180^\circ - \alpha) + \cos(90^\circ + \alpha) - tg(360^\circ - \alpha) + ctg(270^\circ - \alpha)$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha) + tg(\pi - \alpha) - ctg\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$;

3) $\sin^2(180^\circ-\alpha)+\sin^2(270^\circ-\alpha)+tg(90^\circ+\alpha)\cdot ctg(360^\circ-\alpha)$;

4) $\dfrac{\cos^2(360^\circ-\alpha)+\sin^2(270^\circ-\alpha)}{tg^2(90^\circ+\alpha)\cdot ctg^2(270^\circ+\alpha)}$;

5) $3tg200^\circ-2\sin(-80^\circ)+ctg290^\circ+\cos(-10^\circ)$;

6) $\sin160^\circ\cdot\cos110^\circ+\sin250^\circ\cdot\cos340^\circ+tg110^\circ\cdot tg340^\circ$.

12.39. 1) $\dfrac{\cos304^\circ\cdot tg416^\circ-tg214^\circ\cdot tg(-56^\circ)}{ctg214^\circ+\cos326^\circ\cdot ctg(-56^\circ)}$;

2) $\dfrac{tg(270^\circ-\alpha)\cdot\sin130^\circ\cdot\cos320^\circ\cdot\sin270^\circ}{ctg(180^\circ-\alpha)\cdot\cos50^\circ\cdot\sin220^\circ\cdot\cos360^\circ}$;

3) $\sin(\alpha-90^\circ)+\cos(\alpha-180^\circ)-tg(\alpha-270^\circ)+ctg(360^\circ-\alpha)$;

4) $tg^2(\alpha-180^\circ)\cdot ctg(\alpha-360^\circ)+\sin^2(\alpha+180^\circ)+\sin^2(270^\circ-\alpha)$;

5) $\dfrac{\sin^3(\alpha-270^\circ)\cdot\cos(360^\circ-\alpha)}{tg^3(\alpha-90^\circ)\cdot\cos^3(\alpha-270^\circ)}$;

6) $\dfrac{tg(180^\circ-\alpha)\cos(180^\circ-\alpha)tg(90^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ+\alpha)ctg(90^\circ+\alpha)tg(90^\circ+\alpha)}$.

12.40. დაამტკიცეთ იგივეობები:

1) $\sin(45^\circ+\alpha)=\cos(45^\circ-\alpha)$; 2) $\cos(45^\circ+\alpha)=\sin(45^\circ-\alpha)$;

3) $tg(45^\circ+\alpha)=ctg(45^\circ-\alpha)$; 4) $\sin(150^\circ+\alpha)=\sin(30^\circ-\alpha)$;

5) $\dfrac{\sin(360^\circ-\alpha)tg(90^\circ+\alpha)\cdot ctg(270^\circ-\alpha)}{\cos(360^\circ+\alpha)\cdot tg(180^\circ+\alpha)}=1$;

6) $\dfrac{tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\cdot\cos(-\alpha)}{ctg(\pi-\alpha)\cdot\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}=\sin\alpha$;

7) $tg41^\circ tg42^\circ tg43^\circ tg47^\circ tg48^\circ tg49^\circ=1$;

8) $tg10^\circ tg20^\circ tg30^\circ tg40^\circ tg50^\circ tg60^\circ tg70^\circ tg80^\circ=1$.

გამოთვალეთ (№№12.41; 12.42):

12.41. 1) $tg\dfrac{270^\circ-\alpha+\beta}{3}$, თუ $\cos\dfrac{\alpha}{3}=-\dfrac{1}{8}$, $\cos\dfrac{\beta}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$,

$270^\circ<\alpha<540^\circ$, $810^\circ<\beta<1080^\circ$;

2) $tg\dfrac{360^\circ-\alpha-\beta}{4}$, თუ $\cos\dfrac{\alpha}{4}=\dfrac{1}{2}$, $\sin\dfrac{\beta}{4}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$1080^\circ<\alpha<1440^\circ$, $720^\circ<\beta<1080^\circ$.

12.42. 1) $\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ$; 2) $6\sin 15^\circ\cdot\sin 75^\circ$;

3) $\cos^2 15^\circ-\cos^2 75^\circ$; 4) $2\cos^2\dfrac{\pi}{8}-1$;

5) $1-2\sin^2 15^\circ$; 6) $\dfrac{tg15^\circ}{1-tg^2 15^\circ}$;

7) $\dfrac{1-tg^2\dfrac{\pi}{8}}{tg\dfrac{\pi}{8}}$; 8) $\dfrac{1-tg^2 75^\circ}{1+tg^2 75^\circ}$;

9) $\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8}$; 10) $\left(\cos 165^\circ-\cos 105^\circ\right)^2$.

გაამარტივეთ (№№12.43-12.45):

12.43. 1) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha$; 2) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$;

3) $1-2\sin^2\alpha$; 4) $2\cos^2\alpha-1$;

5) $\cos 4\alpha+2\sin^2 2\alpha$; 6) $\cos^2\alpha-4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$;

7) $1-8\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$; 8) $\left(\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha\right)^2$.

12.44. 1) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1+\sin 2\alpha}$; 2) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$;

3) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$; 4) $\dfrac{2ctg\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}-\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

12.45. 1) $\dfrac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$; 2) $\dfrac{ctg\alpha-tg\alpha}{\cos 2\alpha}$;

3) $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)$;

4) $\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha+\sin^4\alpha$.

12.46. დაამტკიცეთ იგივეობები:

1) $\dfrac{2ctg\alpha}{1+ctg^2\alpha}=\sin 2\alpha$; 2) $\dfrac{ctg\dfrac{\alpha}{2}-tg\dfrac{\alpha}{2}}{ctg\dfrac{\alpha}{2}+tg\dfrac{\alpha}{2}}=\cos\alpha$;

3) $\dfrac{tg\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg\dfrac{\alpha}{2}}+\dfrac{tg\dfrac{\alpha}{2}}{1-tg\dfrac{\alpha}{2}}=tg\alpha$; 4) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$.

12.47. გამოთვალეთ:

1) $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ და $tg2\alpha$, თუ $\sin\alpha=0{,}6$, $0<\alpha<90^\circ$;

2) $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ და $tg2\alpha$, თუ $\cos\alpha=-\dfrac{5}{13}$, $\sin\alpha>0$;

3) $tg2\alpha$, თუ $tg\alpha=\dfrac{1}{5}$;

4) $tg(2\alpha+\beta)$, თუ $tg\alpha=\dfrac{1}{3}$, $tg\beta=\dfrac{1}{4}$;

5) $\cos\left(2\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)$, თუ $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\cos\dfrac{\beta}{2}=-\dfrac{3}{5}$,

$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$;

6) $\sin(2\alpha+\beta)$, თუ $\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$, $\sin\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{3}{5}$,

$0<\alpha<90^\circ$, $0<\beta<180^\circ$.

12.48. 1) $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$ და $tg3\alpha$ გამოსახეთ შესაბამისად $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ და $tg\alpha$ -თი;

2) იპოვეთ $\sin 3\alpha$ და $\cos 3\alpha$, თუ $\sin\alpha=0{,}6$, $0<\alpha<90^\circ$.

12.49. გამოთვალეთ:

1) $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$ და $tg15^\circ$;

2) $\sin 22^\circ 30'$, $\cos 22^\circ 30'$ და $tg22^\circ 30'$;

3) $\sin 75^\circ$, $\cos 75^\circ$ და $tg75^\circ$;

4) $\sin 67^\circ 30'$, $\cos 67^\circ 30'$ და $tg67^\circ 30'$.

გაამარტივეთ (№№12.50; 12.51):

12.50. 1) $1+\cos 2\alpha$; 2) $1+\cos 40^\circ$;

3) $\cos\alpha-1$; 4) $\cos 32^\circ-1$;

5) $\dfrac{1-\cos 50^\circ}{\cos 40^\circ}$; 6) $\dfrac{1+\cos(\alpha-\beta)}{1-\cos(\alpha-\beta)}$.

12.51. 1) $2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos\alpha$; 2) $\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}tg^2\dfrac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha$;

3) $\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}-tg^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$; 4) $1+tg^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

დაამტკიცეთ იგივეობები (№№12.52; 12.53):

12.52. 1) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)$; 2) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)$;

3) $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=tg\dfrac{\alpha}{2}$; 4) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=tg\dfrac{\alpha}{2}$;

5) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=tg\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$; 6) $\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=tg^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

12.53. 1) $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=tg^2\dfrac{\alpha}{2}$; 2) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=tg\dfrac{\alpha}{2}$;

3) $tg\dfrac{\alpha}{2}=ctg\dfrac{\alpha}{2}-2ctg\alpha$; 4) $\sin\alpha-tg\dfrac{\alpha}{2}=\cos\alpha\cdot tg\dfrac{\alpha}{2}$.

12.54. იპოვეთ $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$ და $tg\dfrac{\alpha}{2}$, თუ:

1) $\cos\alpha=-\dfrac{12}{13}$ და $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$;

2) $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$ და $270^\circ<\alpha<360^\circ$;

3) $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$ და $180^\circ<\alpha<270^\circ$;

4) $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ და $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

გამოთვალეთ (№№12.55-12.58):

12.55. 1) $\sin\alpha$, თუ $\sin 2\alpha=0{,}96$ და $1125^\circ<\alpha<1170^\circ$;

2) $tg\frac{\alpha}{4}$, თუ $\sin\frac{\alpha}{2}=-0,8$ და $360^\circ<\alpha<540^\circ$;

3) $\sin\alpha$, თუ $tg2\alpha=\sqrt{35}$ და $540^\circ<2\alpha<630^\circ$;

4) $tg\frac{\alpha}{2}$, თუ $tg\alpha=\sqrt{24}$ და $900^\circ<\alpha<990^\circ$.

12.56. 1) $\cos(\alpha+\beta)$, თუ $\cos 2\alpha=-\frac{1}{2}$, $\cos 2\beta=-\frac{1}{4}$ და $90^\circ<2\alpha<135^\circ$, $180^\circ<2\beta<270^\circ$;

2) $\sin(\alpha+\beta)$, თუ $\cos 2\alpha=-\frac{1}{5}$, $\cos 2\beta=\frac{1}{10}$ და $180^\circ<2\alpha<270^\circ$, $360^\circ<2\beta<450^\circ$.

12.57. 1) $\cos\frac{\alpha}{8}$, თუ $\sin\frac{\alpha}{2}=-0,6$ და $540^\circ<\alpha<720^\circ$;

2) $\sin\alpha$, თუ $tg4\alpha=\sqrt{15}$ და $180^\circ<2\alpha<224^\circ$.

12.58. 1) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ და $tg\alpha$, თუ $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{3}$;

2) $\frac{\sin\alpha}{2-3\cos\alpha}$, თუ $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$;

3) $\frac{tg\alpha-\sin\alpha}{tg\alpha+\sin\alpha}$, თუ $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{15}$;

4) $\frac{3tg\alpha-5\sin\alpha}{4ctg\alpha+5\cos\alpha}$, თუ $ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$.

წარმოადგინეთ ნამრავლი ჯამად (№№12.59; 12.60):

12.59. 1) $\cos 20^\circ\cdot\cos 10^\circ$; 2) $\cos\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{5}$;

3) $\sin 40^\circ\cdot\sin 4^\circ$; 4) $\sin\frac{\pi}{5}\cdot\sin\frac{\pi}{8}$;

5) $\sin 12^\circ\cdot\cos 42^\circ$; 6) $\sin\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{8}$.

12.60. 1) $\sin 5\alpha\cdot\sin 3\alpha$; 2) $\sin 4\alpha\cdot\cos 2\alpha$;

3) $2\sin 40^\circ\cdot\cos 10^\circ\cdot\cos 8^\circ$; 4) $4\cos\alpha\cdot\cos 3\alpha\cdot\cos 4\alpha$.

წარმოადგინეთ ნამრავლად (№№12.61-12.68):

12.61. 1) $\cos 50^\circ + \cos 20^\circ$; 2) $\sin 26^\circ + \sin 14^\circ$;

3) $\sin 73^\circ - \sin 36^\circ$; 4) $\cos\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{12}$;

5) $tg12^\circ + tg32^\circ$; 6) $tg\frac{7\pi}{8} - tg\frac{5\pi}{8}$.

12.62. 1) $\sin 4\alpha + \sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha - \cos 6\alpha$;

3) $tg\alpha + tg3\alpha$; 4) $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$;

5) $\sin(40^\circ + \alpha) - \sin(40^\circ - \alpha)$; 6) $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$.

12.63. 1) $\sin\alpha + \cos\alpha$; 2) $\sin\alpha - \cos\alpha$.

12.64. 1) $\dfrac{\sin 5\alpha + \sin\alpha}{\sin 5\alpha - \sin\alpha}$; 2) $\dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}$;

3) $\dfrac{\sin 7\alpha - \sin 5\alpha}{\sin 7\alpha + \sin 5\alpha}$; 4) $\dfrac{\cos 6\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 4\alpha}$.

12.65. 1) $\sin 10^\circ + \sin 11^\circ + \sin 15^\circ + \sin 16^\circ$;

2) $\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 2\alpha + \sin 4\alpha$;

3) $\cos 31^\circ + \cos 13^\circ + \cos 8^\circ + \cos 36^\circ$;

4) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha$.

12.66. 1) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha$; 2) $1 - \cos\alpha + \sin\alpha$;

3) $\dfrac{1 - 2\cos\alpha + \cos 2\alpha}{1 + 2\cos\alpha + \cos 2\alpha}$; 4) $\dfrac{1 - 2\sin\alpha - \cos 2\alpha}{1 + 2\sin\alpha - \cos 2\alpha}$.

12.67. 1) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$; 2) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)$;

3) $\sin(5\alpha+\beta) + \sin(3\alpha+\beta) + \sin 2\alpha$;

4) $tg\alpha + tg2\alpha - tg3\alpha$.

12.68. 1) $1 + 2\cos\alpha$; 2) $1 - 2\cos\alpha$;

3) $1 + 2\sin 2\beta$; 4) $\sqrt{2} + 2\cos\alpha$;

5) $1 + \sqrt{2}\cos\alpha$; 6) $\sqrt{2}\sin\alpha - 1$;

7) $1 - 4\sin^2\alpha$; 8) $3 - 4\cos^2\alpha$.

12.69. 1) მოცემულია ფუნქცია $f(x) = \sin x + \cos x$. დაამტკიცეთ, რომ $f\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ლუწი ფუნქციაა.

2) მოცემულია ფუნქცია $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$. დაამტკიცეთ, რომ $f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ ლუწი ფუნქციაა.

დაამტკიცეთ იგივეობები (№№12.70-12.73):

12.70. 1) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=tg\frac{\alpha+\beta}{2}$; 2) $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}=-ctg\frac{\beta+\alpha}{2}$;

3) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$;

4) $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$;

5) $\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha}=tg2\alpha$; 6) $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=tg\left(45^\circ+\alpha\right)$.

12.71. 1) $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}=tg\alpha\cdot ctg\beta$;

2) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}=ctg\alpha\cdot ctg\beta$;

3) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$;

4) $\cos^2\alpha-\cos^2\beta=-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$;

5) $4\sin^2\alpha-3=4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$;

6) $4\cos^2\alpha-1=4\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

12.72. 1) $\frac{\sin\alpha-2\sin2\alpha+\sin3\alpha}{\cos\alpha-2\cos2\alpha+\cos3\alpha}=tg2\alpha$;

2) $\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha}=tg3\alpha$;

3) $\frac{\cos\alpha-\cos3\alpha+\cos5\alpha-\cos7\alpha}{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha+\sin7\alpha}=tg\alpha$;

4) $\frac{\sin^2\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha-4+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=tg^4\frac{\alpha}{2}$.

12.73. 1) $\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$, თუ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

2) $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=2\sin\frac{\alpha}{2}$, თუ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

3) $(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$;

4) $(\sin 2\alpha+\sin 4\alpha)^2+(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)^2=4\cos^2\alpha$.

გამოთვალეთ (№№12.74-12.79):

12.74. 1) $\frac{\sin 40^\circ \sin 50^\circ}{\cos 10^\circ}$; 2) $\frac{\sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{4\pi}{9}}$;

3) $\frac{\cos 40^\circ+\cos 20^\circ}{\sin 80^\circ}$; 4) $\frac{\sin 44^\circ}{\sin 76^\circ-\sin 16^\circ}$;

5) $\frac{\sin 75^\circ+\sin 15^\circ}{\sin 75^\circ-\sin 15^\circ}$; 6) $\sin 40^\circ+\sin 20^\circ-\sin 80^\circ$.

12.75. 1) $ctg\frac{\pi}{8}-tg\frac{\pi}{8}$; 2) $\frac{1}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin 15^\circ}$;

3) $\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$; 4) $\left(\frac{1}{\sin 15^\circ}-\frac{1}{\cos 15^\circ}\right)^2$;

5) $\cos 10^\circ(1+tg10^\circ tg5^\circ)$;

6) $\sqrt{2}\sin 40^\circ\cos 5^\circ(1+tg5^\circ\cdot ctg40^\circ)$.

12.76. 1) $8\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{13}{12}\pi\cos\frac{5}{6}\pi$; 2) $\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{11\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{4}$;

3) $\sin 75^\circ\cos 255^\circ\cos 330^\circ$; 4) $(2\sin 9^\circ\cos 36^\circ+\sin 27^\circ)^2$.

12.77. 1) $\sin 18^\circ\cos 36^\circ$; 2) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$;

3) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$;

4) $16\cdot\cos\frac{\pi}{33}\cos\frac{2\pi}{33}\cos\frac{4\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33}$;

5) $\cos 10^\circ\cdot\cos 30^\circ\cdot\cos 50^\circ\cdot\cos 70^\circ$;

6) $16\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 60^\circ\cdot\sin 80^\circ$;

7) $tg20^\circ\cdot tg40^\circ\cdot tg60^\circ\cdot tg80^\circ$; 8) $\sin^2 10^\circ\cdot\sin^2 50^\circ\cdot\sin^2 70^\circ$.

12.78. 1) $\dfrac{\left(\cos 4^\circ + \cos 2^\circ\right)^2 + \left(\sin 4^\circ + \sin 2^\circ\right)^2}{\sin 2^\circ ctg1^\circ}$;

2) $\dfrac{\sin^3 7^\circ \left(1 + ctg 7^\circ\right) + \cos^3 7^\circ \left(1 + tg 7^\circ\right)}{\sin 7^\circ + \cos 7^\circ}$;

3) $\dfrac{4 - 3\sin^2 20^\circ}{\sin^6 10^\circ + \cos^6 10^\circ}$; 4) $\dfrac{4\sqrt{3}\cos 10^\circ}{\cos^2 20^\circ - \sin^2 10^\circ}$;

5) $4\cos^2 40^\circ - \sqrt{4\sin^4 10^\circ + \sin^2 20^\circ}$;

6) $\cos^2 3^\circ + \cos^2 1^\circ - \cos 4^\circ \cdot \cos 2^\circ$.

12.79. 1) $\dfrac{\sin 51^\circ - \sin 28^\circ \cos^3 23^\circ - \cos 28^\circ \sin^3 23^\circ}{tg^2 30^\circ \cos 23^\circ \sin 23^\circ \cos 5^\circ}$;

2) $\dfrac{\sin 32^\circ + \sin 28^\circ}{\sqrt{2\left(\sin 47^\circ + \sin 43^\circ\right)}}$; 3) $\dfrac{\cos 10^\circ \cdot \cos 25^\circ \cdot \cos 55^\circ}{\sin 20^\circ + \sin 50^\circ + \sin 110^\circ}$;

4) $\dfrac{\sin 35^\circ \cdot \sin 70^\circ \cdot \cos 75^\circ}{1 - \cos 70^\circ - \cos 140^\circ + \cos 150^\circ}$;

5) $\sin^2 \dfrac{\pi}{8} + \cos^2 \dfrac{3\pi}{8} + \sin^2 \dfrac{5\pi}{8} + \cos^2 \dfrac{7\pi}{8}$;

6) $\sin^4 \dfrac{\pi}{8} + \cos^4 \dfrac{3\pi}{8} + \sin^4 \dfrac{5\pi}{8} + \cos^4 \dfrac{7\pi}{8}$.

12.80. დაამტკიცეთ იგივეობა:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha - \sin 3\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 3\alpha + \cos 4\alpha} = tg 3\alpha$;

2) $\dfrac{1 - 2\sin^2 \alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \dfrac{1 - tg\alpha}{1 + tg\alpha}$;

3) $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 1 - 2\sin^2 2\alpha} = 2\sin \alpha$;

4) $\dfrac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \dfrac{2}{3}$.

გაამარტივეთ და გამოთვალეთ (№№12.81-12.89):

12.81. 1) $\dfrac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$, თუ $tg\alpha = 2$; 2) $\dfrac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha}$, თუ $\cos \alpha = \dfrac{1}{4}$;

3) $\left(\sin \alpha - \cos \alpha\right)^2$, თუ $\sin 2\alpha = -\dfrac{1}{3}$;

4) $\dfrac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}$, თუ $tg\alpha=2$.

12.82. 1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, თუ $tg\alpha=2$ და $tg\beta=3$;

2) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, თუ $tg\alpha=3$ და $tg\beta=2$;

3) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\sin\beta}$, თუ $tg\alpha=2$ და $tg\beta=3$;

4) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}$, თუ $tg\alpha=2$ და $tg\beta=3$.

12.83. 1) $\sin\alpha\cos\alpha\cos2\alpha$, თუ $\sin4\alpha=\dfrac{1}{4}$;

2) $2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\sin^2\dfrac{\alpha}{2}-\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$, თუ $\sin2\alpha=\dfrac{1}{3}$;

3) $3\cdot\left(\cos^2\alpha-4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$, თუ $\cos2\alpha=\dfrac{3}{4}$;

4) $\sin(45^\circ+\alpha)\sin(45^\circ-\alpha)$, თუ $\cos2\alpha=\dfrac{1}{3}$.

12.84. 1) $4\left(\dfrac{1+\cos2\alpha}{1-\cos2\alpha}\cdot tg^2\alpha-\cos^2\alpha\right)$, თუ $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$;

2) $16\cdot\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$, თუ $tg\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$;

3) $\dfrac{1-2\cos\alpha+\cos2\alpha}{1+2\cos\alpha+\cos2\alpha}$, თუ $tg\dfrac{\alpha}{2}=2$;

4) $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2$, თუ $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

12.85. 1) $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$, თუ $tg(45^\circ+\alpha)=3$;

2) $\dfrac{\sin\alpha-2\sin2\alpha+\sin3\alpha}{\cos\alpha-2\cos2\alpha+\cos3\alpha}$, თუ $tg2\alpha=5$;

3) $\dfrac{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha}{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha}$, თუ $tg3\alpha=4$;

4) $\dfrac{\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha-4\cos^2\alpha}$, თუ $tg\alpha=\sqrt{2}$.

12.86. 1) $\cos^4\alpha-6\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^4\alpha$, თუ $\cos 4\alpha=\dfrac{1}{3}$;

2) $\dfrac{\left(2\cos^2\alpha-1\right)\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha\left(\sin^2 2\alpha+\cos 4\alpha\right)}$, თუ $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$;

3) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}$, თუ $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$;

4) $\dfrac{\cos^2(7\pi+\alpha)-4\cos^2(7{,}5\pi+\alpha)}{\cos^2(9\pi-\alpha)}$, თუ $tg\alpha=3$.

12.87. 1) $1-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos 2\alpha-\cos^4\alpha$, თუ $\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$;

2) $\dfrac{2\cos\alpha-\cos 3\alpha-\cos 5\alpha}{\sin^2 2\alpha}$, თუ $\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$;

3) $\dfrac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha-\cos 3\alpha}{(\cos\alpha-\cos 2\alpha)\sin\alpha}$, თუ $tg\alpha=4$;

4) $\dfrac{3+10tg\alpha+3tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$, თუ $\sin 2\alpha=\dfrac{1}{5}$;

5) $\dfrac{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}$, თუ $tg\alpha=\sqrt{5}$;

6) $\dfrac{2\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right)+1}{\cos\alpha\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)}$, თუ $\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$.

12.88. 1) $\dfrac{(1+tg\alpha)^2}{1+\sin 2\alpha}$, თუ $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$;

2) $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{(1-tg\alpha)^2}$, თუ $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

3) $\dfrac{(1-ctg\alpha)^2}{1-\sin 2\alpha}$, თუ $\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$;

4) $\dfrac{(1+\cos 2\alpha)(1-\sin 2\alpha)}{(1-tg\alpha)^2}$, თუ $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$;

5) $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{(1-\cos 2\alpha)(1-tg\alpha)^2}$, თუ $tg\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{8}}$;

6) $\dfrac{(1+\cos 2\alpha)(1-\sin 2\alpha)}{(1-ctg\alpha)^2}$, თუ $\sin 2\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

12.89. 1) $\dfrac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha-\cos 3\alpha}{(\cos\alpha-\cos 2\alpha)\sin\alpha}$, თუ $ctg\alpha=13{,}5$;

2) $\dfrac{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha-\cos 7\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}$, თუ $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, $(0<\alpha<90^\circ)$;

3) $\dfrac{\sin^2\alpha-4}{4\cos\alpha\left(\sin^6\dfrac{\alpha}{2}-\cos^6\dfrac{\alpha}{2}\right)}$, თუ $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$;

4) $\dfrac{\sin\alpha\sin\dfrac{11}{2}\alpha}{\sin 5\alpha+\sin 6\alpha-\sin 4\alpha-\sin 7\alpha}$, თუ $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{84}$.

გამოთვალეთ (12.90-12.93):

12.90. 1) $\sin 2\alpha$, თუ $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$;

2) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$, თუ $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{5}{4}$;

3) $\sin^3\dfrac{\alpha}{2}-\cos^3\dfrac{\alpha}{2}$, თუ $\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{5}{6}$;

4) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$, თუ $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$.

12.91. 1) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$, თუ $\cos\alpha+\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$;

2) $\cos^4\dfrac{\alpha}{4}+\cos^4\left(\dfrac{\alpha}{4}-\dfrac{\pi}{2}\right)$, თუ $\cos\dfrac{\alpha}{4}+\sin\dfrac{\alpha}{4}=\dfrac{1}{4}$;

3) $tg 2\alpha-tg\beta$, თუ $\sin(2\alpha+\beta)=5\sin(2\alpha-\beta)$ და $tg 2\alpha=4-tg\beta$;

4) $tg 2\alpha+tg\beta$, თუ $\sin(2\alpha-\beta)=4\sin(2\alpha+\beta)$ და $tg 2\alpha=6+tg\beta$;

5) $tg^2\alpha+ctg^2\alpha+\dfrac{2}{\sin 2\alpha}$, თუ $tg\alpha+ctg\alpha=6$;

6) $ctg^2 2\alpha+tg^2 2\alpha-\dfrac{2}{\cos(4\alpha-90^\circ)}$, თუ $tg 2\alpha-ctg(-2\alpha)=4$.

12.92. 1) $\arcsin 0+\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin 1$;

2) $\arcsin 0+\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin(-1)$;

3) $\arcsin 0+\arcsin(-1)+\arccos 1$;

4) $\arccos 0+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}+\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;

5) $5\arccos(-1)-12\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}-6\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

6) $arctg 0+arctg\frac{1}{\sqrt{3}}+arctg\sqrt{3}+arctg 1$;

7) $arcctg 0+arcctg\frac{1}{\sqrt{3}}+arcctg\sqrt{3}+arcctg 1$;

8) $arcctg 0+arcctg(-1)-arcctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-arcctg\left(-\sqrt{3}\right)$.

12.93. 1) $\sin(\arcsin 0{,}6)$; 2) $\cos\left[\arcsin\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right]$;

3) $\sin[\arcsin(-0{,}8)]$; 4) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$;

5) $\cos(\arccos 0{,}5)$; 6) $\sin\left[\arccos\left(\sqrt{2}-2\right)\right]$;

7) $\cos(\arccos 0{,}2)$; 8) $\sin\left[\arccos\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right]$;

9) $\arccos(\cos 6)$; 10) $arcctg(ctg 2)$;

11) $\arccos(\cos 1)$; 12) $arctg(tg 2)$.

§13. ტრიგონომეტრიული განტოლებები და უტოლობები

ამოხსენით განტოლებები (13.1-13.20):

13.1. 1) $\sin x=0$; 2) $\sin x=\frac{1}{2}$;

3) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

5) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\sin x = -1$;

7) $\sin 3x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; 8) $\sin \frac{x}{3} = 1$;

9) $\sin(5x + 30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; 10) $\sin\left(20^\circ - \frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

11) $\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 12) $\sin\left(\frac{3}{4}\pi - 4x\right) = -1$.

13.2. 1) $\cos x = 0$; 2) $\cos x = \frac{1}{2}$;

3) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

5) $\cos x = -\frac{1}{2}$; 6) $\cos x = -1$;

7) $\cos 5x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; 8) $\cos \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$;

9) $\cos(20^\circ - 5x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 10) $\cos\left(\frac{3}{2}x - 15^\circ\right) = -1$;

11) $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{18}\right) = 1$; 12) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

13.3. 1) $tgx = 0$; 2) $tgx = \sqrt{3}$;

3) $tgx = 1$; 4) $tgx = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

5) $tgx = -\sqrt{3}$; 6) $tgx = -1$;

7) $tg(2x + 60^\circ) = -1$; 8) $tg\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) = \sqrt{3}$;

9) $tg(45^\circ - 3x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 10) $tg\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$.

13.4. 1) $\sin^2 x - 2\sin x = 0$; 2) $2\cos^2 x = \cos x$;

3) $\sqrt{2}\sin^2 x = \sin x$; 4) $\sqrt{3}\cos x = 2\cos^2 x$;

5) $tg^2 x = 2tgx$; 6) $tg^3 x = tgx$;

7) $ctg^4 x + ctgx = 0$; 8) $ctg^2 x - \sqrt{3}ctgx = 0$;

9) $\sin^2 x - 1 = 2\cos x$; 10) $\sin x = 2 - 2\cos^2 x$.

13.5. 1) $\sin^2 x - 3 = 2\sin x$; 2) $\cos^2 x + \cos x = 2$;

3) $\sin x = 1 - 2\sin^2 x$; 4) $tg^2 x - 6tgx + 5 = 0$;

5) $2\sin^2 x + \left(2 - \sqrt{2}\right)\sin x - \sqrt{2} = 0$;

6) $tg^2 x + \left(\sqrt{3} - 1\right)tgx - \sqrt{3} = 0$.

13.6. 1) $2\cos^2 x = 3\sin x + 2$; 2) $2\sin^2 x = 3\cos x$;

3) $\sin^2 x = 1 + \cos^2 x$; 4) $2tgx + 3ctgx = 5$.

5) $\dfrac{3}{\cos^2 x} + 2 = 8tgx$ 6) $tg^2 x + 3ctg^2 x - 4 = 0$.

13.7. 1) $\sin 2x = \sin x$; 2) $\sin 2x = \cos x$;

3) $\sin x \cos x = 0{,}25$; 4) $\sin^2 x - \cos^2 x = 0{,}5$;

5) $\cos 2x = 2\sin^2 x$; 6) $\cos 2x = \cos x$;

7) $tg 2x = 3tgx$; 8) $tgx = tg 2x$.

13.8. 1) $\sin x + \cos\dfrac{x}{2} = 0$; 2) $\sin^4\dfrac{x}{2} - \cos^4\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}$;

3) $\cos 2x = 2\sin x - \dfrac{1}{2}$; 4) $\cos 2x = \cos x - \sin x$;

5) $\cos 2x = 1 + \sin x$; 6) $\cos 2x = 1 + \sin 2x$.

13.9. 1) $\cos\dfrac{x}{2} = 1 + \cos x$; 2) $2\sin\dfrac{x}{2} = 1 - \cos x$;

3) $2\sin^2\dfrac{x}{2} = 1 + \cos x$; 4) $2\cos^2\dfrac{x}{2} = 1 - \cos x$;

5) $1 + \cos x + \cos 2x = 0$; 6) $\sin x = 1 - \cos x$;

7) $\sqrt{3}\sin x = 1 + \cos x$; 8) $\sin 2x = \sqrt{3}\left(1 + \cos 2x\right)$.

13.10. 1) $\sin x = \cos x$; 2) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$;

3) $3\sin^2 x = \cos^2 x$; 4) $\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0$;

5) $3\sin^2 x + 3\cos^2 x = 4\sqrt{3}\sin x \cdot \cos x$;

6) $\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = 3\cos^2 x$;

7) $6\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 1$;

8) $1 - 4\cos^2 x = 2\sin x \cdot \cos x$;

9) $\sin^2 x - \cos^2 x = 0{,}5 - \sin x \cdot \cos x$;

10) $4\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 2$;

11) $2\sin^2 x = \sqrt{6}\sin 2x - 3\cos^2 x$;

12) $\cos^2 x + 3\sin^2 x = \sqrt{3}\sin 2x$;

13) $\sin 2x + 4\sin x \cdot \cos x = 3\sqrt{3}\cos 2x$;

14) $3\cos^2 x + \sin^2 x = \sqrt{3}\sin 2x$.

13.11. 1) $\sin 6x - \sin 4x = 0$; 2) $\cos 3x + \cos 7x = 0$;

3) $\sin 5x = \sin x$; 4) $\cos 2x = \cos x$;

5) $tg 4x = tgx$; 6) $tg 2x - tg 5x = 0$.

13.12. 1) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$; 2) $\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0$;

3) $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$;

4) $\sin 2x = \sin x + \sin 3x$;

5) $\sin 3x + \cos 5x - \sin 7x = 0$;

6) $\cos 2x + \sin 4x - \cos 6x = 0$.

13.13. 1) $\cos x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 7x$;

2) $\cos 2x \cdot \cos 4x = \cos 5x \cdot \cos x$;

3) $\sin 2x \cdot \sin 6x = \sin 3x \cdot \sin 5x$;

4) $\sin x \cdot \sin 3x = \sin 5x \cdot \sin 7x$;

5) $\cos 2x \cdot \sin 4x = \cos x \cdot \sin 5x$;

6) $\cos 3x \cdot \sin 7x = \cos 2x \cdot \sin 8x$.

13.14. 1) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$; 2) $\sin x + \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$; 4) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$;

5) $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 3$; 6) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = -2$.

13.15. 1) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;

2) $\cos x + \cos 3x = \cos 5x + \cos 7x$;

3) $\sin x + \sin 7x - \cos 5x + \cos(3x - 2\pi) = 0$;

4) $\sin 2x - \sin 3x + \sin 8x = \cos\left(7x + \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

13.16. 1) $tg 3x \cdot tgx = 1$; 2) $tg(2x-1) \cdot tg(3x+1) = 1$;

3) $(1 + \cos 4x) \cdot \sin 2x = \cos^2 2x$;

4) $\cos 4x + 2\sin^2 x = 0$; 5) $\cos x - 1 + 2\sin x tgx = 0$;

6) $2tgx \cdot \cos x + 1 = 2\cos x + tgx$.

13.17. 1) $\sin^4 x - 8\cos^2 x - 1 = 0$;

2) $2\sin^4 x - 7\sin^2 x + 3 = 0$;

3) $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{5}{8}$; 4) $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \sin 2x \cos 2x$.

13.18. 1) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 5x$;

2) $\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$;

3) $\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = 2\sin 5x$;

4) $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin 3x$.

13.19. 1) $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = \frac{3}{2}$;

2) $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2$;

3) $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{3}{2}x - \sin^2 2x - \sin^2 4x = 0$;

4) $\sin^2 x + \sin^2 3x + \frac{1}{2}\cos 6x = 1$.

13.20. 1) $\cos x - \sin x = \frac{1}{\cos x}$; 2) $\cos\frac{x}{2} + \sin x = 1 + 2\sin\frac{x}{2}$;

3) $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$;

4) $6\sin x - 2\cos x + 3tgx = 1$.

13.21. ამოხსენით განტოლება და იპოვეთ განტოლების უმცირესი დადებითი და უდიდესი უარყოფითი ამონახსნები:

1) $\sin 3x = \cos x$; 2) $\cos 7x - \sin x = 0$;

3) $4\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 1$;

4) $\sin^2 5x = \sqrt{3}\sin 10x - 3\cos^2 5x$;

5) $\frac{1 + tgx}{1 - tgx} = (\sin x + \cos x)^2$;

6) $1 + \sin 2x = \sin x + \cos x$.

13.22. ამოხსენით განტოლება და იპოვეთ მოცემულ შუალედში მოთავსებული ამონახსნი:

1) $\sin^2 x + \sin 2x = 3\cos^2 x$, $\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$;

2) $1 + \sin 2x = (\sin 3x - \cos 3x)^2$, $-\frac{\pi}{2} < x < 0$;

3) $\cos x - 1 + 2\sin x tgx = 0$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$;

4) $5\sqrt{3}\sin 2x - 6\cos^2 x = 6$, $405^\circ < x < 420^\circ$.

13.23. იპოვეთ a-ს ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც განტოლებას აქვს ამონახსნი:

1) $3\sin x + 4\cos x = a$; 2) $5\sin x + 2\cos x = a$;

3) $\sin^2 x-(a-3)\sin x-2a+2=0$; 4) $\cos 2x+a\sin x=2a-7$;

5) $\cos^4 x-(a+2)\cos^2 x-(a+3)=0$;

6) $\sin^4 x+(a-2)\cos^2 x-3a+2=0$.

ამოხსენით უტოლობები (№№13.24-13.28):

13.24. 1) $\sin x\ge 0$; 2) $\sin x<0$;

3) $\sin x>\frac{1}{2}$; 4) $\sin x<\frac{1}{2}$;

5) $\sin x>-\frac{1}{2}$; 6) $\sin x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

7) $\sin x>\frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) $\sin x\le-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

13.25. 1) $\cos x>0$; 2) $\cos x\le 0$;

3) $\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$;

5) $\cos x\le-\frac{1}{2}$; 6) $\cos x\ge-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

7) $\cos x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) $\cos x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

13.26. 1) $tgx>0$; 2) $tgx\le 0$;

3) $tgx<1$; 4) $tgx\ge-1$;

5) $ctgx\le-\sqrt{3}$; 6) $tgx>\frac{\sqrt{3}}{3}$.

13.27. 1) $\sin 2x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos 2x>-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)<\frac{1}{2}$; 4) $\sin\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{12}\right)<\frac{1}{\sqrt{2}}$;

5) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\ge 0$; 6) $tg\left(x-\frac{\pi}{3}\right)<-\sqrt{3}$.

13.28. 1) $\sin x>\cos x$; 2) $\sin x+\cos x<\sqrt{2}$;

3) $\sin x\cos\frac{x}{2}+\cos x\sin\frac{x}{2}>-\frac{1}{2}$;

4) $\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x>\frac{1}{2}$.

§14. ლოგარითმის შემცველი გამოსახულებების გამოთვლა. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებები. განტოლებათა სისტემები

გამოთვალეთ (№№14.1; 14.2):

14.1. 1) $\log_6 36$; 2) $\log_2 \frac{1}{8}$; 3) $\lg 0{,}01$; 4) $\log_{1/2} 4$;

5) $\log_{0,04} 5$; 6) $\log_{3\sqrt{3}} \frac{1}{27}$.

14.2. 1) $\lg 100 - \log_2 32$; 2) $\log_2 16 + \log_{\frac{1}{3}} 9$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} 4 - \log_3 81$; 4) $\log_3 81 + \log_{\frac{1}{2}} 8$;

5) $3^{\log_3 4} - \log_4 16$; 6) $4^{\log_4 3} + 5^{\log_5 9}$.

14.3. გაალოგარითმეთ გამოსახულებები:

1) $x = abc$; 2) $x = 3cd$; 3) $x = 2(a-b)$;

4) $x = \frac{3mn}{5}$; 5) $x = \frac{5(a+b)}{a(a-b)}$; 6) $x = 3c^2 d$;

7) $x = 13c^4 d^3 r l^2$; 8) $x = \frac{10(a^2 - b^2)}{3c^3 d^4}$; 9) $x = a\sqrt{b}$;

10) $x = 3a\sqrt[3]{3b^2}$; 11) $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$; 12) $x = \frac{3mn^2}{4\sqrt{5mn}}$.

14.4. იპოვეთ x მისი ლოგარითმის მიხედვით:

1) $\log x = \log b + \log c$; 2) $\log x = \log m - \log n$;

3) $\log x = 5\log a$; 4) $\log x = 2\log a + 3\log b$;

5) $\log x = 3\log m - 4\log n$; 6) $\log x = \frac{1}{2}\log a$;

7) $\log x = \frac{1}{2}(\log m + \log n)$; 8) $\log x = 2\log a + 3\log b - 5\log c$;

9) $\log x = 3\log(a+b) - 2\log(a-b)$;

10) $\log x = \frac{1}{2}\log(m-n) - \frac{1}{3}\log(m+n)$;

11) $\log x = \frac{1}{2}\log(a-b) - \frac{2}{5}\log(a+b) - \frac{2}{3}\log a$;

12) $\log x=\log b-\frac{1}{m}\log(b-c)+m\log(b+c)$.

გამოთვალეთ (№№14.5-14.10):

14.5. 1) $5\cdot 3^{\log_3 2+1}$; 2) $3^{1-\log_3 7}$; 3) $5^{\log_5 8+1}$; 4) $3^{2-\log_3 10}$;
5) $5^{2\log_5 3}$; 6) $4^{3\log_4 2}$; 7) $36^{\log_6 2}$; 8) $81^{0,5\log_9 7}$.

14.6. 1) $5^{\log_{0,2}\frac{1}{3}}+\log_3 27$; 2) $3^{\log_9 16}-\log_{0,5}8$;
3) $2^{\log_{\sqrt{2}}3}-\log_{\sqrt{3}}9$; 4) $4^{\log_2 3}-\log_{\frac{1}{3}}81$;
5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\sqrt{3}}2}-\log_{0,5}8$; 6) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_4 3}-\log_{\sqrt{2}}4$;
7) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{\sqrt{5}}2}+\log_{\frac{1}{2}}8$; 8) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_{\sqrt{8}}\sqrt{3}}-\log_{\frac{1}{2}}2$.

14.7. 1) $7^{\log_{\sqrt{7}}3}+4^{1+\log_4 5}-2^{\log_4 9}$; 2) $49^{\log_7\sqrt{4-\sqrt{3}}}\cdot 9^{\log_3\sqrt{4+\sqrt{3}}}$;
3) $5^{\log_{\sqrt{3}}3}+\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\sqrt{2}}3}-2^{2\log_4 5}$; 4) $7^{\log_{\sqrt{7}}(2-\sqrt{3})}+5^{\log_{\sqrt{5}}(2+\sqrt{3})}$;
5) $8^{\frac{2}{3}\log_2\left(\sqrt{3+\sqrt{2}}\right)}\cdot 27^{\frac{1}{3}\log_3(3-\sqrt{2})}$;
6) $2^{\log_2(2-\sqrt{3})^2}+2^{\log_{\sqrt{2}}(2+\sqrt{3})}+25^{\frac{1}{\log_3 5}}$;
7) $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}}+49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$; 8) $81^{\frac{1}{\log_5 3}}+27^{\log_3 6}+3^{\frac{4}{\log_7 9}}$;
9) $\left(256^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_{16}3}+9^{\log_{27}8}\right)\cdot 25^{\log_5\sqrt{3}}$;
10) $36^{\log_6 5}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36}$.

14.8. 1) $\log_2 48+\log_{\frac{1}{2}}3$; 2) $\log_2\frac{8}{5}-\log_{0,5}\frac{5}{2}$;
3) $\log_{\sqrt{3}}\sqrt{18}+\log_{\frac{1}{3}}2$; 4) $\dfrac{\log_2 27-\log_{\frac{1}{3}}8}{\log_3 2-\log_{\frac{1}{2}}3}$;

5) $\dfrac{\lg 32+\log_{0,5} 243}{\log_{0,1} 2+\log_2 3}$; 6) $\dfrac{\log_2 \frac{1}{9}-\log_3 25}{\log_{\frac{1}{2}} 9+\log_{\frac{1}{3}} 25}$.

14.9. 1) $\log_2 \log_2 16$; 2) $\log_{\frac{1}{5}} \log_3 243$;

3) $\lg \log_3 \log_4 64$; 4) $\log_2 \log_9 \log_5 125$;

5) $\log_4 \log_9 \log_3 27$; 6) $\log_9 \log_2 \log_5 25$.

14.10. 1) $\log_9 2\cdot\log_2 3$; 2) $\log_{\sqrt{2}} 7\cdot\log_{\frac{1}{7}} 2$;

3) $\log_6 2\cdot\log_2 3\cdot\log_3 36$; 4) $\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8$.

14.11. 1) იპოვეთ $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$, თუ $\log_a 27=b$;

2) იპოვეთ $\log_{30} 8$, თუ $\lg 5=a$, $\lg 3=b$;

3) იპოვეთ $\lg 56$, თუ $\lg 2=a$, $\log_2 7=b$;

4) იპოვეთ $\log_{275} 60$, თუ $\log_{12} 5=a$, $\log_{12} 11=b$;

5) იპოვეთ $\log_{175} 56$, თუ $\log_{14} 7=a$, $\log_{14} 5=b$;

6) იპოვეთ $\log_{ab} \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$, თუ $\log_{ab} a=4$;

7) იპოვეთ $\log_{1/2} 28$, თუ $\log_7 2=a$;

8) იპოვეთ $\log_6 16$, თუ $\log_{12} 27=a$.

14.12. 1) $\log_6 20$ გამოსახეთ $\log_4 12$ და $\log_{20} 9$ რიცხვების საშუალებით;

2) $\log_6 15$ გამოსახეთ $\log_9 6$ და $\log_8 15$ რიცხვების საშუალებით.

14.13. 1) მოცემულია გეომეტრიული პროგრესია $1, 81^3, 81^6, 81^9 \ldots, 81^{105}$. ყოველი წევრი გაალოგარითმეთ 9-ის ფუძით და გამოთვალეთ მიღებული რიცხვების ჯამი;

2) მოცემულია გეომეტრიული პროგრესია $1, 25^{-2}, 25^{-4}, 25^{-6}, \ldots, 25^{-102}$. ყოველი წევრი გაალოგარითმეთ 5-ის ფუძით და გამოთვალეთ მიღებული რიცხვების ჯამი.

ამოხსენით განტოლებები (№№14.14-14.47):

14.14. 1) $5^x=625$; 2) $3^{-x}=81$; 3) $8^x=32$; 4) $5^x=1$;

5) $25^x=\frac{1}{5}$; 6) $4^x=\sqrt{2}$; 7) $8^x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; 8) $125^x=\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$.

14.15. 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\sqrt{3}$; 2) $(0{,}25)^x=4$; 3) $(0{,}75)^x=\frac{9}{16}$;

4) $2^{x+1}=32$; 5) $3^{x+1}=\frac{1}{9}$; 6) $3^{2x-1}=81$;

7) $\sqrt{5^x}=\sqrt[3]{25}$; 8) $\sqrt[6]{4^{2x-1}}=2$.

14.16. 1) $2^{x-2}=1$; 2) $3^{2x-1}=1$; 3) $3^{(x-2)(x-3)}=1$;

4) $11^x=17^{-2x}$; 5) $4^{7x}=7^{4x}$; 6) $3^{25-5x}=4^{x-5}$;

7) $6^x\cdot\left(\frac{1}{36}\right)^{-\frac{1}{2}}=1$; 8) $7^x\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}=49$.

14.17. 1) $\sqrt[4]{5^{x+1}}=\sqrt[3]{5^{x-2}}$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^x=\left(\frac{4}{3}\right)^2$;

3) $\left(\frac{4}{9}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^3$; 4) $\left(\frac{4}{25}\right)^{\sqrt{x-1}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{-6}$.

14.18. 1) $15^x\cdot5^{-x}=27$; 2) $5^x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=100$;

3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^{x-1}=\frac{3}{8}$;

5) $\left(\frac{25}{9}\right)^{x-2}\cdot\left(\frac{27}{125}\right)^{x-3}=\frac{5}{3}$; 6) $2^x\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-x}=\frac{1}{10}\left(10^{x-1}\right)^5$.

14.19. 1) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3x}}=\left(\frac{9}{4}\right)^{-3}$; 2) $\left(\frac{1}{27}\right)^{1-x}=9^{\frac{2x-1}{2}}$;

3) $1000\cdot0{,}1^{1/x}=100^x$; 4) $27^{\frac{2x-1}{x}}=\sqrt{9^{2x-1}}$;

5) $(0{,}25)^{2-x}=\frac{256}{2^{x+2}}$; 6) $3^x\cdot4^{-x}=\frac{4}{3}(0{,}75)^{4x-2}$.

14.20. 1) $32^{\frac{x+5}{x-7}}=0{,}25\cdot128^{\frac{x+17}{x-3}}$; 2) $0{,}5^{x^2}\cdot2^{2x+2}=64^{-1}$;

3) $0{,}125\cdot4^{2x-3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$; 4) $\sqrt{(0{,}6)^x}=\sqrt{1\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x}$;

5) $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$; 6) $6^{\sqrt{5x+6}-3} = \left(\frac{1}{6}\right)^{1-\sqrt{x+2}}$.

14.21. 1) $3^{x+1} + 3^x = 108$; 2) $2^{x+2} - 2^x = 96$;

3) $7^x - 7^{x-1} = 6$; 4) $2^x - 2^{x-2} = 3$.

14.22. 1) $3^{x+2} + 3^{x-1} = 28$; 2) $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$;

3) $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} = 315$; 4) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$.

14.23. 1) $5^x + 3 \cdot 5^{x-2} = 140$; 2) $7^{x+2} + 2 \cdot 7^{x-1} = 345$;

3) $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$; 4) $3 \cdot 2^{2x+1} + 5 \cdot 4^x = 88$.

14.24. 1) $3^{2x+1} + 3^{2x-1} + 9^x = 39$; 2) $4^x - 2^{2x-1} - 3 \cdot 2^{2x-2} + 4 = 0$;

3) $2^{x+3} - 3 \cdot 2^{x-1} + 5 \cdot 2^x = 92$; 4) $\sqrt{5^{x-17}} - 2\sqrt{5^{x-19}} = 3$;

5) $27^{\frac{x}{3}-1} + 9^{\frac{x}{2}+1} - 3^{x+1} = 163$; 6) $3^{2x-3} - 9^{x-1} + 3^{2x} = 675$.

14.25. 1) $3^{x+2} - 3^{x+1} - 3^x = 5^{x+2} - 3 \cdot 5^{x+1} - 7 \cdot 5^x$;

2) $7^{3-x} - 7^{2-x} = 2^{5-x} - 2^{3-x}$; 3) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$;

4) $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - 0{,}5 \cdot 9^{x+1}$.

14.26. 1) $3^{2x} - 3^x = 702$; 2) $7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$;

3) $3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$; 4) $2 \cdot 3^{2x} - 5 \cdot 3^x - 1323 = 0$;

5) $4^x + 2^{x+1} = 80$; 6) $2^{2x+1} + 2^{x+2} = 16$;

7) $3^{x+2} + 9^{x+1} - 810 = 0$; 8) $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$.

14.27. 1) $3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0$; 2) $9^{\sqrt[3]{x}} - 2 \cdot 3^{\sqrt[3]{x}} = 3$;

3) $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} = 1$; 4) $9^{x^2-2x} - 36 \cdot 3^{x^2-2x-2} + 3 = 0$;

5) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 2{,}5 \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 6$; 6) $\dfrac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 1{,}025$.

14.28. 1) $9 \cdot 4^x - 3 \cdot 6^x = 2 \cdot 9^x$; 2) $25 \cdot 9^{2x} + 5 \cdot 15^{2x} = 12 \cdot 25^{2x}$;

3) $4 \cdot 3^{x-2} - 9 \cdot 2^{x-2} = 5\sqrt{6^{x-2}}$; 4) $4 \cdot 3^{2x+10} - 9 \cdot 2^{2x+10} = 5 \cdot 6^{x+5}$;

5) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$; 6) $8 \cdot 9^{1/x} - 30 \cdot 6^{1/x} + 27 \cdot 4^{1/x} = 0$.

14.29. 1) $\log_5 x = 0$; 2) $\log_8 x = 1$;

3) $\log_2 x = 5$; 4) $\log_{10} x = -1$;

5) $\log_{1/2} x = -3$; 6) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$;

7) $\log_3(2-3x)=1$; 8) $\log_{\frac{1}{5}}(x-4)=-1$;

9) $\log_{3\sqrt{3}} x=-\frac{2}{3}$; 10) $\log_{4\sqrt[3]{4}} x=-\frac{3}{4}$.

14.30. 1) $\lg(\lg x)=0$; 2) $\log_4 \log_2(x-5)=0$;

3) $\log_2(1+\log_3 x)=0$; 4) $\log_3(4-\log_2 x)=1$;

5) $\log_2 \log_3 \log_4 x=0$; 6) $\log_3 \log_2 \log_4(-2x)=0$;

7) $\lg \log_9 \log_4(-x-5)=0$; 8) $\log_3(1+\log_4(1+\log_3 x))=0$.

14.31. 1) $2\log_3 x=3\log_3 x-2$; 2) $5\log_2 x-3\log_7 49=2\log_2 x$;

3) $\lg(x-13)+3\lg 2=\lg(3x+1)$;

4) $\log_3(x-1)+3\log_3 2=\log_3(x+6)$;

5) $\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=\log_4 2$;

6) $\lg(4x-1)-2\lg 3=\lg(10-x)$;

7) $\log_2(4-x)+\log_2 5=1+\log_2(7x-9)$;

8) $\log_5(x+3)+\log_5(x-3)=\log_5(2x-1)+\log_5 1$;

9) $\log_3 x+\log_3 x^2+\log_3 x^3=12$;

10) $\log_2 x+\log_2 x^2+\log_2 x^6=36$;

11) $\log_5 x+6\log_{25} x=\frac{7}{2}$; 12) $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11$.

14.32. 1) $\log_3(x^2-7x+21)=2$; 2) $\log_5(x^2-6x+9)=2$;

3) $\lg(2-2x)+\lg(15+x)=1+\lg 3$;

4) $\lg(2-3x)+\lg(2-x)=\lg\frac{3}{4}$; 5) $\lg(3x-20)-\lg(2x-19)=\lg x$;

6) $\lg x+\lg(x+5)+\lg 0{,}02=0$; 7) $0{,}5\lg(2x-1)=1-\lg\sqrt{x-9}$;

8) $0{,}5\lg(-x-1)+\lg\sqrt{-0{,}5x-9}=1$;

9) $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{10}}(3x-1)-\log_{\frac{1}{10}}(4x+2)=1+\lg 5$;

10) $\frac{2}{3}\log_{\sqrt[3]{5}}(2x-1)+4\log_{0{,}04}(x-8)=\frac{2}{\lg 5}-\log_5 4$.

14.33. 1) $(\log_3 x)^2-3\log_3 x+2=0$; 2) $(\log_2 x)^2-\log_2 x-2=0$;

3) $\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}=1$;

4) $\dfrac{1}{5-4\lg(x+1)}+\dfrac{4}{1+\lg(x+1)}=3$.

14.34. 1) $\log_3\left(6-3^x\right)=x$; 2) $\log_2\left(24-2^x\right)=x+1$;

3) $\log_3\left(9^x-6\right)=x$; 4) $\log_5\left(5^x-4\right)=1-x$;

5) $\log_6\left(5+6^{-x}\right)=x+1$; 6) $\log_3\left(3^x-8\right)=2-x$.

14.35. 1) $\lg 2+\lg\left(4^{x-1}-5\right)=\lg\left(2^{x+1}+6\right)$;

2) $\lg\left(5^{x+1}-15\right)=1+\lg\left(25^{x-1}-14\right)$;

3) $\lg\left(3^{x+1}+3\right)=\lg 6+\lg\left(9^{x-1}-4\right)$;

4) $\log_2\left(4^{x-1}+2\right)=\log_2 3+\log_2\left(2^{x-2}+1\right)$.

14.36. 1) $\log_2 x\log_3 x=\log_2 3$; 2) $\log_3 x+\log_5 x=\log_3 15$;

3) $\log_3 x\log_9 x\log_{27} x\log_{81} x=\dfrac{2}{3}$;

4) $\log_2 x\cdot\log_8 x\cdot\log_{32} x=\dfrac{9}{5}$.

14.37. 1) $x^{\log_9 x}=6561$; 2) $x^{\lg x+2}=1000$;

3) $x^{\frac{\lg x+7}{4}}=10^{\lg x+1}$; 4) $100\cdot x^{\lg x}=x^3$;

5) $x^{\lg^3 x-5\lg x}=0{,}0001$; 6) $(100x)^{\lg x+3}=10000x^2$;

7) $(2x)^{\lg 5}=25$; 8) $5^{3\lg x}=12{,}5x$.

14.38. 1) $(0{,}4)^{\lg^2 x+1}=(6{,}25)^{2-\lg x^3}$; 2) $0{,}25\cdot 2^{\lg^2 x+7\lg x-6}=1$;

3) $5^{\lg(2x-8)}\cdot 8^{\lg(2x-8)}=1600$; 4) $3^{\lg(x+10)}4^{\lg(x+10)}=144$.

14.39. 1) $\lg\sqrt{x-2}-\lg 2=0{,}5(\lg 3-\lg(x-1))$;

2) $\lg 4-0{,}5\lg(x-2)=\lg\sqrt{x+10}-\lg 2$;

3) $3\log_5 2+2-x=\log_5\left(3^x-5^{2-x}\right)$;

4) $\lg\left(3^x+x-15\right)=x\lg 30-x$; 5) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\lg 8}+8^{\lg\sqrt[3]{x}+1}=4{,}5$;

6) $2\log_4\left(2^x-1\right)+x-\log_2 3=\log_3 9$.

14.40. 1) $1+a+a^2+\cdots+a^x=(1+a)\left(1+a^2\right)\left(1+a^4\right)$;

2) $\sqrt{\log_3 x^9}-4\log_9\sqrt{3x}=1$; 3) $4^{\log_3 x}-6\cdot 2^{\log_3 x}+2^{\log_3 27}=0$;

4) $3\cdot 9^{\log_4 x}-10\cdot 3^{\log_4 x}+\log_2 8=0$.

14.41. 1) $3\log_2 x^2 - \log_2^2(-x) = 5$; 2) $4\log_4^2(-x) + 2\log_4 x^2 = -1$;

3) $2\log_2^2(-x) - 3\log_2 x^2 = -4$; 4) $3\lg x^2 - \lg^2(-x) = 9$.

14.42. 1) $\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)\lg 3 + \lg 2 = \lg\left(27 - 3^{1/x}\right)$;

2) $x + \lg(1+2^x) = x\lg 5 + \lg 6$;

3) $\lg\left(3^x - 2^{4-x}\right) = 2 + \dfrac{1}{4}\lg 16 - \dfrac{x\lg 4}{2}$;

4) $5^{2(\log_5 2 + x)} - 2 = 5^{x+\log_5 2}$;

5) $5^{\lg(x+1)} - 3^{\lg(x+1)-1} = 3^{\lg(x+1)+1} - 5^{\lg(x+1)-1}$;

6) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$.

14.43. 1) $\lg[x(x+9)] + \lg\dfrac{x+9}{x} = 0$;

2) $\lg^2(100x) + \lg^2(10x) = 14 + \lg\dfrac{1}{x}$;

3) $\lg^2\dfrac{100}{x^4} + \lg^2\left(10000x^2\right) = 40$; 4) $x\log_2 x^2 + 1 = 2x + 2\log_4 x$;

5) $\log_2 x + \log_3 x = 1$; 6) $x(\lg 5 - 1) = \lg\left(2^x + 1\right) - \lg 6$.

14.44. 1) $\log_2\left(4^x + 4\right) = x + \log_2\left(2^{x+1} - 3\right)$;

2) $\log_5\left(4^x + 144\right) - 4\log_5 2 = 1 + \log_5\left(2^{x-2} + 1\right)$;

3) $\sqrt{2\log_8(-x)} - \log_8\sqrt{x^2} = 0$; 4) $2\lg x^2 - [\lg(-x)]^2 = 4$;

5) $\sqrt{\log_2\left(2x^2\right)\cdot\log_4(16x)} = \log_4 x^3$;

6) $\sqrt{\log_{0,04} x + 1} + \sqrt{\log_{0,2} x + 3} = 1$.

14.45. 1) $2^{\log_3 x^2}\cdot 5^{\log_3 x} = 400$;

2) $\log_{12}\left(4^{3x} + 3x - 9\right) = 3x - x\log_{12} 27$;

3) $\log_2\log_3\left(x^2 - 16\right) - \log_{1/2}\log_{1/3}\dfrac{1}{x^2 - 16} = 2$;

4) $2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0$.

14.46. 1) $\lg\left(5^x + x - 7\right) + x\lg 2 = x$;

2) $\log_{\sqrt{17}} x + \log_{\sqrt[3]{17}} x + \log_{\sqrt[4]{17}} x + \cdots + \log_{\sqrt[16]{17}} x = 270$;

3) $\log_4\log_2 x + \log_2\log_4 x = 2$; 4) $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$;

5) $\lg^4(x-1)^2+\lg^2(x-1)^3=25$; 6) $\dfrac{2-4\log_{12}2}{\log_{12}(x+2)}-1=\dfrac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)}$.

14.47. 1) $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^z+\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^z=14$;

2) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$;

3) $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=8$;

4) $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1}=\dfrac{101}{10\left(2-\sqrt{3}\right)}$.

ამოხსენით განტოლებათა სისტემები (№№14.48-14.53):

14.48. 1) $\begin{cases}3^x+3^y=12\\3^{x+y}=27\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2^x+3^y=8\dfrac{1}{9}\\2^x\cdot3^y=\dfrac{8}{9}\end{cases}$

3) $\begin{cases}3\cdot2^x+2\cdot3^y=\dfrac{11}{4}\\2^x-3^y=-\dfrac{3}{4}\end{cases}$ 4) $\begin{cases}49^{\frac{1}{x-1}}=343^{\frac{1}{y-1}}\\3^y=9^{2x-y}\end{cases}$

14.49. 1) $\begin{cases}3^x\cdot2^y=\dfrac{1}{9}\\y-x=2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2^y\cdot5^{-x}=200\\x+y=1\end{cases}$

3) $\begin{cases}7^x-16y=0\\4^x-49y=0\end{cases}$ 4) $\begin{cases}27^x=9^y\\81^x\cdot3^{-y}=243\end{cases}$

14.50. 1) $\begin{cases}2^x\cdot3^y=24\\2^y\cdot3^x=54\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3^x\cdot5^y=75\\3^y\cdot5^x=45\end{cases}$

3) $\begin{cases}3^y\cdot64^{1/x}=36\\5^y\cdot(512)^{1/x}=200\end{cases}$ 4) $\begin{cases}5^{\sqrt[3]{x}}\cdot2^{\sqrt{y}}=200\\5^{2\sqrt[3]{x}}+2^{2\sqrt{y}}=689\end{cases}$

14.51. 1) $\begin{cases}\lg x+\lg y=2\\x-y=15\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\log_4x+\log_4y=1+\log_49\\x-y=16\end{cases}$

3) $\begin{cases}\log_3 x+\log_3 y=2+\log_3 7\\ \log_4(x+y)=2\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\log_4 x+\log_4 y=1+\log_4 9\\ x+y-20=0\end{cases}$

14.52. 1) $\begin{cases}\log_2 x+\log_4 y=4\\ \log_4 x+\log_2 y=5\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\log_2(x-y)=5-\log_2(x+y)\\ \dfrac{\lg x-\lg 4}{\lg y-\lg 3}=-1\end{cases}$

3) $\begin{cases}\lg\left(x^2+y^2\right)=1+\lg 8\\ \lg(x+y)-\lg(x-y)=\lg 3\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\log_3\left(x^2-y^2\right)=\log_3(x+y)\\ \log_9\left(x^3+y^3\right)=\log_3(x+y)\end{cases}$

14.53. 1) $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=972\\ \log_{\sqrt{3}}(x-y)=2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3^y\cdot 9^x=81\\ 2\lg(x+y)-\lg x=2\lg 3\end{cases}$

3) $\begin{cases}2^x+2^y=4\\ \log_2(x+y)=1\end{cases}$ 4) $\begin{cases}3^y\cdot 9^x=81\\ \lg(y+x)^2-\lg x=2\lg 3\end{cases}$

14.54. იპოვეთ x-ის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მოცემული მიმდევრობა იქნება არითმეტიკული პროგრესია:

1) $-\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-3x-20)$, $\log_4(-x)$, $\log_{0,5}(-2x-19)$;

2) $\log_2\left(-x^2-x+20\right)$, $\dfrac{1}{2}+\log_4(-x)$, $\log_{0,5}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)$;

3) $\dfrac{1}{2}+x$, $\dfrac{1}{2}\log_2\left(4^x+1\right)$, $-\log_{0,25}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{7}{2}\cdot 4^{-x}\right)$;

4) $\lg 3$, $-\log_{0,1}\left(3^x+2\right)$, $\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{10}}\left(3^x+\dfrac{10}{3}\right)$.

14.55. იპოვეთ x-ის ყველა მნიშვნელობა, რომლებისთვისაც მოცემული მიმდევრობა იქნება გეომეტრიული პროგრესია:

1) $\lg\left(10^x+9\right)$, $\sqrt{2}$, $-\lg_{0,1}\left(10^{x-1}+0,9\right)$;

2) $-\dfrac{1}{4}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(4^x+2\right)$, $\sqrt{2}$, $\dfrac{1}{2}\log_2\left(4^{x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$;

3) $\log_3\left(3^x+7\right)$, $\sqrt{12}$, $-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(3^{x-1}+\frac{7}{3}\right)$;

4) $\lg\left(10^x+3\right)$, $\sqrt{6}$, $-\frac{1}{2}\log_{\sqrt{0,1}}\left(10^{x+1}+30\right)$.

14.56. იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც განტოლებას აქვს ერთი ამონახსნი:

1) $4^x-a\cdot 2^x-a+3=0$; 2) $25^x-(a+3)\cdot 5^x-a=0$;

3) $9^x-(a-3)\cdot 3^x+6-a=0$; 4) $6^x-(2a+3)\cdot 6^{\frac{x}{2}}-2a=0$.

14.57. a პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის აქვს ორი ამონახსნი განტოლებას:

1) $\log_3\left(9^x+2a^3\right)=x$; 2) $\log_2\left(4^x-a\right)=x$;

3) $x+\log_{1/2}\left(4^x+\frac{1}{4}a^3\right)=0$; 4) $x+\log_{1/3}\left(9^x-2a\right)=0$.

14.58. იპოვეთ a-ს ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც

$$(a-1)\cdot 4^x-4\cdot 2^x+a+2=0$$

განტოლებას აქვს ერთი მაინც ამონახსნი.

14.59. როგორი უნდა იყოს k, რომ

$$(k+2)\cdot 2^{1+x}-(k+4)\cdot 2^{1-x}=4$$

განტოლების ამონახსნი იყოს დადებითი?

2) როგორი უნდა იყოს k, რომ

$$(k-5)\cdot 3^{2+x}-k\cdot 3^{2-x}=45$$

განტოლების ამონახსნი იყოს უარყოფითი?

14.60. იპოვეთ a-ს ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც განტოლებას აქვს სხვადასხვა ნიშნის ფესვები:

1) $(a-2)^2\cdot 2^x-(a-1)\cdot 2^{-x}+2a-5=0$;

2) $(a+1)^2\cdot 3^x-(a+2)\cdot 3^{-x}+2a+1=0$.

§15. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული უტოლობები

15.1. დაადგინეთ 1-ზე მეტია თუ ნაკლები შემდეგი გამოსახულების მნიშვნელობა:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{1/7}\frac{5-\sqrt{15}}{2}}$;   2) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{2}\frac{6-\sqrt{15}}{3}}$;

3) $\left(\frac{4}{5}\right)^{\log_{2/7}\frac{7-\sqrt{13}}{4}}$;   4) $\left(\frac{4}{5}\right)^{\log_{3}\frac{7-\sqrt{12}}{4}}$.

15.2. ჭეშმარიტია თუ არა უტოლობები. პასუხი დაასაბუთეთ:

1) $\left(\frac{3}{8}\right)^{\log_{1/4}\frac{6-\sqrt{12}}{5}}<1$;   2) $\left(\frac{5}{3}\right)^{\log_{2/7}\frac{15-\sqrt{18}}{11}}>1$;

3) $\left(\frac{2}{9}\right)^{\log_{5/4}\frac{\sqrt{17}-2}{3}}<1$;   4) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\log_{5}\frac{\sqrt{27}-\sqrt{7}}{3}}>1$.

15.3. იპოვეთ a-ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც უტოლობა იქნება მართებული:

1) $a^{\log_{2/5}\frac{\sqrt{11}-3}{0,3}}<1$;   2) $a^{\log_{4/3}\frac{5-\sqrt{19}}{0,5}}<1$;

3) $\left(\frac{8}{5}\right)^{\log_{a}\frac{4+\sqrt{13}}{8}}>1$;   4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{a}\frac{\sqrt{21}-3}{2}}>1$.

15.4. რომელია მეტი

1) $2^{\log_3 5}-0,1$ თუ $5^{\log_3 2}$?   2) $7^{\lg 3}+\log_{0,5}\frac{2}{7}$ თუ $3^{\lg 7}$?

3) $(0,1)^{\log_2 3}+\sqrt{2}$ თუ $3^{-\log_2 10}+\sqrt[3]{3}$?

4) $3^{\log_2 5}+10^{1/3\lg 2}$ თუ $5^{\log_2 3}+\sqrt[10]{10}$.

ამოხსენით უტოლობები (№№15.5-15.17):

15.5. 1) $4^x<2$;   2) $6^x\geq 1$;   3) $2^x>\frac{1}{2}$;

4) $\left(\frac{3}{7}\right)^x\leq 1$;   5) $(0,3)^x>0,09$;   6) $(0,2)^x\leq\frac{1}{25}$.

15.6. 1) $2^{-x+1}>\frac{1}{2}$;   2) $5^{-x+2}<\frac{1}{25}$;   3) $(0,3)^{x-1}>0,09$;

4) $(0,2)^{3x-1}<\frac{1}{25}$; 5) $6^{3-2x}>\frac{1}{36}$;   6) $\left(\frac{2}{5}\right)^{3-6x}\leq 1$.

15.7. 1) $3^{x^2-3x} \le \frac{1}{9}$; 2) $5^{4x-x^2} \ge 1$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{6x-x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^5$;

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} \le \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}$; 5) $0{,}5^x \le 0{,}25^{x^2}$;

15.8. 1) $(0{,}5)^{1/2x} < 0{,}0625$; 2) $0{,}125 \cdot 4^{2x-3} < \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$;

3) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{4x-1}{3-x}} < \frac{16}{25}$; 4) $5^{\frac{2x-3}{1-x}} \ge 0{,}04$; 5) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}} > 125$;

6) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{4x+3}{x-1}} > 2{,}5$; 7) $0{,}2^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 25$; 8) $\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{x^2-45} > (0{,}81)^x$.

15.9. 1) $3^{x-1} \cdot 2^{2x-2} > 144$; 2) $\left(\frac{2}{9}\right)^{x-3} \cdot \left(\frac{27}{4}\right)^{x-3} < \frac{2}{3}$;

3) $3^{x+3} \cdot 7^{x+3} \le 3^{3x} \cdot 7^{3x}$; 4) $2^{\sqrt{x}} \cdot 7^{\sqrt{x}} < 2^x \cdot 7^x$;

5) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} \cdot \left(\frac{125}{8}\right)^{x-2} > \frac{25}{4}$; 6) $0{,}3^{2+4+6+\cdots+2x} > 0{,}3^{72}$.

15.10. 1) $3 \cdot 4^x - 2 \cdot 4^{x-1} > 160$; 2) $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x > -24$;

3) $3^{3x-2} + 3^{3x+1} - 3^{3x} < 57$; 4) $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{2/3(x-2)} > 52$;

5) $3^{\sqrt{x}} + 3^{\sqrt{x}-1} - 3^{\sqrt{x}-2} < 11$; 6) $3 \cdot 5^{\sqrt{x}} - 2 \cdot 5^{\sqrt{x}-1} + 5^{\sqrt{x}-2} < 66$.

15.11. 1) $4^x - 2^x \le 2$; 2) $5^{2x+1} > 5^x + 4$;

3) $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$; 4) $2^{2x-3} - 3 \cdot 2^{x-2} + 1 > 0$;

5) $9^x - 10 \cdot 3^{x-1} + 1 < 0$; 6) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 2\left(\frac{1}{3}\right)^x > 3$;

7) $4^{1/x-1} - 2^{1/x-2} - 3 \le 0$; 8) $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}}$.

15.12. 1) $3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x-1} \le 4 \cdot 5^x - 11 \cdot 5^{x-1}$;

2) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$;

3) $2^{2x+5} - 3^{x+9/2} \le 3^{x+7/2} - 4^{x+4}$; 4) $5^{x+1/2} - 9^x \ge 3^{2x-2} - 5^{x-1/2}$.

15.13. 1) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x - 5 \cdot 36^x < 0$; 2) $6 \cdot 49^x - 13 \cdot 42^x + 7 \cdot 36^x \le 0$;

3) $3 \cdot 64^x - 11 \cdot 24^x + 8 \cdot 9^x \ge 0$; 4) $5 \cdot 49^x - 2 \cdot 35^x - 7 \cdot 25^x > 0$;

5) $9\cdot 4^{\frac{1}{x}}+5\cdot 6^{\frac{1}{x}}\le 4\cdot 9^{\frac{1}{x}}$; 6) $5\cdot 25^{\frac{1}{x}}+3\cdot 10^{\frac{1}{x}}\ge 2\cdot 4^{\frac{1}{x}}$;

7) $6\cdot 9^{\frac{1}{x}}+6\cdot 4^{\frac{1}{x}}<13\cdot 6^{\frac{1}{x}}$; 8) $25^{\frac{1}{x}}+35^{\frac{1}{x}}\ge 20\cdot 49^{\frac{1}{x}}$.

15.14. 1) $\frac{1}{2^x-1}>\frac{1}{2^{x+2}-1}$; 2) $\frac{1}{3^x+5}\le\frac{1}{3^{x+1}-1}$;

3) $\frac{5^{2x}-4\cdot 5^x-5}{5^{x+1}-1}<0$; 4) $\frac{9^x+2\cdot 3^x-3}{1-3^{x+1}}\ge 0$.

15.15. 1) $\frac{3^{2|x-1|}+3}{4}<3^{|x-1|}$; 2) $\frac{5^{2|x-2|}+5}{6}<5^{|x-2|}$;

3) $3^{2|x-2|}-6\le 3^{|x-2|}$; 4) $25^{|x+4|}-3\cdot 5^{|x+4|}-10\le 0$.

15.16. 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}}>3^{-x}$; 2) $2^{\sqrt{x+3}}<\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$;

3) $3\cdot 9^{\sqrt{2-x}}+3<10\cdot 3^{\sqrt{2-x}}$; 4) $9^{\sqrt{x^2-3}}+3<3^{\sqrt{x^2-3}-1}\cdot 28$.

15.17. 1) $\left(4-2\sqrt{3}\right)^{\frac{1-3x}{x+2}}\ge\sqrt[3]{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}}$; 2) $\left(10-\sqrt{2}\right)^{\frac{x-1}{2x+3}}<\frac{10+\sqrt{2}}{98}$;

3) $\left(3-\sqrt{6}\right)^{\sqrt{x(x-2)}}\ge\left(\frac{3+\sqrt{6}}{3}\right)^{-(x+1)}$;

4) $\left(\frac{\sqrt{17}+3}{8}\right)^{\frac{x}{1-x}}\le\left(\sqrt{17}-3\right)^{\frac{x}{x+2}}$.

15.18. 1) ამოხსენით უტოლობა $a^{\sqrt{x^2-7x+12}}<a^{\sqrt{9-3x}}$, თუ ცნობილია, რომ იგი სამართლიანია, როცა $x=2$;

2) ამოხსენით უტოლობა $a^{\sqrt{3x^2+2x-8}}<a^{\sqrt{x-8}}$, თუ ცნობილია, რომ იგი სამართლიანია, როცა $x=9$;

3) ამოხსენით უტოლობა $a^{\sqrt{2x+11}}>a^{x+4}$, თუ ცნობილია, რომ $x=2$ არ არის მისი ამონახსნი;

4) ამოხსენით უტოლობა $a^{\sqrt{x+7}}<a^x$, თუ ცნობილია, რომ $x=4$ არ არის მისი ამონახსნი.

ამოხსენით უტოლობები (№№15.19-15.33):

15.19. 1) $\log_3 x>2$; 2) $\log_7 x<0{,}1$; 3) $\log_{0{,}7} x>5$;

4) $\log_{0,2} x < -2$; 5) $\log_{1/3} x > 1$; 6) $\log_{3/4} x < -1$.

15.20. 1) $\log_{1/2}(2x+3) > 0$; 2) $\log_{0,3}(2{,}3-2x) < 1$;

3) $\log_{0,7}(3x-2) > 1$; 4) $\log_9(2+x) > 0{,}5$;

5) $\log_5(3-x) < -1$; 6) $\log_{0,3}(2-5x) > 2$.

15.21. 1) $\lg(2x+3) > \lg(1-2x)$; 2) $\log_{2,3}(5x-7) > \log_{2,3}(1-2x)$;

3) $\log_5(2x-4) > \log_5(x+1)$; 4) $\lg(x+1) > \lg(5-x)$;

5) $\log_{1/7}(2x-6) < \log_{1/7} x$; 6) $\lg(x^2-3) > \lg(x+3)$.

15.22. 1) $\log_5(x^2+x-1) > 1$; 2) $\log_7(x^2-4x-11) > 0$;

3) $\log_{1/2}(x^2+x-2) > -2$; 4) $\log_2(x^2+3x) < 2$;

5) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5x+7) > 0$; 6) $\lg(x^2-6x+18) < 1$.

15.23. 1) $\lg(3x-x^2+4) > \lg(8-2x)$; 2) $\log_2(3x^2-12) > \log_2(x^2+10)$;

3) $\log_2(x^2-x-4) > 3$; 4) $\log_2(12-2x-x^2) > 2$;

5) $\lg(x^2-x+8) \geq 1$; 6) $\log_{0,7}(x^2+1) < \log_{0,7}(2x-5)$.

15.24. 1) $\log_{1/2}\log_5(x-3) < 0$; 2) $\log_4\log_3(x-7) < 0$;

3) $\log_2\log_{1/3}\log_5 x > 0$; 4) $\log_2\log_3\log_4(x-5) > 0$.

15.25. 1) $\log_3\log_{9/16}(x^2-4x+3) \leq 0$; 2) $\log_{8/3}\log_{1/2}(x^2-x-6) \geq 0$;

3) $\log_{27/41}\log_5(x^2-2x-3) \geq 0$; 4) $\log_{12/11}\log_{1/2}(x^2+3x-4) \leq 0$.

15.26. 1) $\lg^2 x + 2\lg x > 3$; 2) $\lg^2 x - 2\lg x - 8 \leq 0$;

3) $\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 2 \leq 0$; 4) $\log_{0,25}^2 x - \log_2 x > 3$.

15.27. 1) $\log_2(x+14) + \log_2(x+2) < 6$;

2) $\log_5 x + \log_5(2x-1) < \log_5(2x+2)$;

3) $\log_{1/3}(x-1) - \log_3(x+1) + \log_{\sqrt{3}}(5-x) < 1$;

4) $\log_3(x+2) - \dfrac{1}{2}\log_{1/\sqrt{3}}(x-2) < 2\log_9(4x+1)$;

5) $4\log_2(x-1) - \log_{\sqrt{2}}(2x-4) \leq 2$.

15.28. 1) $\log_2 \dfrac{x-3}{x+2} < 0$; 2) $\log_{1,5} \dfrac{2x-8}{x-2} < 0$;

3) $\log_{0,7}\dfrac{x^2-4x+6}{x}<0$; 4) $\lg\dfrac{x+3}{x+4}>\lg\dfrac{x+5}{x+2}$.

15.29. 1) $\lg|2x-3|<1$; 2) $\log_{1/3}|2x-5|>-1$;

3) $\log_3\left(2\cdot 3^x-9\right)>x$; 4) $\log_2\left(2^{x+1}-4\right)<x$.

15.30. 1) $\dfrac{\sqrt{x-5}}{\log_2(x-4)-1}\geq 0$; 2) $\dfrac{\sqrt{\log_2(x-1)}}{x^2-4x-5}>0$;

3) $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-3x+3\right)}>0$; 4) $\sqrt{x^2-4}\cdot\left(\log_2(1-x)-3\right)<0$;

5) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\log_3 x-1}\leq 0$; 6) $\sqrt{2x-4}\left(\log_3(x-1)-1\right)\leq 0$.

15.31. 1) $\dfrac{1}{5-\lg x}+\dfrac{2}{1+\lg x}<1$; 2) $\dfrac{\lg^2 x+2\lg x-6}{\lg x}<1$;

3) $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\leq\dfrac{1}{2}$; 4) $\dfrac{1}{\log_2 x}\leq\dfrac{1}{\log_2\sqrt{x+2}}$.

15.32. 1) $\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{10}}\left(5^x+1\right)+x<x\lg 2+\lg 30$;

2) $\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}\left(2^x-1\right)+x-\log_2 3<2$;

3) $x+\log_2\left(4+2^x\right)<5$;

4) $x+\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{10}}\left(1+2^x\right)<x\lg 5+\lg 6$;

5) $\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{10}}\left(3^x+x-15\right)>x\lg 30-x$;

6) $\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{10}}\left(2^x+x-2\right)+x>x\lg 20$.

15.33. 1) $\log_3\left(x^2-2\right)<2\log_3\sqrt{\dfrac{3}{2}|x|-1}$;

2) $\log_{0,5}\left(3-x^2\right)>-\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}\left(4|x|-2\right)$;

3) $\log_{0,3}\left(4-x^2\right)>\log_{0,3}\left(6|x|-3\right)$;

4) $2\log_4\sqrt{x^2-5}<\log_4\left(\dfrac{7}{3}|x|-3\right)$.

15.34. ცნობილია, რომ მოცემული უტოლობა სამართლიანია, როცა $x = x_0$. იპოვეთ ამ უტოლობის ყველა ამონახსნი:

1) $\log_a\left(5x^2 - 8x + 3\right) < \log_a(3 - x)$, $x_0 = -2$;

2) $\log_a\left(2x^2 - 3x + 1\right) < \log_a(x - 1)$, $x_0 = 2$;

3) $\log_a\left(2x^2 + 3x - 5\right) < \log_a(5x - 2)$, $x_0 = 5$;

4) $\log_a\left(x^2 - 11x + 30\right) > \log_a(14 - x)$, $x_0 = 7$.

§16. ფუნქცია. ფუნქციის გრაფიკი

16.1 რომელ საკოორდინატო მეოთხედში მდებარეობს წერტილი:

1) $M(-2;5)$; 2) $M(-3;-7)$, 3) $M(5;-2)$; 4) $M(2;9)$.

16.2. დაადგინეთ, რომელ საკოორდინატო მეოთხედებს შეიძლება ეკუთვნოდეს $M(x;y)$ წერტილი, თუ:

1) $xy > 0$; 2) $xy < 0$; 3) $x - y = 0$;

4) $x + y = 0$; 5) $x + y > 0$; 6) $x - y < 0$.

16.3. იპოვეთ $M(2;5)$, $N(-3;1)$, $P(-5;-3)$ და $Q(7;-1)$ წერტილების სიმეტრიული წერტილების კოორდინატები:

1) Ox ღერძის მიმართ; 2) Oy ღერძის მიმართ;

3) კოორდინატთა სათავის მიმართ;

4) პირველი და მესამე საკოორდინატო სიბრტყეების ბისექტრისის მიმართ;

5) მეორე და მეოთხე საკოორდინატო სიბრტყეების ბისექტრისის მიმართ;

6) $x = 1$ წრფის მიმართ; 7) $y = -2$ წრფის მიმართ.

16.4. იპოვეთ მანძილი M და N წერტილებს შორის, თუ:

1) M (1;0), N (3;0); 2) M (-2;0), N (-5;0);

3) M (-1;0), N (3;0); 4) M (0;2), N (0;5);

5) M (0;-3), N (0;-7); 6) M (0;-4), N (0;3);

7) M (3;2), N (-5;2); 8) M (-3;4), N (-3;-4);

9) M (1;6), N (4;2); 10) M (-7;8), N (5;3).

16.5. გამოთვალეთ

1) $f(g(2))$, თუ $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = 2x + 3$;

2) $f\left(g\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$, თუ $f(x) = 4x^2 - 1$, $g(x) = \sin x$;

3) $f\left(g\left(\frac{1}{4}\right)\right)$, თუ $f(x)=9^x$, $g(x)=\log_{1/3} x$;

4) $f(g(24))$, თუ $f(x)=\log_{\sqrt{3}} x$, $g(x)=27^x$.

16.6. იპოვეთ

1) $f(f(x))$, თუ $f(x)=5x-1$;

2) $f(f(x))$, თუ $f(x)=3-4x$,

3) $f(f(x))$, თუ $f(x)=x^2+1$,

4) $f(g(x))$, თუ $f(x)=2x+1$, $g(x)=5-x$.

იპოვეთ ფუნქციათა განსაზღვრის არე (№№16.7-16.15):

16.7. 1) $y=\frac{1}{3x-12}$; 2) $y=\frac{x^2-9}{x+3}$;

3) $y=\sqrt{x^2-49}$; 4) $y=\sqrt{144-9x^2}$.

16.8. 1) $y=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$; 2) $y=\sqrt{16-x}-\sqrt{3x+1}$;

3) $y=\sqrt{7-x}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$; 4) $y=\frac{7}{\sqrt{x-3}}+11\sqrt{5-x}$.

16.9. 1) $y=\sqrt{(1-x)(1+5x)}$; 2) $y=\sqrt{x^2-2x-63}$;

3) $y=\sqrt{-x^2+x+42}$; 4) $y=\sqrt{x^2+8x+15}$.

16.10. 1) $y=\sqrt{\frac{3x-2}{2x+6}}$; 2) $y=\sqrt{-\frac{x-4}{2-x}}$;

3) $y=\sqrt{\frac{1}{x}-1}$; 4) $y=\sqrt{2+\frac{x}{1-x}}$.

16.11. 1) $y=\frac{\sqrt{x}-3}{x^2-2x-80}$; 2) $y=\frac{\sqrt{5-x}}{x^2-2x-80}$;

3) $y=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-x-2}$; 4) $y=\frac{x^2+x-6}{\sqrt{9-x^2}}$.

16.12. 1) $y=\log_3(x-5)$; 2) $y=\log_{0,3}(7-x)$;

3) $y=\log_{0,3}(9-x^2)$; 4) $y=\log_{\pi}(6+x-x^2)$;

5) $y=\log_2(x^2-2x-3)$; 6) $y=\log_7(x-x^2)$.

16.13. 1) $y=\ln\dfrac{2-x}{3x+5}$; 2) $y=\log_6\dfrac{x-5}{2+x-x^2}$; 3) $y=\sqrt{\lg x}$;

4) $y=\sqrt{(x-10)\lg x}$; 5) $y=\sqrt{\dfrac{2-x}{\lg x}}$; 6) $y=\sqrt{\log_{0,3}\dfrac{x-1}{x+5}}$.

16.14. 1) $y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}+\sqrt{x+2}$; 2) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}-\lg(2x-3)$;

3) $y=\dfrac{3}{4-x^2}+\lg\left(x^2-x\right)$; 4) $y=\lg\dfrac{x-5}{x^2-10x+24}-\sqrt[3]{x+5}$.

16.15. 1) $y=\sqrt{\log_2^2 x+8\log_4 x-5}$; 2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{-8\log_9^2 x+\log_{\frac{1}{3}} x+3}}$;

3) $y=\sqrt{\log_2\left(\log_3^2 x-4\log_{\frac{1}{9}} x-2\right)}$; 4) $y=\sqrt{\log_3\left(2-\log_{0,5}\left(x^2-2x-2,5\right)\right)}$;

5) $y=\sqrt{\lg\left(x+2-\log_2\left(4^x-3\cdot 2^x+4\right)\right)}$; 6) $y=\sqrt{\log_{4/3}\left(\sqrt{x+3}-x\right)}$.

იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე (№№16.16-16.22):

16.16. 1) $y=x^2+2x+2$; 2) $y=x^2-4x+1$;

3) $y=8-2x-x^2$; 4) $y=5+6x-x^2$.

16.17. 1) $y=\sqrt{x^2+2x+5}$; 2) $y=\sqrt{8-2x-x^2}$;

3) $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$; 4) $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

16.18. 1) $y=\sin x+|\sin x|$; 2) $y=\dfrac{3}{2\sin x-5}$;

3) $y=1-2|\cos x|$; 4) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

16.19. 1) $y=10^{-x^2}$; 2) $y=3^{x^2+4x+5}$;

3) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-2x+2}$; 4) $y=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{6x-x^2-11}$.

16.20. 1) $y=\lg\left(x^2+10\right)$; 2) $y=\log_3\left(x^2+27\right)$;

3) $y=\log_{1/5}\left(x^2+25\right)$; 4) $y=\log_{1/4}\left(x^2+64\right)$.

16.21. 1) $y = 2^{|\sin x|}$; 2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|\cos x|}$;

3) $y = \log_{0,5}|\sin x|$; 4) $y = \log_2\left(\cos x + |\cos x|\right)$.

16.22. 1) $y = 2^{\log_2\left(x^2+1\right)}$; 2) $y = 5^{\log_5\left(x^2-1\right)}$;

3) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{1/4}\left(x^2-4x-9\right)}$; 4) $y = 7^{\log_7\left(8x+4-x^2\right)}$.

იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე მითითებულ შუალედზე (№№16.23; 16.24):

16.23. 1) $y = 3x - 2$, $x \in [-1;4]$; 2) $y = 3 - 5x$, $x \in [0;3]$;

3) $y = x^2 - 4x - 7$, $x \in [2;4]$; 4) $y = 5 + 6x - x^2$, $x \in [-3;-1]$.

16.24. 1) $y = |x+2|$, $x \in [-1;1]$; 2) $y = |x-1|$, $x \in [0;2]$;

3) $y = |x^2 - x|$, $x \in \left[0;\frac{3}{4}\right]$; 4) $y = |6x - x^2|$, $x \in [-2;1]$.

იპოვეთ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა (№№16.25; 16.26):

16.25. 1) $y = -x^2 + 2x + 3$; 2) $y = -x^2 - 8x + 12$;

3) $y = 2^{1-x^2}$; 4) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x-2}$;

5) $y = \log_{1/3}\left(x^2 - 6x + 18\right)$; 6) $y = \log_{1/5}\left(x^2 + 5x + \frac{45}{4}\right)$.

16.26. 1) $y = 5\sin x - 3$; 2) $y = \frac{2}{5 - 3\cos x}$;

3) $y = \frac{2}{4 + 3\sin x}$; 4) $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$;

5) $y = \log_2|\sin x|$; 6) $y = 2^{\cos x}$.

იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა (№№16.27; 16.28):

16.27. 1) $y = x^2 - 5x + 6$; 2) $y = 2x^2 - 3x + 1$;

3) $y = 7^{x^2-2x+1}$; 4) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x-5}$;

5) $y=\log_2\left(4x^2-12x+25\right)$; 6) $y=\log_4\left(x^2+2x+17\right)$.

16.28. 1) $y=3\sin x$; 2) $y=3\sin 2x-1$; 3) $y=\dfrac{3}{2-\cos x}$;

4) $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$; 5) $y=\log_{1/6}\left|\cos x\right|$; 6) $y=3^{\left|\sin x\right|}$.

იპოვეთ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა მითითებულ სეგმენტზე (№№16.29; 16.30):

16.29. 1) $y=6-5x$, $x\in[1;3]$; 2) $y=-x^2-4x+1$, $x\in[0;3]$;

3) $y=\left|4-3x\right|$, $x\in[2;5]$; 4) $y=\left|6x-x^2\right|$, $x\in[3;7]$.

16.30. 1) $y=3\sin x$, $x\in\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3}\right]$; 2) $y=6\cos x$, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$;

3) $y=1-2\left|\cos x\right|$, $x\in[0;\pi]$; 4) $y=\sin^6 x+\cos^6 x$, $x\in\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}\right]$.

იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა მითითებულ სეგმენტზე (№№16.31; 16.32);

16.31. 1) $y=8-3x$, $x\in[1;4]$; 2) $y=-3x^2-2x+1$, $x\in[-4;-2]$;

3) $y=\left|7x+1\right|$, $x\in[-3;-1]$; 4) $y=\left|-x^2+8x+20\right|$, $x\in[-2;10]$.

16.32. 1) $y=7\sin x$, $x\in\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{2}{3}\pi\right]$; 2) $y=5\cos x$, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{6}\right]$;

3) $y=\sin x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$; $x\in[-\pi;0]$;

4) $y=\sin x+\cos x$; $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$.

16.33. იპოვეთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები:

1) $y=2x-1$; 2) $y=-\dfrac{3}{x+1}$; 3) $y=\dfrac{1}{2-x}$;

4) $y=2x^2-8x+1$; 5) $y=5x-1-2x^2$; 6) $y=(2-x)(x-3)+2$.

16.34. იპოვეთ, რა სიმრავლეზე ასახავს ფუნქცია მოცემულ შუალედს:

1) $y=5x-1$, $[-1;2]$; 2) $y=3-2x$, $[-4;1]$;

3) $y=\dfrac{3}{x-1}$, $[2;4]$; 4) $y=x^2-6x$, $[1;4]$;

5) $y=2x^2-4x+5$, $[0;\infty[$; 6) $y=-2x^2+4x-3$, $[-1;2]$;

7) $y=\log_3 x$, $[1;3]$; 8) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2}$, $[0;2]$.

16.35. M (9;2), N (-2;4), K (-1;-4), E (1;-1), F (3;3) და G (-2;-40) წერტილებიდან რომელი მდებარეობს:

1) $y=3x-1$ ფუნქციის გრაფიკზე;

2) $y=\dfrac{3}{x-2}$ ფუნქციის გრაფიკზე;

3) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$ ფუნქციის გრაფიკზე;

4) $y=\log_3 x$ ფუნქციის გრაფიკზე.

16.36. a-ს რა მნიშვნელობისათვის მდებარეობს M (a,3) წერტილი:

1) $y=2x+5$ ფუნქციის გრაფიკზე;

2) $y=-\dfrac{3}{x-1}$ ფუნქციის გრაფიკზე;

3) $y=3^x$ ფუნქციის გრაფიკზე;

4) $y=\log_2 x$ ფუნქციის გრაფიკზე.

16.37. b-ს რა მნიშვნელობისათვის მდებარეობს M (2;b) წერტილი:

1) $y=2x-1$ ფუნქციის გრაფიკზე;

2) $y=-2x^2+3x$ ფუნქციის გრაფიკზე;

3) $y=2\log_4 x$ ფუნქციის გრაფიკზე;

4) $y=3^x$ ფუნქციის გრაფიკზე.

16.38. 1) a-ს რა მნიშვნელობისათვის მდებარეობს M წერტილი ფუნქციის გრაფიკზე, თუ:

1) M (1;a), $y=4-2x$; 2) M (a;2), $y=x^2-4x+2$;

3) M (1;1), $y=2x^2-3x+a$; 4) M (-1;5), $y=ax^2-2x+3$.

16.39. იპოვეთ ფუნქციის გრაფიკის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები:

1) $y=6-2x$; 2) $y=5x-x^2$; 3) $y=1-\log_5 x$; 4) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}-4$.

16.40. იპოვეთ ფუნქციის გრაფიკის Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები:

1) $y=6-x$; 2) $y=\dfrac{3}{x-1}$; 3) $y=2\cdot 3^x$; 4) $y=3\cos x$.

16.41. იპოვეთ საკოორდინატო ღერძებითა და მოცემული წრფეებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი:

1) $x=3$, $y=5$; 2) $x=-4$, $y=-6$; 3) $y=-x+6$; 4) $3x-2y=6$.

16.42. იპოვეთ ფუნქციათა გრაფიკების გადაკვეთის წერტილები:

1) $y=3x-1$, $y=3-x$; 2) $y=2+x-x^2$, $y=0$;

3) $y=x^2-3x+5$, $y=x+2$; 4) $y=x^2$, $y=2x-x^2$.

16.43. იპოვეთ პარაბოლის წვეროს კოორდინატები:

1) $y=x^2-4x$; 2) $y=6x-x^2-4$;

3) $y=3-8x-4x^2$; 4) $y=(3x-6)^2+3$.

16.44. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის M წერტილზე მოცემული წრფის პარალელურად:

1) M (-2;3), $y=5$; 2) M (0;0), $y=-2x+1$;

3) M (1;-2), $2x-3y=1$; 4) M (-1;3), $x+2y=-3$.

16.45. 1) იპოვეთ $y=x^2+6x+c$ პარაბოლის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილები, თუ ის Oy ღერძს კვეთს (0;8) წერტილში.

2) იპოვეთ $y=x^2+3x+c$ პარაბოლის Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილი, თუ მისი Ox ღერძთან გადაკვეთის ერთ-ერთი წერტილია (3;0).

3) M და N შესაბამისად $y=-x^2+4$ პარაბოლის Ox და Oy ღერძებთან გადაკვეთის წერტილებია. იპოვეთ მანძილი M და N წერტილებს შორის.

4) იპოვეთ b და c, თუ $y=x^2+bx+c$ ფუნქციის გრაფიკი Oy ღერძს კვეთს (0;5) წერტილში, ხოლო Ox ღერძს (1;0) წერტილში.

5) იპოვეთ b და c, თუ $y=-x^2+bx+c$ ფუნქციის გრაფიკი Ox ღერძს კვეთს (1;0) და (3;0) წერტილებში.

6) იპოვეთ b და c, თუ $y=2x^2+bx+c$ ფუნქციის გრაფიკი Ox ღერძს ეხება (1;0) წერტილში.

7) იპოვეთ $y=x^2+bx+c$ პარაბოლის წვერო, თუ ეს პარაბოლა Ox ღერძს კვეთს წერტილებში (1;0) და (3;0).

8) იპოვეთ a და c, თუ $y = ax^2 - 8x + c$ ფუნქცია უმცირეს მნიშვნელობას იღებს $x = 2$ წერტილში და ეს მნიშვნელობა 0-ის ტოლია.

9) იპოვეთ a და c, თუ $y = ax^2 + 4x + c$ ფუნქცია უდიდეს მნიშვნელობას იღებს $x = 1$ წერტილში და ეს მნიშვნელობა 8-ის ტოლია.

10) იპოვეთ b და c, თუ $y = -x^2 + bx + c$ ფუნქცია ნული ხდება მხოლოდ $x = -2$-სთვის.

11) იპოვეთ b და c, თუ $y = 2x^2 + bx + c$ ფუნქცია ნული ხდება მხოლოდ $x = 3$-სთვის.

12) იპოვეთ b და c, თუ $y = x^2 + bx + c$ ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიის ღერძია $x = 1$ წრფე და ეს გრაფიკი Oy ღერძს კვეთს (0;3) წერტილში.

13) იპოვეთ k-ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $y = (k-1)x^2 + 2kx + 3k - 2$ პარაბოლას Ox ღერძთან აქვს ერთადერთი საერთო წერტილი.

14) იპოვეთ k-ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $y = kx + 6$ წრფეს $y = x^2 + 20x + 42$ პარაბოლასთან ერთადერთი საერთო წერტილი აქვს.

15) იპოვეთ k-ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $y = 2kx + 1$ წრფეს $y = kx^2 + 8x + 3$ პარაბოლასთან აქვს ერთადერთი საერთო წერტილი.

16) $y = ax^2 + bx + c$ ფუნქციის გრაფიკი Ox ღერძს კვეთს $x = -1$ და $x = 3$ წერტილებში, ხოლო Oy ღერძს $y = -2$ წერტილში. იპოვეთ a, b და c.

17) იპოვეთ a, b და c, თუ $y = ax^2 + bx + c$ პარაბოლის წვეროა (1;2) წერტილი და გადის (0;3) წერტილზე.

18) იპოვეთ a და b, თუ $y = 2x + a$ წრფე და $y = -x^2 + bx + 10$ პარაბოლა ერთმანეთს კვეთს საკოორდინატო ღერძებზე.

19) იპოვეთ a, b და c, თუ $y = -x^2 + bx + c$ პარაბოლა და $y = -x + a$ წრფე ერთმანეთს კვეთს $M(5;7)$ წერტილში, ხოლო მეორე თანაკვეთის წერტილი Oy ღერძზე მდებარეობს.

20) იპოვეთ a, b და c, თუ $y=-x+a$ წრფეს და $y=\frac{1}{4}x^2+bx+c$ პარაბოლას აქვს ერთადერთი საერთო წერტილი M (2;8).

21) a-ს რა მნიშვნელობებისათვის $y=ax$ წრფეს და $y=x^2-2x+9$ პარაბოლას აქვთ ერთადერთი საერთო წერტილი. იპოვეთ ამ წერტილის კოორდინატები.

22) a-ს რა მნიშვნელობებისათვის $y=x+a$ წრფეს და $y=x^2-3x+10$ პარაბოლას აქვთ ერთადერთი საერთო წერტილი. იპოვეთ ამ წერტილის კოორდინატები.

16.46. ააგეთ შემდეგი განტოლებით მოცემული წრფე:
1) $y-2=0$; 2) $2x+3=0$; 3) $3x+2y=0$;
4) $2x-3y=0$; 5) $2x+3y+5=0$; 6) $-3x+5y-\frac{1}{2}=0$.

ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი (№№16.47-16.65):

16.47. 1) $y=2$; 2) $y=-0{,}8$; 3) $y=2x$; 4) $y=-\frac{1}{2}x$.

16.48. 1) $y=3x+2$; 2) $y=-2x+\frac{1}{2}$; 3) $y=|x|$;
4) $y=-|x|$; 5) $y=|x|+1$; 6) $y=-|x|-2$.

16.49. 1) $y=|2-x|$; 2) $y=|x+2|+4$;
3) $y=|1-x|+3$; 4) $y=-|1-3x|+2$.

16.50. 1) $y=\frac{2}{x}$; 2) $y=\frac{-3}{x}$; 3) $y=\frac{2}{x-1}$;
4) $y=\frac{-1}{x-1}$; 5) $y=\frac{1}{2x}+1$; 6) $y=\frac{-2}{x}-2$;

16.51. 1) $y=\frac{2}{x-1}+2$; 2) $y=\frac{-3}{x-1}-2$; 3) $y=\frac{2}{x+1}-3$; 4) $y=\frac{2}{x-1}+4$;

16.52. 1) $y=\frac{2}{|x|}$; 2) $y=-\frac{3}{|x|}$; 3) $y=\frac{2}{|x-1|}$; 4) $y=\frac{3}{|x+2|}$;
5) $y=-\frac{2}{|x|}+3$; 6) $y=\frac{1}{|x|}-2$; 7) $y=\frac{-2}{|x+1|}+4$; 8) $y=\frac{3}{|x-2|}-2$.

16.53. 1) $y=\frac{x+3}{x-2}$; 2) $y=\frac{3x+5}{x+2}$; 3) $y=\frac{5-2x}{x-4}$; 4) $y=\frac{5-4x}{2x+1}$.

16.54. 1) $y = 2x^2$; 2) $y = \frac{1}{2}x^2$; 3) $y = -3x^2$; 4) $y = -0{,}3x^2$;

5) $y = 3x^2 + 1$; 6) $y = -4x^2 + 2$; 7) $y = 2x^2 - 3$; 8) $y = -5x^2 - 3$.

16.55. 1) $y = (x-2)^2$; 2) $y = 0{,}5(x+3)^2$; 3) $y = -(x+1)^2$;

4) $y = -(2-x)^2$; 5) $y = (x-3)^2 + 2$; 6) $y = 2(x+2)^2 - 3$;

7) $y = -(x+1{,}5)^2 - 0{,}3$; 8) $y = -(2-x)^2 + \frac{1}{2}$.

16.56. 1) $y = x^2 + 4x$; 2) $y = -x^2 + 6x$; 3) $y = x(x-1)$; 4) $y = -2x^2 + 4x$.

16.57. 1) $y = x^2 + 6x + 9$; 2) $y = 9x^2 + 6x + 1$;

3) $y = -x^2 - 8x - 16$; 4) $y = -4x^2 + 4x - 1$.

16.58. 1) $y = x^2 - 4x + 3$; 2) $y = -x^2 + 4x + 45$; 3) $y = 3x^2 - 5x + 2$;

4) $y = -3x^2 + 4x - 5$; 5) $y = -20x^2 + 7x + 6$; 6) $y = 2x^2 + 4x + 17$.

16.59. 1) $y = \left|3x^2 - 1\right|$; 2) $y = \left|-x^2 + 2\right|$; 3) $y = \left|-x^2 - 1\right|$; 4) $y = \left|-2x^2 + 3\right|$.

16.60. 1) $y = \left|(x-2)^2 - 3\right|$; 2) $y = \left|4x^2 + 4x - 2\right|$;

3) $y = x^2 + |x|$; 4) $y = x^2 - 2|x| - 1$.

16.61. 1) $y = \left|x^2 - 7x + 10\right| + 3$; 2) $y = \left|x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right| - 2$;

3) $y = \left|2x^2 - \frac{11}{2}x + 3\right| + 1$; 4) $y = \left|-3x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{8}\right| + 4$.

16.62. 1) $y = \frac{1}{2}x^3$; 2) $y = -x^3$; 3) $y = \frac{1}{3}x^4$; 4) $y = -2x^4$.

16.63. 1) $y = \sin 2x$; 2) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 3) $y = \cos 3x + 1$; 4) $y = 2\cos\frac{x}{3}$;

5) $y = \left|\sin\frac{x}{3}\right|$; 6) $y = |\cos x| - 1$; 7) $y = tg\,\frac{x}{2}$; 8) $y = |tg\,2x|$;

9) $y = \sin x + |\sin x|$; 10) $y = \cos x - |\cos x|$.

16.64. 1) $y = 3^x - 1$; 2) $y = 2 \cdot 5^x + 3$; 3) $y = 2^{-x} + 4$;

4) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$; 5) $y = 2^{|x|}$; 6) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$.

16.65. 1) $y = \log_2 x - 1$; 2) $y = \log_{1/3} x + 2$; 3) $y = -2\log_5 x + 1$;

4) $y=-3\log_{1/2}x+4$; 5) $y=\log_3|x|$; 6) $y=-\log_2|x|+1$;

7) $y=\log_4|x-1|$; 8) $y=\log_{1/3}|x+2|$.

§17. სიმრავლეები. ოპერაციები სიმრავლეებზე

17.1. მართებულია თუ არა შემდეგი ჩანაწერი?

1) $2\in\{0;-2;2;6\}$ 2) $-3\in\{-6;5;3;0\}$

3) $3\in N$ 4) $7\notin N$

5) $7\in\{2n-1\,|\,n\in N\}$ 6) $9\notin\{2n\,|\,n\in Z)$

7) $\pi\in Q$ 8) $\sqrt{3}\in Q$

17.2. ჩაწერეთ მოცემული სიმრავლე მისი ელემენტების ჩამოთვლით.

1) $A=\{x\,|-12\le x<-7,\ x\in Z\}$; 2) $A=\{x\,|-5<x\le 4,\ x\in N\}$;

3) $A=\{x\,|\,(x^2-1)(x^2-3)=0,\ x\in Z\}$;

4) $A=\{x\,|\,|x|<5,\ x\in N\}$; 5) $A=\{x\,|\,|x-1|<2,\ x\in Z\}$;

6) $A=\{x\,|\,x\cdot y=12,\ x\in N\}$;

7) $A=\{x\,|\,x=(a,b)$ უსჯ $(a,b)=18,\ a\in N,\ b\in N,\ a<b\}$;

8) $A=\{x\,|\,x=(a,b)$ უსგ $(a,b)=6$, $a<20$, $b<20$, $a<b$, $a\in N,\ b\in N\}$.

17.3. ჩამოთვალეთ A სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლე, თუ:

1) $A=\{a;b\}$; 2) $A=\{a;b;c\}$.

17.4. ჩამოთვალეთ $A=\{a;\ b;\ c;\ d\}$ სიმრავლის:

1) ყველა ორელემენტიანი ქვესიმრავლე;

2) ყველა სამელემენტიანი ქვესიმრავლე.

17.5. ჩამოთვალეთ $A=\{2;3;4;5;6\}$ სიმრავლის ყველა ის ქვესიმრავლე, რომლისთვისაც $\{3;\ 5;\ 6\}$ იქნება ერთ-ერთი ქვესიმრავლე.

17.6. ჭეშმარიტია თუ არა შემდეგი ჩანაწერი?

1) $\{2\}\subset\{2;3;4\}$; 2) $a\subset\{2;a;c\}$.

17.7. ვთქვათ $A=\{2;3;\{2;3\};\{1;4\}\}$. ჭეშმარიტია თუ არა შემდეგი ჩანაწერი?

1) $2\notin A$; 2) $\{3;\{2;3\}\}\subset A$;

3) $\{1;4\}\subset A$; 4) $\{2;3\}\in A$.

17.8. თუ $x \in A \setminus B$, მაშინ მართებულია თუ არა შემდეგი ჩანაწერი?

1) $x \in A$ და $x \in B$; 2) $x \notin A$ და $x \notin B$;

3) $x \in A$ და $x \notin B$; 4) $x \notin B$ და $x \in B$.

17.9. თუ $x \in A \cap B$, მაშინ მართებულია თუ არა შემდეგი ჩანაწერი?

1) $x \in A$ და $x \notin B$; 2) $x \in A$ და $x \in B$;

3) $x \notin A$ და $x \in B$; 4) $x \notin A$ და $x \notin B$.

17.10. იპოვეთ $A \cup B$, თუ

1) $A = \{1; 2; 4; 5\}$, $B = \{3; 4; 5; 6\}$; 2) $A = \{1; 3; 4\}$, $B = \{3; 5; 7\}$;

3) $A = [2; 5]$, $B = [3; 7]$; 4) $A = [-\infty; 8)$, $B = (-2; 10]$.

17.11. იპოვეთ $A \cap B$, თუ

1) $A = \{2; 3; 4; 6\}$, $B = \{3; 5; 6\}$; 2) $A = \{3; 4; 6; 8\}$, $B = \{2; 4; 7; 8\}$;

3) $A = [2; 4]$, $B = [3; 6]$;

4) A არის რომბების სიმრავლე, B არის მართკუთხედების სიმრავლე.

17.12. იპოვეთ $A \setminus B$, თუ

1) $A = \{3; 5; 7\}$, $B = \{5; 6; 8\}$; 2) $A = \{1; 2; 4; 6\}$, $B = \{2; 4; 7; 8\}$;

3) $A = [3; 5]$, $B = [4; 6]$; 4) $A = [2; 6]$, $B =]3; 5]$.

17.13. ვთქვათ $A = \{1; 3; 4\}$ და $B = \{2; 3; 5\}$. იპოვეთ:

1) $A \cup B$ 2) $A \cap B$ 3) $A \setminus B$

4) $B \setminus A$ 5) $A \setminus (A \cup B)$ 6) $A \setminus (A \cap B)$.

17.14. ვთქვათ A, B და C ნებისმიერი სიმრავლეებია. არის თუ არა შემდეგი ჩანაწერი აუცილებლად ჭეშმარიტი?

1) $(A \cap B) \setminus C \subset A$ 2) $(A \cup B) \cap C \subset A$

3) $(A \cup B) \setminus (B \cup C) \subset A$ 4) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \subset A$

17.15. ცნობილია, რომ

$A \cup B = \{-3; -2; -1; 0; 2; 4; 6; 7; 9\}$;

$A \setminus B = \{-3; -2; -1\}$; $B \setminus A = \{4; 6; 9\}$

იპოვეთ:

1) A; 2) B; 3) $A \cap B$; 4) $A \setminus (A \cap B)$.

17.16. ცნობილია, რომ

$A \setminus B = \{-1; 0; 1; 2\}$, $A \cup B = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$;

$C \setminus B = \{2; 9; 10; 11\}$, $A \cap B = \{3; 5\}$; $B \cap C = \{8\}$.

იპოვეთ:

1) A 2) B 3) C 4) $A \setminus C$ 5) $A \cap C$

17.17. ცნობილია, რომ
$A \cap B = \{0; 1; 5\}$, $C = \{-2; -1; 0; 1; 6; 7\}$,
იპოვეთ $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.

17.18. ცნობილია, რომ
$A \cup B = \{-3; -2; -1; 0; 2; 4; 6\}$,
$C = \{-2; 0; 4; 7; 8; 9; 10\}$.
იპოვეთ: $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

17.19. თუ $n(A) = 10$, $n(B) = 10$, $n(A \cup B) = 20$, მაშინ ჭეშმარიტია, თუ არა შემდეგი ჩანაწერი?
1) $A = B$ 2) $A \cap B = \varnothing$
3) $A \cap B = A \cup B$ 4) $n(A \cap B) = 10$.

17.20. თუ $n(A) = 10$, $n(B) = 10$, $n(A \cap B) = 10$, მაშინ ჭეშმარიტია, თუ არა შემდეგი ჩანაწერი?
1) $A \cap B = \varnothing$ 2) $n(A \cup B) = 20$
3) $A = B$ 4) $A \setminus B = A$.

17.21. ცნობილია, რომ $n(A) = 60$, $n(B) = 85$, $n(A \cup B) = 120$. იპოვეთ $n(A \cap B)$.

17.22. ცნობილია, რომ $n(A) = 50$, $n(B) = 75$, $n(A \cap B) = 40$. იპოვეთ $n(A \cup B)$.

17.23. მეათე კლასში 42 მოსწავლეა. მათგან თითოეული სწავლობს ინგლისური და გერმანული ენებიდან ერთს მაინც. ამ კლასის 32 მოსწავლე სწავლობს ინგლისურს და 24-გერმანულს. რამდენი მოსწავლე სწავლობს ორივე ამ ენას?

17.24. საჭიდაო დარბაზში მყოფი სპორტსმენებიდან 45 ვარჯიშობს ძიუდოში, 24 სამბოში, 12 – როგორც სამბოში ასევე ძიუდოში, ხოლო 8 – ამ სახეობებიდან არც ერთში. რამდენი სპორტსმენია დარბაზში?

17.25. ქალაქის ყოველმა მცხოვრებმა იცის ქართული და რუსული ენებიდან ერთი მაინც. ქართული იცის მოსახლეობის 85%-მა, ხოლო რუსული – 65%-მა. ქალაქის მოსახლეობის რამდენმა პროცენტმა იცის ორივე ეს ენა?

17.26. კლასის ყოველი მოსწავლიდან თითოეული დადის ცეკვისა და სიმღერის წრეებიდან ერთში მაინც. ცეკვის წრეში

დადის მოსწავლეთა $\dfrac{3}{4}$ ნაწილი, ხოლო სიმღერის წრეში – $\dfrac{4}{5}$ ნაწილი. კლასის მოსწავლეთა რა ნაწილი დადის ორივე ამ წრეში ერთდროულად?

§18. კომბინატორიკის ელემენტები

18.1. გამოთვალეთ
1) $4!$ 2) $5!$ 3) $6! - 5!$ 4) $3! + 4!$
5) $\dfrac{8!}{6!}$ 6) $\dfrac{10!}{7!}$ 7) $\dfrac{8!-6!}{5!}$ 8) $\dfrac{7!-5!}{205}$

18.2. გაამარტივეთ გამოსახულება
1) $\dfrac{n!}{(n-3)!}$ 2) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$
3) $\dfrac{3n\cdot(3n-1)}{(3n)!}$ 4) $\dfrac{1}{(n+1)!}-\dfrac{1}{(n+2)!}$

გამოთვალეთ (№№18.3-18.5)

18.3. 1) P_3 2) P_5 3) $\dfrac{P_6}{P_4}$
4) $P_2\cdot P_4$ 5) $\dfrac{P_7+P_6}{P_5}$ 6) $\dfrac{15!}{30\cdot P_{12}}$

18.4. 1) A_6^3 2) A_5^2 3) $\dfrac{A_7^5}{A_5^3}$ 4) $\dfrac{A_5^4+A_5^3}{A_5^2}$

18.5. 1) C_5^2 2) C_5^3 3) C_5^4
4) C_{10}^1 5) $C_5^3+C_6^4$ 6) $\dfrac{C_7^2-C_6^5}{C_4^2}$

18.6. რამდენი ხერხით შეიძლება დავსვათ მერხზე ერთმანეთის გვერდით სამი ბავშვი?

18.7. რამდენი ხერხით შეიძლება შევადგინოთ სია 4 მოსწავლისაგან?

18.8. პირველი კლასის მოსწავლეები ორშაბათობით სწავლობენ სამ საგანს. ცხრილის შედგენის რამდენი ვარიანტი არსებობს ორშაბათისთვის?

18.9. აზარტული თამაშების მრგვალ მაგიდასთან 8 ადგილია. რამდენი სხვადასხვა ხერხით შეიძლება დავსვათ რვა მოთამაშისაგან შემდგარი ჯგუფი ამ მაგიდასთან?

18.10. მრგვალი მაგიდის გარშემო 10 ადგილია. რამდენი ხერხით შეიძლება დავსვათ ამ ადგილებზე 3 ბავშვი?

18.11. ბანკს შეუძლია 2 ერთმანეთისაგან განსხვავებული კრედიტის გაცემა. მსურველთა რიცხვია 8. კრედიტის გაცემის რამდენი ვარიანტი არსებობს?

18.12. რამდენი ხერხით შეიძლება ოთხი კაცის არჩევა ოთხ სხვადასხვა თანამდებობაზე, თუ ამ თანამდებობების კანდიდატთა რიცხვია 9?

18.13. მოსწავლემ უნდა ჩააბაროს 3 გამოცდა 6 დღეში. რამდენი ხერხით შეიძლება შევადგინოთ გამოცდების ცხრილი? (ერთ დღეს ინიშნება მხოლოდ ერთი გამოცდა).

18.14. მოსწავლემ 6 დღეში უნდა ჩააბაროს 3 გამოცდა: ქართულში, ინგლისურში და მათემატიკაში. რამდენი ხერხით შეიძლება შევადგინოთ გამოცდების ცხრილი, თუ მათემატიკის გამოცდა უნდა დაინიშნოს ბოლო დღეს?

18.15. მოსწავლემ უნდა ჩააბაროს 4 გამოცდა 8 დღეში. რამდენი ხერხით შეიძლება შევადგინოთ გამოცდების ცხრილი, თუ ერთ-ერთი გამოცდა უნდა დაინიშნოს მერვე დღეს?

18.16. მოჭადრაკეთა გუნდისათვის 4 კანდიდატიდან უნდა შეირჩეს 3. რამდენი ხერხით შეიძლება შევადგინოთ გუნდი?

18.17. 7 კანდიდატიდან უნდა შევადგინოთ 3 კაციანი კომისია. რამდენი ხერხით შეიძლება ამის გაკეთება?

18.18. ოთახში 6 ნათურაა. რამდენი ხერხით შეიძლება ოთახის განათება ისე, რომ ანთებული იყოს ზუსტად 2 ნათურა.

18.19. რამდენი ხერხით შეიძლება 15 მოსწავლისაგან შედგენილი კლასის ორ ჯგუფად გაყოფა ისე, რომ ერთ-ერთ ჯგუფში ოთხი მოსწავლე იყოს?

18.20. წრეწირზე მოცემულია 9 წერტილი. რამდენი ისეთი სამკუთხედი არსებობს, რომელთა წვეროები ამ წერტილებს ემთხვევა?

18.21. წრეწირზე მოცემულია *A, B, C, D, E* და *F* წერტილები. რამდენი სამკუთხედი არსებობს რომელთა ერთ-ერთი წვერო *A* წერტილშია?

18.22. ქვედანაყოფში 10 ჯარისკაცი და 5 ოფიცერია. რამდენი ხერხით შეიძლება 3 ჯარისკაცისა და ერთი ოფიცრისაგან შედგენილი რაზმის გამოყოფა?

18.23. იპოვეთ იმ ორნიშნა რიცხვების რაოდენობა, რომელთა ორივე ციფრი ლუწია.

18.24. მეათე კლასში ისწავლება 10 საგანი. ორშაბათს ამ კლასის მოსწავლეებს აქვთ 6 გაკვეთილი, ამასთან ყველა გაკვეთილი განსხვავებულია. რამდენი ხერხით შეიძლება ორშაბათის გაკვეთილების ცხრილის შედგენა.

18.25. ჩემპიონატში მონაწილეობს 16 გუნდი. რამდენი ხერხით შეიძლება განაწილდეს პირველი და მეორე ადგილები?

18.26. რამდენი სამნიშნა რიცხვი შეიძლება შევადგინოთ ციფრებისაგან 1, 2, 3, 4, 5?

18.27. იპოვეთ იმ ხუთნიშნა რიცხვების რაოდენობა, რომელშიაც ყველა ციფრი კენტია.

18.28. რამდენი სხვადასხვა ოთხნიშნა რიცხვი შეიძლება შევადგინოთ 0, 1, 2, 3 ციფრების საშუალებით? (ციფრები შეიძლება განმეორდეს).

18.29. იპოვეთ ყველა იმ ოთხნიშნა რიცხვის ციფრების ჯამი, რომელიც შედგენილია ციფრებისაგან 1, 2, 3, 4? (თითოეული ციფრი გვხვდება მხოლოდ ერთჯერ).

18.30. რამდენი ოთხნიშნა რიცხვი შეიძლება შევადგინოთ ციფრებისაგან 0, 1, 2, 3, 4, 5, თუ: 1) თითოეული ციფრი გვხვდება მხოლოდ ერთჯერ; 2) ციფრები შეიძლება განმეორდეს; 3) მიღებული რიცხვი უნდა იყოს კენტი (ციფრები შეიძლება განმეორდეს).

18.31. ჯგუფში 10 ადამიანია: 4 კაცი, 4 ქალი და 2 ბავშვი. რამდენი 3 ადამიანისაგან შედგენილი ჯგუფის შედგენა შეიძლება ამ პიროვნებებისგან ისე, რომ თითოეულ ჯგუფში იყოს ერთი კაცი, ერთი ქალი და ერთი ბავშვი?

18.32. რამდენი ხერხით შეიძლება დავალაგოთ კედლის გასწვრივ 5 სკამი, რომელთაგან 3 ერთნაირია, ხოლო დანარჩენი 2 ერთმანეთისაგან განსხვავებული?

18.33. გვაქვს 4 თეთრი და 3 შავი ბურთი. რამდენი ხერხით შეიძლება დავალაგოთ ერთ რიგში ეს ბურთები?

18.34. ჩოგბურთელთა გუნდი შედგება 3 ბიჭისა და 2 გოგოსაგან. რამდენი ხერხით შეიძლება ასეთი გუნდის შედგენა 10 ბიჭისა და 6 გოგოსაგან?

18.35. ზურას დაავიწყდა ნაცნობის ტელეფონის 6-ციფრიანი ნომერი, მაგრამ მას ახსოვდა რომ ეს ნომერი შედგება ხუთივე კენტი ციფრისაგან და ციფრი 6-გან, რომელიც მოსდევს ციფრ 3-ს. რამდენი განსხვავებული ნომერი უნდა აკრიფოს ზურამ, რომ აუცილებლად შეძლოს თავის ნაცნობთან დაკავშირება?

§19. მონაცემთა ანალიზი და სტატისტიკა

19.1. იპოვეთ შემდეგი მონაცემების საშუალო:

1) 5; 7; 7; 10; 11; 2 2) 3; –4; 12; 0; 8; 5; 11

3) 1,5; –1,3; 0,8; 3,8 4) $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{6}$; $-\frac{1}{4}$; $3\frac{3}{4}$; 6

19.2. იპოვეთ x, თუ:

1) –2; 0; 3; x; 4 რიცხვების საშუალოა 1.

2) x –1; 2; –4; $3x$ რიცხვების საშუალოა 2.

19.3. იპოვეთ შემდეგი მონაცემების მედიანა:

1) –2; 3; –4; 5; 0; 7; 8 2) –1; 4; –3; 6; 5; –6; 10; 0; 8

3) 2; –7; 0; –1; 8; 4 4) 1; –1; 5; –6; 7; –2; 8; 9

5) 0,75; $\frac{11}{12}$; 0,4; $\frac{5}{6}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$ 6) $\frac{5}{7}$; $\frac{19}{30}$; $\frac{31}{42}$; $\frac{2}{3}$; 0,3

7) $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$; 3; $2\sqrt{5}$; $\sqrt{13}$

8) 6; $4\sqrt{3}$; $5\sqrt{5}$; $4\sqrt{7}$; $2\sqrt{7}$; $6\sqrt{3}$

19.4. იპოვეთ x, თუ:

1) 3; 0; –0,9; 4; 5; x; 7; –1,2 მონაცემების მედიანაა 2,5.

2) 0; $1\frac{1}{3}$; $-1\frac{1}{2}$; 0,8; x; –2,5 მონაცემების მედიანაა $\frac{1}{3}$.

19.5. იპოვეთ შემდეგი მონაცემების გაბნევის დიაპაზონი:

1) 1; –2; 3; –6; –5; 4; 6 2) –2; 7; 0; –3,7; 2,5; 9,3; 7

3) 2,5; –2; 0; $2\frac{2}{3}$; –3; –3,2; $2\frac{4}{5}$

4) $5\sqrt{2}$; $2\sqrt{19}$; $4\sqrt{5}$; $-2\sqrt{5}$; $-3\sqrt{2}$; $2\sqrt{13}$

19.6. შეადგინეთ შემდეგი მონაცემების სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი:

1) 3; 5; 4; 4; 3; 5; 6; 0; 5; 6; 0; 3

2) –2; 3; 0; 1; 4; 3; 4; 0; –2; 1; 4; 4; 3; 3

19.7. იპოვეთ შემდეგი მონაცემების მოდა:

1) 2; –1; –2; –2; 3; 4; –2; 4; 1; 2; –2

2) 3; 5; 0; 1; –2; 5; 2; 5; 2; 3; 2

3) 2; 0; –3; 1; 5; –2; 4; 7; 8

4) 4; 2; 0; –1; 4; 2; 1; 3; –2

19.8. იპოვეთ შემდეგი მონაცემების საშუალო კვადრატული (სტანდარტული) გადახრა:

1) –2; 3; 0; 5 2) –2; –1; 0: 5: 8

3) 3; –2; 2; 1; 3; 5 4) –7; –1; 2; 3; –1; 8; –11

19.9. იპოვეთ შემდეგი მონაცემების საშუალო, მედიანა, დიაპაზონი, მოდა და საშუალო კვადრატული გადახრა:

1) 1; 3; 5; 11 2) −8; 1; 0; 1; 4; 1; −6

19.10. 10-ჯერ ჩატარებული ცდის შედეგები მოცემულია სიხშირეთა ცხრილით

მნიშვნელობები	−1	0	1	2	3
სიხშირე	2	1	n	1	2

იპოვეთ n-ის მნიშვნელობა, საშუალო, მოდა, მედიანა, დიაპაზონი და საშუალო კვადრატული გადახრა.

19.11. 20-ჯერ ჩატარებული ცდის შედეგები მოცემულია სიხშირეთა ცხრილით

მნიშვნელობები	−3	−1	0	2	3	4
სიხშირე	n	2	8	m	4	1

ცნობილია, რომ ამ მონაცემების საშუალოა 0,7. იპოვეთ m-ის და n-ის მნიშვნელობები, მოდა, მედიანა და გაბნევის დიაპაზონი.

19.12. ექსპერიმენტის ჩატარების დროს მიღებული 6 მონაცემიდან 5-ის ფარდობითი სიხშირეებია $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{3}{20}$; $\frac{1}{2}$. იპოვეთ მეექვსე მონაცემის ფარდობითი სიხშირე.

19.13. ექსპერიმენტის ჩატარების დროს მიღებული 5 მონაცემიდან 3-ის ფარდობითი სიხშირეებია $\frac{1}{16}$; $\frac{3}{16}$; $\frac{3}{8}$. იპოვეთ მეოთხე მონაცემის ფარდობითი სიხშირე, თუ ის 2-ჯერ მეტია მეხუთე მონაცემის ფარდობით სიხშირეზე.

19.14. სასკოლო წერაზე მოსწავლეების მიერ მათემატიკაში მიღებული დადებითი შეფასებების ფარდობით სიხშირეთა ცხრილია

ქულა	6	7	8	9	10
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$

1) რამდენმა მოსწავლემ მიიღო დადებითი შეფასება, თუ ექვსიანების სიხშირე 4-ით ნაკლებია ათიანების სიხშირეზე?
2) რამდენმა მოსწავლემ მიიღო დადებითი შეფასება, თუ შვიდიანების სიხშირე 2-ით მეტია ცხრიანების სიხშირეზე?

3) რამდენმა მოსწავლემ მიიღო 9 ქულა, თუ რვიანებისა და ათიანების სიხშირეთა ჯამია 100?

4) რამდენმა მოსწავლემ მიიღო 8 ქულა, თუ ექვსიანებისა და შვიდიანების სიხშირეების ჯამი 10-ით მეტია ათიანების სიხშირეზე?

19.15. ტყვიის მსროლელმა შეჯიბრების დროს 10-იანში მოარტყა ერთხელ, 9-იანში – სამჯერ, 8-იანში – სამჯერ, 7-იანში – ერთხელ და 6-იანში – ორჯერ. ამ მონაცემებით შეადგინეთ მსროლელის მიერ შეჯიბრებაზე მიღებული ქულების სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი. იპოვეთ ამ მონაცემების საშუალო, დიაპაზონი, მოდა, მედიანა და საშუალო კვადრატული გადახრა.

19.16. კამათლის 12-ჯერ გაგორების დროს 1-იანი მოვიდა ორჯერ, 3-იანი – ორჯერ, 4-იანი – ორჯერ, 5-იანი – ოღხჯერ და 6-იანი – ერთხელ. ამ მონაცემებით შეადგინეთ მოსული რიცხვების სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი. იპოვეთ ამ მონაცემების საშუალო, დიაპაზონი, მოდა, მედიანა და საშუალო კვადრატული გადახრა.

19.17. მოსწავლემ სასწავლო წლის განმავლობაში მათემატიკის საკონტროლო წერებზე 10 ქულა მიიღო ექვსჯერ, 9 ქულა – ოთხჯერ, 8 ქულა – სამჯერ და 6 ქულა – ერთხელ. ამ მონაცემებით შეადგინეთ მოსწავლის მიერ მიღებული ქულების სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი. იპოვეთ ამ მონაცემების საშუალო, დიაპაზონი, მოდა, მედიანა და საშუალო კვადრატული გადახრა.

19.18. საყოფაცხოვრებო ტექნიკის მაღაზიის მიერ ერთი კვირის განმავლობაში გაყიდული მაცივრების, ტელევიზორების, მტვერსასრუტების და გაზქურების სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა ცხრილია

დასახელება	მაცივარი	ტელევიზორი	მტვერსასრუტი	გაზქურა
სიხშირე	x	81	54	30
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{1}{12}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{10}$	y

იპოვეთ: 1) ჩამოთვლილი ტექნიკის რა რაოდენობა გაიყიდა მთლიანად ამ კვირის განმავლობაში; 2) მაცივრის გაყიდვის სიხშირე; 3) გაზქურის გაყიდვის ფარდობითი სიხშირე.

19.19. საქართველოს სატელევიზიო არსებით ერთი კვირის განმავლობაში გადაცემული საინფორმაციო გამოშვების სიხშირე და ფარდობითი სიხშირეა შესაბამისად 200 და $\frac{2}{7}$, სპორ-

ტული გადაცემების – 40 და $\frac{2}{35}$, ხოლო გასართობი გადაცემების – 60 და $\frac{3}{35}$. იპოვეთ ყველა სხვა გადაცემების სიხშირე და ფარდობითი სიხშირე.

19.20. არჩევნებში 5 კანდიდატის მიერ მიღებული ხმების ფარდობით სიხშირეთა ცხრილია (იგულისხმება, რომ არც ერთი ბიულეტენი არ გაფუჭებულა)

კანდიდატი	I	II	III	IV	V
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	x	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{15}$

რამდენი ხმა მიიღო III კანდიდატმა, თუ I-მა მიიღო 40 ხმით ნაკლები V-ზე?

19.21. ავტოგასამართი სადგურის მიერ ერთი დღის განმავლობაში გაყიდული საწვავის ფარდობით სიხშირეთა ცხრილია

დასახელება	ნორმალი	რეგულარი	სუპერი	დიზელი
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{15}$	x

რამდენი ლიტრი დიზელის საწვავი გაიყიდა ამ დღეს, თუ სუპერი გაიყიდა 1600 ლიტრით ნაკლები, ვიდრე ნორმალი და რეგულარი ერთად?

§20. ხდომილობის ალბათობა

20.1. ყუთში მხოლოდ წითელი, თეთრი და ლურჯი ბურთებია. შემდეგი ხდომილობებიდან რომელია აუცილებელი, შემთხვევითი, შეუძლებელი?

1) ამოღებული ბურთი შავი ფერისაა;
2) ამოღებული ბურთი ლურჯია;
3) ამოღებული ბურთი ან თეთრია ან ლურჯი ან წითელი;
3) ამოღებული ბურთი არის თეთრი ან შავი.

20.2. ერთი კამათლის გაგორებისას ჩამოთვლილი ხდომილობებიდან რომელია აუცილებელი, შემთხვევითი, შეუძლებელი?

1) სამზე ნაკლები რიცხვის მოსვლა;
2) ლუწი რიცხვის მოსვლა;
3) შვიდის ჯერადი რიცხვის მოსვლა;
4) 60-ის გამყოფის მოსვლა;
5) ხუთის ჯერადი რიცხვის მოსვლა;

6) ლუწი ან კენტი რიცხვის მოსვლა.

20.3. ერთი კამათლის 13-ჯერ გაგორებისას ჩამოთვლილი ხდომილობებიდან რომელია აუცილებელი, შემთხვევითი, შეუძლებელი?

1) ყველა გაგორებისას მოსული ქულა ერთიდაიგივეა;

2) ყველა გაგორებისას მოსული ქულების ჯამი 12-ია;

3) ყველა გაგორებისას მოსული ქულების ჯამი არაუმეტეს 78-ია;

4) რომელი ქულა სამჯერ მაინც მოვა.

20.4. 52 კარტიანი დასტიდან იღებენ 5 კარტს. ჩამოთვლილი ხდომილობებიდან რომელია აუცილებელი, შემთხვევითი, შეუძლებელი?

1) ამოღებული კარტებიდან ყველა რვიანია;

2) ამოღებულ კარტებში ყველა ექვსიანია;

3) ამოღებულ კარტებში სამი ერთი და იმავე ფერის შვიდიანია;

4) ამოღებულ კარტებში ერთი და იმავე რაოდენობის ათიანი და რვიანი.

20.5. რამდენი ხდომილობისაგან შედგება ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე, თუ ექსპერიმენტი მდგომარეობს შემდეგში:

1) ყუთიდან, რომელშიც მხოლოდ წითელი, თეთრი და შავი ბურთულებია, ვიღებთ ერთ ბურთულას;

2) კამათელს ვაგორებთ ერთხელ;

3) კამათელს ვაგორებთ ორჯერ;

4) მონეტას ვაგდებთ ორჯერ;

5) მონეტას ვაგდებთ სამჯერ;

6) 36 კარტიანი დასტიდან ვიღებთ 2 კარტს;

7) ერთდროულად ვაგორებთ ერთ კამათელს და ვაგდებთ ერთ მონეტას;

8) ყუთში 5 ბურთულაა, რომლებიც გადანომრილია რიცხვებით 1; 2; 3; 4; 5. ვიღებთ ჯერ ერთ ბურთულას, ვინიშნავთ ნომერს და ვაბრუნებთ, შემდეგ მეორეს – ვინიშნავთ ნომერს და ვაბრუნებთ;

9) ყუთში 5 ბურთულაა, რომლებიც გადანომრილია რიცხვებით 1; 2; 3; 4; 5. ერთმანეთის მიყოლებით ვიღებთ ჯერ ერთ ბურთულას და ვინიშნავთ ნომერს, შემდეგ მეორეს – ვინიშნავთ ნომერს;

10) გვაქვს კარტის ორი დასტა: ერთი 36 კარტიანი, ხოლო მეორე 52 კარტიანი. თითო დასტიდან ვიღებთ თითო კარტს.

20.6. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ კამათლის ერთხელ გაგორებისას განხორციელდება შემდეგი ხდომილობა:

1) 3-ის მოსვლა;
2) ლუწი რიცხვის მოსვლა;
3) კენტი რიცხვის მოსვლა;
4) მარტივი რიცხვის მოსვლა;
5) 4-ზე მეტი რიცხვის მოსვლა;
6) 5-ზე არანაკლები რიცხვის მოსვლა;
7) ლუწი მარტივი რიცხვის მოსვლა;
8) 2-ზე ნაკლები ან 4-ზე მეტი რიცხვის მოსვლა;
9) 2-ის არ მოსვლა;
10) მარტივი რიცხვის არ მოსვლა;
11) 2-ზე მეტი და 5-ზე ნაკლები რიცხვის არ მოსვლა;
12) 30-ის გამყოფის მოსვლა.

20.7. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მონეტის ორჯერ აგდებისას განხორციელდება შემდეგი ხდომილობა:

1) ორივეჯერ საფასურის მოვიდა;
2) საფასური ერთხელ მაინც მოვიდა;
3) ორივეჯერ ერთიდაიგივე მოსვლა;
4) მოვიდა ერთხელ საფასური და ერთხელ გერბი;
5) საფასურის არ მოსვლა;
6) პირველად მოვიდა საფასური და მეორედ – გერბი.

20.8. ყუთში 8 თეთრი და 12 წითელი ბურთულაა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ბურთულა:

1) იქნება თეთრი?
2) არ იქნება თეთრი.

20.9. კრებას ესწრება 80 ქალი და 30 კაცი. მათგან შემთხვევით ირჩევენ მდივანს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ კრების მდივანი იქნება ქალი?

20.10. ყუთში 25 წითელი, 15 შავი და 10 თეთრი ბურთია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ:

1) შემთხვევით ამოღებული ბურთი შავია;
2) შემთხვევით ამოღებული ბურთი თეთრია;
3) შემთხვევით ამოღებული ბურთი ან წითელია ან შავი;
4) შემთხვევით ამოღებული ბურთი არ არის წითელი.

20.11. ყუთში 11 შავი და 5 თეთრი ბირთვია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ:

1) შემთხვევით ამოღებული 2 ბირთვიდან ორივე თეთრია;
2) შემთხვევით ამოღებული 2 ბირთვიდან ორივე შავია?
3) შემთხვევით ამოღებული ორი ბირთვი სხვადასხვა ფერისაა?

4) შემთხვევით ამოღებული ორი ბირთვი ერთი და იგივე ფერისაა?
5) შემთხვევით ამოღებული 3 ბირთვიდან სამივე თეთრია?
6) შემთხვევით ამოღებული 3 ბირთვიდან სამივე შავია?
7) შემთხვევით ამოღებული 3 ბირთვიდან სამივე ერთი ფერისაა?
8) შემთხვევით ამოღებული 3 ბირთვიდან სამივე არაა ერთნაირი ფერის?

20.12. ყუთში 10 ლურჯი, 6 მწვანე და 4 ყვითელი ბურთია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ:

1) შემთხვევით ამოღებული 2 ბურთიდან ორივე იქნება მწვანე?
2) შემთხვევით ამოღებული 2 ბურთიდან ორივე იქნება ყვითელი?
3) შემთხვევით ამოღებული 2 ბურთიდან ორივე იქნება ლურჯი?
4) შემთხვევით ამოღებული 2 ბურთიდან ორივე იქნება ერთნაირი ფერის?
5) შემთხვევით ამოღებული 2 ბურთიდან ერთი იქნება მწვანე და ერთი – ლურჯი?
6) შემთხვევით ამოღებული 2 ბურთიდან არც ერთი არ იქნება ლურჯი?
7) შემთხვევით ამოღებული 3 ბურთიდან სამივე იქნება მწვანე?
8) შემთხვევით ამოღებული 3 ბურთიდან სამივე იქნება ერთი ფერის?

20.13. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ კამათლის ორჯერ გაგორებისას განხორციელდება შემდეგი ხდომილობა:

1) ორი ერთნაირი რიცხვის მოსვლა;
2) ორივე ლუწი რიცხვის მოსვლა;
3) ერთი ლუწი და ერთი კენტი რიცხვის მოსვლა;
4) ერთი მაინც 1-იანის მოსვლა;
5) ერთი მაინც კენტი რიცხვის მოსვლა;
6) ორივე მარტივი რიცხვის მოსვლა;
7) მოსული რიცხვების ჯამი არის 11;
8) მოსული რიცხვების ჯამი არის 8;
9) მოსული რიცხვების ჯამი არის 7;
10) მოსული რიცხვებიდან პირველი მეორეზე 3-ით ნაკლებია;
11) მოსული რიცხვების ჯამი არის 5;
12) მოსული რიცხვებიდან ერთ-ერთი მეორის კვადრატია;
13) მოსული რიცხვების ჯამი არის 13;

14) მოსული რიცხვების ჯამი არის 13-ზე ნაკლები;
15) მოსული რიცხვები ერთმანეთისაგან 2-ით განსხვავდება;
16) მოსული რიცხვებიდან ერთ-ერთი მეორის გამყოფია;
17) მოსული რიცხვებიდან პირველი მეორის გამყოფია;
18) მოსული რიცხვების ჯამი არ უდრის 9-ს;
19) არც ერთხელ არ მოვიდა ორიანი;
20) ორი ერთნაირი რიცხვის არ მოსვლა;
21) არც ერთხელ არ მოვიდა 4-ზე მეტი რიცხვი.

20.14. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მონეტის სამჯერ აგდებისას განხორციელდება შემდეგი ხდომილობა:
1) სამივეჯერ მოვა გერბი;
2) საფასური მოვა მხოლოდ ერთხელ;
3) ერთხელ მაინც მოვა საფასური;
4) ორჯერ მაინც მოვა გერბი;
5) გერბი უფრო მეტჯერ მოვა, ვიდრე საფასური;
6) საფასური ორჯერ არ მოვა.

20.15. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 36-კარტიანი დასტიდან დარიგებისას განხორციელდება შემდეგი ხდომილობა:
1) პირველი კარტი იქნება ჯვრის ტუზი;
2) პირველი კარტი იქნება ტუზი;
3) პირველი კარტი იქნება წითელი;
4) პირველი კარტი იქნება ჯვარი;
5) პირველი კარტი იქნება ტუზი ან 10-იანი;
6) პირველი კარტი არ იქნება 10-იანი;
7) პირველი კარტი არ იქნება ჯვარი;
8) პირველი კარტი არ იქნება არც ტუზი და არც 6-იანი;
9) პირველი ორი კარტი იქნება ტუზი;
10) პირველი და მესამე კარტი იქნება ჯვარი;
11) პირველი კარტი იქნება ჯვარი, ხოლო მეორე ყვავი;
12) პირველი კარტი იქნება ტუზი, ხოლო მერვე – რვიანი;
13) პირველი იქნება ტუზი, ხოლო მეორე არ იქნება 10-იანი;
14) არც პირველი და არც მეორე კარტი არ იქნება ტუზი.

20.16. აუზში არის 5 ცალი თევზი: მურწა, კალმახი, კეფალი, ქაშაყი და ორაგული. შემთხვევით ამოყავთ სამი თევზი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის აუცილებლად იქნება კალმახი?

20.17. ქისაში 5 მონეტაა: 2 ცალი 10-თეთრიანი, 3 ცალი 20-თეთრიანი. ქისიდან, მასში ჩაუხედავად, იღებენ ორ მონეტას. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული მონეტების ღირებულებების ჯამი არის 30 თეთრი.

20.18. მაღაზიამ მიიღო ახალი მოდელის ფეხსაცმელები: 40 ზომა 20 წყვილი, 41 ზომა 30 წყვილი, 42 ზომა 40 წყვილი და 43 ზონა 10 წყვილი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ:

1) შემთხვევით აღებული ერთი წყვილი ფეხსაცმელი აღმოჩნდება 41 ზომა?
2) შემთხვევით აღებული ერთი წყვილი ფეხსაცმელი აღმოჩნდება 42 ან 43 ზომა?
3) შემთხვევით აღებული ორი წყვილი ფეხსაცმელიდან ორივე აღმოჩნდება 40 ზომა?
4) შემთხვევით აღებული ორი წყვილი ფეხსაცმელიდან ერთ-ერთი აღმოჩნდება 40 ზომა, მეორე – 43?
5) შემთხვევით აღებული ორი წყვილი ფეხსაცმელიდან ერთი მაინც იქნება 40 ზომა?
6) შემთხვევით აღებული ორი წყვილი ფეხსაცმელიდან არც ერთი არ იქნება 42 ზომა?

20.19. ნიკას დაავიწყდა მეგობრის ტელეფონის 6-ციფრიანი ნომერი, მაგრამ მას ახსოვდა, რომ ამ ნომრის პირველი ციფრია 2, ხოლო დანარჩენი განსხვავებული კენტი ციფრებია. ნიკამ აკრიფა პირველი ციფრი 2, ხოლო დანარჩენი – შემთხვევით აღებული ერთმანეთისაგან განსხვავებული კენტი ციფრები. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ პირველივე აკრეფით ნიკა დაუკავშირდა მეგობარს?

20.20. გივის დაავიწყდა თავისი სეიფის ხუთნიშნა კოდი, თუმცა მას ახსოვდა, რომ ამ კოდის პირველი და ბოლო ციფრი ერთიდაიგივეა, ხოლო დანარჩენი სამი – ერთმანეთისაგან განსხვავებული კენტი ციფრებია. გივიმ შემთხვევით აკრიფა პირველი და ბოლო ერთიდაიგივე ციფრი და დანარჩენი ერთმანეთისაგან განსხვავებული სამი კენტი ციფრი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ გივი პირველივე ცდაზე გააღებს სეიფს?

20.21. ასოები, რომლებიც ქმნის სიტყვას „ურანი“, ხუთ ბარათზეა გამოსახული. ბარათები ყუთშია მოთავსებული. ალალბედზე იღებენ ერთმანეთის მიყოლებით ხუთივე ბარათს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ასოები (ამოღების თანმიმდევრობის გათვალისწინებით) ქმნის სიტყვას „უნარი“?

20.22. ყუთში მოთავსებულია 5 ბირთვი, რომლებიც გადანომრილია რიცხვებით: 1; 2; 3; 4; 5. ყუთიდან ერთმანეთის მიყოლებით ვიღებთ ბირთვებს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ბირთვები ამოღებული იქნება მათი ნორმების კლების მიხედვით?

20.23. სამშობიარო სახლში ელოდებიან 4 ბავშვის დაბადებას. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ყოველი ბავშვის წონა მის წინ დაბადებული ბავშვის წონაზე მეტია?

20.24. სიგრძეზე ხტომაში შეჯიბრების დროს სპორტსმენს აქვს 6 ცდის უფლება. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ იგი ყოველ ცდაზე გააუმჯობესებს წინა ცდის შედეგს?

20.25. კლასში 10 მოსწავლეა. მათ შორის მხოლოდ ორმა იცის ფრაგული ენა. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამ კლასის შემთხვევით შერჩეულ 5 მოსწავლეს შორის:

1) ორმა იცის ფრანგული ენა?
2) მხოლოდ ერთმა იცის ფრანგული ენა?
3) ერთმა მაინც იცის ფრანგული ენა?
4) არ იქნება ფრანგული ენის მცოდნე?

20.26. 10 მგზავრიდან თითოეულმა შემთხვევით შეარჩია 20-ვაგონიანი ელექტრომატარებლის თითო ვაგონი. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ყველა მგზავრი სხვადასხვა ვაგონში მოხვდება?

20.27. ყუთში მოთავსებულია 4 ბირთვი, რომლებზეც დაწერილია ნომრები: 2; 3; 6; 9. ერთმანეთის მიმდევრობით შემთხვევით ვიღებთ ჯერ ერთ ბირთვს და ვინიშნავთ მის ნომერს, შემდეგ მეორეს და ვინიშნავთ მის ნომერს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ჩანიშნული რიცხვების ნამრავლი არის 18?

20.28. სამშობიარო სახლში ელოდებიან 4 ბავშვის დაბადებას: 2 გოგონას და 2 ბიჭის. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ პირველი ორი დაბადებული ბავშვი იქნება ერთი და იგივე სქესის?

20.29. განათლების სამინისტრომ სკოლებისათვის შეიძინა კომპიუტერები: 80 ცალი „პენტიუმ-3“ და 20 ცალი „პენტიუმ-4“, რომელთაგან შემთხვევით აღებული 2 კომპიუტერი გადასცა ექსპერიმენტალურ სკოლას. რა არის ალბათობა იმისა, რომ:

1) ამ სკოლას შეხვდება ორივე „პერტიუმ-4“?
2) ამ სკოლას შეხვდება ორივე „პენტიუმ-3“?
3) ამ სკოლას შეხვდება ერთი „პენტიუმ-3“ და ერთი „პენტიუმ-4“?
4) ამ სკოლას შეხვდება ორივე ერთნაირი კომპიუტერი?

20.30. სტუდენტმა პროგრამით გათვალისწინებული 50 საკითხიდან მოამზადა 30. ყოველ ბილეთში სამი საკითხია. სტუდენტი ალალბედზე იღებს ბილეთს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ:

1) სტუდენტმა სამივე საკითხი იცის?

2) სტუდენტმა არც ერთი საკითხი არ იცის?
3) სტუდენტმა ორი საკითხი იცის და ერთი არ იცის?
4) სტუდენტმა ერთი საკითხი იცის და ორი არა?

20.31. ვთქვათ ყუთში 4 ბურთულაა, რომლებიც გადანომრილია რიცხვებით: 1; 2; 3; 4. ვიხილავთ ცდას: ვიღებთ ერთმანეთის მიყოლებით ჯერ ერთ ბურთულას, შემდეგ – მეორეს და ვინიშნავთ ამოღებული ბურთულების ნომრებს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ ცდის დროს ამოღებულ ორ ბურთულაზე:
1) ორივე ლუწი ნომერია;
2) ერთი ლუწი ნომერია და მეორე – კენტი.

20.32. ყუთში არის 4 ცალი სხვადასხვა ფერის ბურთი: წითელი, მწვანე, თეთრი და ლურჯი. ყუთიდან შემთხვევით ვიღებთ ერთ ბურთს, ვინიშნავთ ფერს და უკან ვაბრუნებთ. შემდეგ ისევ ვიღებთ ერთ ბურთს, ვინიშნავთ ფერს და უკან ვაბრუნებთ. შემდეგ იგივეს ვიმეორებთ მესამეჯერ. რა არის ალბათობა იმისა, რომ:
1) სამივეჯერ ამოღებული იქნება წითელი ბურთი?
2) პირველად ამოღებული ბურთი იქნება თეთრი, მეორედ ამოღებული – ლურჯი, ხოლო მესამედ ამოღებული – მწვანე?
3) ამოღებულ ბურთებს შორის ერთი იქნება თეთრი ფერის, ერთი – ლურჯი ფერის და ერთი – მწვანე ფერის;
4) ამოღებულ ბურთებს შორის ორი იქნება წითელი ფერის და ერთი – ლურჯი.

20.33. ვთქვათ ყუთში 4 ბურთულაა, რომლებიც გადანომრილია რიცხვებით: 1; 2; 3; 4. ვიხილავთ ცდას: ვიღებთ ჯერ ერთ ბურთულას, ვინიშნავთ ნომერს და ვაბრუნებთ, შემდეგ მეორეს – ვინიშნავთ ნომერს და ვაბრუნებთ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ ცდის დროს ამოღებულ ორ ბურთულაზე განსხვავებული ნომრებია.

20.34. ყუთში არის 5 სხვადასხვა ფერის ბურთულა. ყუთიდან შემთხვევით ვიღებთ ერთ ბურთულას ვინიშნავთ ფერს და ბურთულას უკან ვაბრუნებთ. შემდეგ ვიღებთ მეორეს – ვინიშნავთ ფერს და ვაბრუნებთ, შემდეგ მესამეს – ჩავინიშნავთ ფერს და ვაბრუნებთ. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ჩანიშნული ფერები განსხვავებული იქნება?

20.35. მოცემულია ციფრები 0; 1; 2; 3; 4. ამ ციფრებისაგან ადგენენ სამნიშნა რიცხვებს ისე, რომ მასში ციფრები არ მეორდება. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მიღებულ სამნიშნა რიცხვებს შორის შემთხვევით შერჩეული რიცხვი:

1) იქნება 5-ის ჯერადი?
2) არ არის 3-ის ჯერადი?
3) არის ლუწი?
4) იყოფა 4-ზე?

20.36. ვთქვათ ქალაქში მოძრავი ავტომობილების სანომრე ნიშნები სამნიშნაა: იწყება 001-ით და მთავრდება 999-ით. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მოცემული სერიის პირველივე შემხვედრი ავტომობილის სანომრე ნიშანში:
1) არ იქნება ერთნაირი ციფრები?
2) არის მხოლოდ ორი ერთნაირი ციფრი?
3) სამივე ციფრი ერთნაირი იქნება?
4) არის ზრდადობით დალაგებული მომდევნო ციფრები?
5) ნომერი შედგენილია მომდევნო ციფრებისაგან?
6) ციფრების ნამრავლი არის 0?

20.37. ვთქვათ A და B ორი არათავსებადი ხდომილობაა. გამოთვალეთ:
1) $P(A\cup B)$, თუ $P(A)=\dfrac{1}{3}$, $P(B)=\dfrac{1}{2}$;
2) $P(A\cup B)$, თუ $P(A)=0{,}25$, $P(B)=0{,}15$;
3) $P(A)$, თუ $P(B)=\dfrac{1}{5}$, $P(A\cup B)=\dfrac{3}{4}$;
4) $P(B)$, თუ $P(A)=0{,}32$, $P(A\cup B)=0{,}92$.

20.38. ვთქვათ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია. გამოთვალეთ:
1) $P(A\cap B)$, თუ $P(A)=\dfrac{2}{5}$, $P(B)=\dfrac{1}{2}$;
2) $P(A)$, თუ $P(B)=\dfrac{1}{8}$, $P(A\cap B)=\dfrac{1}{56}$.

20.39. ვთქვათ A და B რაიმე ხდომილობებია. გამოთვალეთ:
1) $P(A\cup B)$, თუ $P(A)=\dfrac{2}{3}$, $P(B)=\dfrac{1}{5}$, $P(A\cap B)=\dfrac{2}{15}$;
2) $P(A\cap B)$, თუ $P(A)=\dfrac{3}{7}$, $P(B)=\dfrac{2}{7}$, $P(A\cup B)=\dfrac{4}{7}$.

20.40. ვთქვათ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია. გამოთვალეთ:
1) $P(A\cup B)$, თუ $P(A)=\dfrac{1}{4}$, $P(B)=\dfrac{1}{3}$;
2) $P(A\cup B)$, თუ $P(A)=0{,}4$, $P(B)=0{,}5$;

3) $P(A\bigcup B)$, თუ $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(A\bigcap B)=\frac{2}{25}$;

4) $P(A\bigcup B)$, თუ $P(B)=0{,}1$, $P(A\bigcap B)=0{,}04$;

5) $P(A)$, თუ $P(B)=\frac{1}{4}$, $P(A\bigcup B)=\frac{3}{4}$;

6) $P(B)$, თუ $P(A)=0{,}3$, $P(A\bigcup B)=0{,}44$;

7) $P(A\bigcap B)$, თუ $P(A)=\frac{3}{8}$, $P(A\bigcup B)=\frac{19}{24}$;

8) $P(A\bigcap B)$ თუ $P(A\bigcup B)=\frac{7}{9}$, $P(A)=2P(B)$.

20.41. ერთ ყუთში 5 თეთრი და 5 ლურჯი ბურთია, მეორეში კი 3 თეთრი და 2 ლურჯი. ორივე ყუთიდან ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ამოიღეს თითო-თითო ბურთი. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთებიდან ერთი მაინც იქნება თეთრი?

20.42. მათემატიკის 5 საგამოცდო ბილეთიდან სტუდენტს მომზადებული აქვს 2, ხოლო ფიზიკის 6 ბილეთიდან 3 ბილეთი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტს ამ ორი გამოცდიდან ერთხელ მაინც შეხვდება მომზადებული ბილეთი?

20.43. პირველ სამშობიაროში ელოდებიან 3 ბიჭის და 3 გოგონას დაბადებას, ხოლო მეორე სამშობიაროში – 2 ბიჭის და 1 გოგონას. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამ ორიდან ერთ სამშობიაროში მაინც პირველად დაბადებული ბავშვი იქნება ბიჭი?

20.44. ცნობილია, რომ A და B ხდომილობებიდან ერთი მაინც აუცილებლად განხორციელდება. ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობა განხორციელდება არის $\frac{2}{7}$, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ განხორციელდება B ხდომილობა – $\frac{4}{5}$. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ორივე A და B ხდომილობები ერთდროულად განხორციელდება?

20.45. ყუთში არის მხოლოდ წითელი და ლურჯი ბურთულები. ყუთიდან შემთხვევით იღებენ 2 ბურთულას. ალბათობა იმისა, რომ ამ ორი ბურთულიდან ერთი მაინც წითელია არის $\frac{2}{3}$, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ ერთ ბურთულა მაინც ლურჯია არის $\frac{3}{4}$. რას უდრის ალბათობა იმისა,

რომ ამოღებული ბურთულებიდან ერთი წითელია და ერთი ლურჯი?

§21. გეომეტრიული ალბათობა

21.1. მონაკვეთი დაყოფილია 5 ტოლ ნაწილად. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ მონაკვეთზე შემთხვევით შერჩეული წერტილი:
1) შუა ნაწილში მოხვდება;
2) შუა ნაწილში არ მოხვდება;
3) კიდურა ნაწილებში მოხვდება;
4) არ მოხვდება არც კიდურა ნაწილებში და არც შუა ნაწილში.

21.2. მონაკვეთი დაყოფილია 4 ნაწილად რომელთა სიგრძეების შეფარდებაა 2:4:5:7. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ მონაკვეთზე შემთხვევით შერჩეული წერტილი:
1) მოხვედრა ყველაზე მცირე სიგრძის ნაწილზე;
2) არ მოხვდება ყველაზე დიდი სიგრძის ნაწილზე.

21.3. რიცხვით ღერძზე მოცემულია მონაკვეთი [–4; 5]. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამ მონაკვეთზე შემთხვევით აღებული წერტილის x კოორდინატი აკმაყოფილებს უტოლობას:
1) $x \geq 4$; 2) $|x| \geq 3$.

21.4. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ტოლგვერდა სამკუთხედის სიმაღლეზე შემთხვევით აღებული წერტილი ეკუთვნის ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის დიამეტრს?

21.5. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ კვადრატის დიაგონალზე შემთხვევით აღებული წერტილი ეკუთვნის ამ კვადრატში ჩახაზული წრეწირის დიამეტრს?

21.6. რომბის მახვილი კუთხე 60°-ია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ რომბის დიდ დიაგონალზე შემთხვევით აღებული წერტილი ამ რომბში ჩახაზული წრეწირის დიამეტრზე მოხვდება?

21.7. რომბის მახვილი კუთხე 60°-ია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ რომბის მცირე დიაგონალზე შემთხვევით აღებული წერტილი ამ რომბში ჩახაზული წრეწირის დიამეტრზე მოხვდება?

21.8. რომბის მახვილი კუთხე 60°-ია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ რომბის დიდ დიაგონალზე შემთხვევით აღებული წერტილი ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებულ სიმაღლეებს შორის მოთავსდება?

21.9. *ABCD* მართკუთხედში *AB* =9 სმ, *BC* = 12 სმ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ *BC* გვერდზე შემთხვევით აღებული *K* წერტილისათვის შესრულდეს პირობა $\angle AKB < 45°$?

21.10. *ABC* სამკუთხედში *AB* =16 სმ, *AC* = 40 სმ, $\angle A$=60°. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ თუ *AC* გვერდზე შემთხვევით ავიღებთ *M* წერტილს შესრულდება პირობა $AB < BM$?

21.11. წრეწირის რადიუსი 5 სმ-ის ტოლია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მოცემული დიამეტრის პარალელურად შემთხვევით გავლებული ქორდის სიგრძე იქნება 8 სმ-ზე ნაკლები?

21.12. მონაკვეთის სიგრძე 5 სმ-ის ტოლია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ მონაკვეთზე შემთხვევით აღებული წერტილით იგი გაიყოფა ორ ისეთ მონაკვეთად, რომელთა სიგრძეების ნამრავლი 6-ზე ნაკლებია?

21.13. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია *AC* = 1სმ, *BC* = 2 სმ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ *BC* კათეტზე შემთხვევით აღებული წერტილი *A* წვეროდან უფრო ნაკლები მანძილით აღმოჩნდება დაშორებული, ვიდრე *B* წვეროდან?

21.14. *ABC* მართკუთხა სამკუთხედში $\angle A = 30°$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მანძილი ჰიპოტენუზაზე შემთხვევით აღებული წერტილიდან *A* წვერომდე *BC* კათეტის სიგრძეზე ნაკლებია?

21.15. *ABC* სამკუთხედში $AB:BC = 4:5$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მანძილი *AC* გვერდზე შემთხვევით აღებული წერტილიდან *AB* გვერდამდე ნაკლებია მანძილზე ამ წერტილიდან *BC* გვერდამდე?

21.16. *O* არის *ABCD* მართკუთხედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი, ხოლო *M* და *N* მართკუთხედის *AB* და *BC* გვერდების შუაწერტილებია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ *ABCD* მართკუთხედში შემთხვევით აღებული წერტილი მოხვდება *MBNO* მართკუთხედში?

21.17. *O* არის *ABCD* პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ პარალელოგრამში შემთხვევით აღებული წერტილი მოხვდება *AOB* სამკუთხედში?

21.18. *M* არის *ABC* სამკუთხედის *AC* გვერდის შუაწერტილი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ *ABC* სამკუთხედში შემთხვევით აღებული წერტილი *BMC* სამკუთხედში მოხვდება.

21.19. *O* არის *ABC* სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ *ABC* სამკუთხედში შემთხვევით აღებული წერტილი მოხვდება *BOC* სამკუთხედში?

21.20. O არის ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილი, ხოლო M – AB გვერდის შუაწერტილია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ABC სამკუთხედში შემთხვევით აღებული წერტილი მოხვდება AOM სამკუთხედში?

21.21. ორი კონცენტრული წრის რადიუსებია 4 სმ და 6 სმ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ დიდ წრეში შემთხვევით აღებული წერტილი:

1) მოხვდება პატარა წრეში?
2) არ მოხვდება პატარა წრეში?

21.22. $ABCD$ ტრაპეციის ფუძეებია $AD=10$ სმ და $BC=4$ სმ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ $ABCD$ ტრაპეციაში შემთხვევით აღებული წერტილი მოხვდება ABC სამკუთხედში?

21.23. $ABCD$ ტრაპეციის ფუძეებია $AD=14$ სმ, $BC=6$ სმ, ხოლო O დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ $ABCD$ ტრაპეციაში შემთხვევით აღებული წერტილი:

1) მოხვდება BOC სამკუთხედში;
2) მოხვდება AOD სამკუთხედში;
3) მოხვდება AOB სამკუთხედში.

21.24. ABC სამკუთხედში AC გვერდის პარალელური MN წრფე AB გვერდს ყოფს შეფარდებით 3:7 B წვეროს მხრიდან. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ABC სამკუთხედში შემთხვევით აღებული წერტილი მოხვდება $AMNC$ ოთხკუთხედში?

21.25. ABC სამკუთხედის AC გვერდზე აღებულია M წერტილი ისე, რომ $AM:MC=5:9$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ABC სამკუთხედში შემთხვევით აღებული წერტილი მოხვდება MBC სამკუთხედში.

21.26. სამკუთხედში, რომლის გვერდებია $AB=6$ სმ და $AC=14$ სმ გავლებულია AK ბისექტრისა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ABC სამკუთხედში შემთხვევით აღებული წერტილი მოხვდება ACK სამკუთხედში.

21.27. კვადრატში ჩახაზულია წრე. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ კვადრატში შემთხვევით აღებული წერტილი არ მოხვდება წრეში?

21.28. წრეში ჩახაზულია კვადრატი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ წრეში შემთხვევით აღებული წერტილი მოხვდება კვადრატში?

21.29. წესიერ სამკუთხედში ჩახაზულია წრე. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ სამკუთხედში შემთხვევით აღებული წერტილი მოხვდება წრეში?

21.30. წრეში ჩახაზულია წესიერი სამკუთხედი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ წრეში შემთხვევით აღებული წერტილი მოხვდება სამკუთხედში?

21.31. წრეში გავლებულია რადიუსის ტოლი ქორდა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ წრეში შემთხვევით აღებული წერტილი მოხვდება ამ ქორდით შექმნილ მცირე სეგმენტში.

21.32. მოცემულია განტოლება $2x-a-1=0$, სადაც $1<a<9$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ განტოლების ფესვი 3-ზე მეტია, თუ a შემთხვევით აღებული რიცხვია.

21.33. მოცემულია განტოლება $ax=b$, სადაც $0<a\le 10$, $0<b\le 12$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ განტოლების ფესვი 1-ზე მეტია.

21.34. ვთქვათ x და y [0; 1] შუალედიდან შემთხვევით აღებული რიცხვებია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ $x+y>1$.

21.35. ვთქვათ x და y [0; 2] შუალედიდან შემთხვევით აღებული რიცხვებია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ

$$\begin{cases} x+y>2 \\ y<x. \end{cases}$$

პ ა ს უ ხ ე ბ ი

§1

1.4. 1) 5; 2) 9; 3) 1; 4) 2. **1.5.** 1) 4; 2) 5 ან 11; 3) 8; 4) 13. **1.6.** 1) 1; 2) 4; 3) 2; 4) 4. **1.7.** 1) 13; 2) 33; 3) 21; 4) 23. **1.8.** 1) $1\frac{5}{24}$; 2) $1\frac{13}{120}$; 3) $8\frac{11}{24}$; 4) $8\frac{17}{60}$. **1.9.** 1) $4\frac{1}{4}$; 2) $3\frac{5}{16}$; 3) $\frac{7}{18}$; 4) $7\frac{7}{20}$. **1.10.** 1) $5\frac{1}{4}$; 2) $2\frac{7}{8}$; 3) $\frac{5}{8}$; 4) $\frac{10}{27}$. **1.11.** 1) –4; 2) 6; 3) $1\frac{3}{13}$; 4) $-5\frac{30}{43}$. **1.12.** 1) 7; 2) $5\frac{1}{2}$; 3) 3; 4) 9. **1.13.** 1) 60; 2) 32; 3) 0,75; 4) $\frac{2}{3}$. **1.14.** 1) $\frac{7}{23}$; 2) $3\frac{1}{20}$; 3) $18\frac{1}{3}$; 4) 2,5. **1.15.** 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{5}{6}$; 4) 9. **1.16.** 1) $2\frac{1}{10}$; 2) $1\frac{2}{3}$; 3) 4; 4) $-1\frac{2}{15}$. **1.17.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{42}{109}$; 3) $-1\frac{5}{12}$; 4) $\frac{5}{12}$. **1.18.** 1) $\frac{100}{101}$; 2) $\frac{50}{101}$; 3) $\frac{531}{760}$; 4) $\frac{5729}{10260}$. **1.19.** 1) 24; 2) 24; 3) 0,6; 4) 10. **1.20.** 1) 7500; 2) 143; 3) 1,2; 4) $\frac{1}{3}$. **1.21.** 1) 49; 2) 34,4; 3) 1,4; 4) $23\frac{1}{3}$. **1.22.** 1) 75; 2) 320; 3) 2210; 4) 122,25. **1.23.** 1) 150; 2) 20; 3) 1000; 4) 1100. **1.24.** 1) $\frac{9}{80}$; 2) $\frac{3}{50}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{1}{30}$. **1.25.** 1) $70{,}4$; 2) 20; 3) 27; 4) 42. **1.26.** 1) 210; 240. 2) 440; 520. 3) 40; 90. 4) 135; 126. **1.27.** 1) 300; 240; 180. 2) 1089; 1815; 726. 3) 320; 352; 208. 4) 48; 80; 64; 240. **1.28.** 1) 6; 2) 2; 3) 18; 4) 3. **1.29.** 1) 6; 2) 16; 3) 12; 4) 60. **1.30.** 1) 24-ჯერ; 2) 12; 3) 24; 4) 8. **1.31.** 1) 75; 2) 80; 3) 10; 4) $\frac{8}{9}$. **1.32.** 1) 370მ; 2) 96კმ; 3) 175მ; 4) 32მ. **1.33.** 1) 1; 2) 0,1; 3) 4; 4) 2800. **1.34.** 1) $\frac{3}{10}$; 2) $\frac{17}{20}$; 3) 125; 4) 350. **1.35.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) 80; 3) $\frac{3}{5}$; 4) 125. **1.36.** 1) 420; 2) 4; 3) 3; 4) 15; 5) 280; 6) 280. **1.37.** 1) 8; 2) 3; 3) 1260; 4) 100. **1.38.** 1) კი; 2) კი; 3) კი; 4) კი. **1.39.** 1) ა) 3; ბ) 3; გ) 2; დ) 7; 2) ა) 14; ბ) 12; გ) 10; დ) 8. 3) ა) 7; ბ) 10; გ) 6; დ) 12; 4) 92. **1.40.** 1) 120 დღე-ღამე; 2) 1080 სთ; 3) ა) 160°; ბ) 144°; 4) ა) 130°; ბ) 114°. **1.41.** 1) 59; 2) 57; 3) 59; 4) 8. **1.42.** 1) $3\cdot10^2 + 2\cdot10^1 + 7$; 2) $4\cdot10^3 + 0\cdot10^2 +$

$2\cdot 10 + 9$; 3) $5\cdot 10^4 + 2\cdot 10^3 + + 0\cdot 10 + 3$; 4) $7\cdot 10^4 + 1\cdot 10^3 + 0\cdot 10^2 + 0\cdot 10 + 2$. **1.43.** 1) $1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + +0\cdot 2 + 1$; 2) $1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2 + 1$; 3) $1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2+1$; 4) $1\cdot 2^5 +1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1$. **1.44.** 1) 111_2; 2) 1001_2; 3) 10000_2; 4) 111100_2; 5) 1101110_2; 6) 10000001_2; 7) 111110110_2: 8) 1100101101_2. **1.45.** 1)11; 2) 26; 3) 39; 4) 198. **1.46.** 1) 19; 2) 110101_2; 3) 75; 4) 111; 5) 10000000_2; 6) 43. **1.47.** 1) 5; 2) 7; 3) 8; 4) 10. **1.48.** 1) 2; 2) 2; 3) 3; 4) 4. **1.49.** 1) 10011_2; 2) 110000_2; 3) 111000_2; 4) 11_2; 5) 10011_2; 6) 1010_2. **1.50.** 1) 15; 2) 63. **1.51.** 1) 16; 2) 128. **1.52.** 1) 128; 2) 127. **1.53.** 1) 512; 2) 511.

§2

2.101. 1) $2x-1$; 2) $2x^2-x+1$; 3) $5x^2-9x+26$; 4) $x^4-3x^3+x^2-4x+3$. **2.104.** 252. **2.105.** 4. **2.106.** $p=-1$, $q=3$. **2.107.** $p=15$, $q=8$.

§3

3.1. 1) $\frac{a-b}{2a}$; 2) $\frac{x+y}{2x}$; 3) $\frac{m-n}{2a+2b}$; 4) $\frac{p+q}{2x+2y}$. **3.2.** 1) $\frac{a-b}{a+b}$, 2) $\frac{a}{a+b}$; 3) $\frac{k+1}{x-y}$; 4) $\frac{1}{b}$. **3.3.** 1) $\frac{1}{x+y}$; 2) $\frac{a+b}{x}$; 3) $\frac{a^2}{a+2}$; 4) $\frac{a-b}{a+b}$. **3.4.** 1) $\frac{x}{y(3x-4y)}$; 2) $-\frac{x}{y}$; 3) $\frac{x-2}{x+2}$; 4) $\frac{1-x}{3}$. **3.5.** 1) $\frac{x}{x-y}$; 2) $\frac{5(2a-3b)}{2a+3b}$; 3) $\frac{a-b}{2(a+b)}$; 4) $\frac{m+n}{3(m-n)}$. **3.6.** 1) $\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$; 2) $\frac{p^2+pq+q^2}{p+q}$; 3) $\frac{2(x^2+xy+y^2)}{5(x+y)}$; 4) $\frac{m-n}{2(m^2-mn+n^2)}$. **3.7.** 1) x^2-y^2; 2) a^2+x^2; 3) $\frac{a^2+ab+b^2}{(a+b)(a^2+b^2)}$; 4) $\frac{(x-y)(x^2+y^2)}{x^2-xy+y^2}$. **3.8.** 1) $\frac{x+y}{x-y}$; 2) $\frac{b+c}{x+y}$; 3) $a+b-c$; 4) $\frac{a+b-c}{a-b+c}$. **3.9.** 1) $\frac{(1-y)^2}{x+z}$; 2) $\frac{a^2+b^2}{b}$; 3)

$\frac{xy}{x^2-y^2}$; 4) $\frac{ab}{(a+b)^2}$. **3.10.** 1) $\frac{x-4}{x-3}$; 2) $\frac{x+3}{x+2}$; 3) $\frac{a+2}{a+5}$; 4) $\frac{x+1}{x+7}$.
3.11. 1) $\frac{2a+b}{3}$; 2) $\frac{2m}{a}$; 3) $\frac{4x+1}{2}$; 4) $\frac{x+4}{4}$. **3.12.** 1) $\frac{2x+7}{a-2}$; 2) $\frac{2m}{p-q}$; 3) $\frac{3}{a-1}$; 4) $\frac{3x+2y}{x-y}$. **3.13.** 1) $\frac{8x-5y}{40}$; 2) $\frac{9x}{10}$; 3) $\frac{6a-11b}{36}$; 4) $\frac{13b^2-37a^2}{20}$. **3.14.** 1) $\frac{5a+3b}{ab}$; 2) $\frac{7a-4x}{ax}$; 3) $\frac{mz-ny}{xyz}$; 4) $\frac{2bp+3aq}{abx}$. **3.15.** 1) $\frac{5xp-3ny}{mnp}$; 2) $\frac{4a^2+2ab-8b^2}{ab}$; 3) $\frac{3a^2-5b^2}{ab}$; 4) $\frac{3bc^2+6ab^2-3a^2c}{abc}$. **3.16.** 1) $\frac{3a-3x}{x^2}$; 2) $\frac{5an-2m}{a^3}$; 3) $\frac{n+2m}{m^4n^4}$; 4) $\frac{3ax-2b}{6x^2}$. **3.17.** 1) $\frac{7ab-4a^2-3b^2}{a^2b^2}$; 2) $\frac{5a^2b+6a-5b^2}{a^2b^2}$; 3) $\frac{6a^2+2a-5}{a^2b}$; 4) $\frac{2x^2-1}{x^2y}$. **3.18.** 1) $\frac{13}{4(x-1)}$; 2) $\frac{5x}{8(x+y)}$; 3) $\frac{x(5x-9y)}{3(x^2-y^2)}$; 4) $\frac{3bm+2an}{ab(m+n)}$. **3.19.** 1) $\frac{6ax+19a}{x^2-9}$; 2) $\frac{6x-4}{x^2-4}$; 3) $\frac{2ma+m}{1-a^2}$; 4) $\frac{2}{a+2}$.
3.20. 1) $\frac{a^2-12a+3}{2a(a^2-9)}$; 2) $\frac{4a^2+2ab+4b^2}{5(b^2-a^2)}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{2(x-2)}$. **3.21.** 1) $\frac{3a^2+7a-28}{(a+2)(a-3)(a+3)}$; 2) $\frac{x^2+4x+37}{2(x^2-9)}$; 3) $\frac{x+5}{6(x+1)^2}$; 4) $\frac{17m-11n}{6(m-n)^2}$. **3.22.** 1) $\frac{2(a^2-a+3)}{a^2-9}$; 2) $-\frac{x^2-4x+5}{x^2-25}$; 3) $-\frac{2p^2-15p+45}{2(p-3)^2(p+3)}$; 4) $\frac{4m^2-9mn-28n^2}{m(m^2-4n^2)}$. **3.23.** 1) $\frac{12a}{1-a^3}$; 2) $\frac{2(2a^2-7ab-3b^2)}{(a-b)^2(a+b)^2}$; 3) $\frac{2(a-b)}{a^2+ab+b^2}$; 4) $\frac{(a-b)^2}{a^2+ab+b^2}$. **3.24.** 1) $\frac{9b}{5ay}$; 2) $\frac{16a^4xy}{27b^3z^2}$; 3) $\frac{128a^2}{9}$; 4) $\frac{7mp^3q}{4a^3b^3c^2xy}$. **3.25.** 1) $\frac{x-y}{2xy}$; 2) 1; 3) $\frac{2(2p-3q)}{apq}$; 4) $x-y$. **3.26.** 1) $\frac{a^2(a-b)}{a+b}$; 2) $\frac{(a-5)(a+3)}{a^2}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) $\frac{3}{2(1+a)^2}$. **3.27.** 1) $\frac{2}{(x-y)^2}$; 2)

$\frac{3(x^3+y^3)}{5(x-y)^2}$; 3) $\frac{(a+x)^2(a-x)}{a^2+ax+x^2}$; 4) $\frac{x(x+2y)}{3}$. **3.28.** 1) $3-x^2$; 2) $\frac{x+a}{x-a}$; 3) $\frac{ax}{x^2-a^2}$; 4) $-m$. **3.29.** 1) $\frac{1-3a}{2(1+3a)}$; 2) $x+y$; 3) -1; 4) $\frac{x}{x-y}$. **3.30.** 1) $\frac{b+a}{b-a}$; 2) $\frac{4a}{3(a-4)}$; 3) $\frac{a(n-a)}{n+a}$; 4) $\frac{b}{2(3b-2a)}$. **3.31.** 1) $\frac{1}{2-p}$; 2) $-\frac{1}{2p}$; 3) $\frac{2a(b-2a)}{b+2a}$; 4) $\frac{1}{abc}$. **3.32.** 1) 6; 2) 15,5; 3) 18; 4) 6400. **3.33.** 1) 36; 2) 25; 3) 9; 4) 25. **3.34.** 1) –0,4; 2) 5; 3) 14; 4) 49. **3.35.** 1) 12; 2) 21; 3) 31; 4) 6. **3.36.** 1) $\frac{1}{a^2+a+1}$; 2) $\frac{a+1}{ab}$; 3) $\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$; 4) $-\frac{1}{4a}$. **3.37.** 1) $\frac{a}{a+b}$; 2) $\frac{p}{p+q}$; 3) $\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}$; 4) $\frac{2x}{x-y}$. **3.38.** 1) $\frac{mn}{m-n}$; 2) $\frac{1}{a+b}$; 3) $\frac{1}{d^2-c^2}$; 4) 1. **3.39.** 1) $\frac{4}{5}(a-3)$; 2) $\frac{2a+b}{ab}$; 3) xy; 4) $\frac{a^2+b^2}{ab(a+b)}$. **3.40.** 1) $\frac{x^2+2x+4}{5(a-x)}$; 2) $\frac{x^2+3x+9}{a-x}$; 3) $\frac{a+b}{ab}$; 4) $-\frac{a+1}{a^2}$. **3.41.** 1) $\frac{2(x-2y)}{x+2y}$; 2) $\frac{m-n}{2(m+n)}$; 3) b; 4) $\frac{n+3m}{3mn^3}$. **3.42.** 1) $x(x-a)$; 2) $\frac{y-x}{y+x}$; 3) -1; 4) $\frac{2b^{2n}}{a^n(b^{2n}-a^{2n})}$. **3.43.** 1) –0,3; 2) 156; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) 11. **3.44.** 1) 44; 2) 6; 3) –2; 4) 2. **3.45.** 1) 191; 2) 90; 3) –146; 4) 128. **3.46.** 1) 125; 2) 2; 3) 88; 4) $\frac{9}{32}$. **3.47.** 1) 96; 2) 3; 3) 5; 4) 21. **3.48.** 1) 5,6; 2) –0,4; 3) –2,96; 4) 20. **3.49.** 1) –2; 2) 1; 3) 1; 4) $-\frac{1}{2}$. **3.50.** 1) $\frac{1}{a+3}$, როცა $a>2$; $\frac{1}{a+1}$, როცა $a<2$; 2) $-\frac{1}{x}$, როცა $x<2$; $\frac{1}{x}$, როცა $x>2$; 3) $-\frac{3}{x(2x+3)}$, როცა $x<3$; $\frac{1}{x}$, როცა $x>3$; 4) $-\frac{1}{a}$, როცა $a<-5$; $\frac{a+5}{a(3a-5)}$, როცა $a>-5$; $a\neq 0$, $a\neq\frac{5}{3}$. **3.51.** 1) $\frac{1}{m+2}$, როცა $m<0$ ან $m>3$; $-\frac{1}{m+2}$, როცა

$0 < m < 3$; 2) $\frac{1}{1-3x}$, როცა $x < 0$; $\frac{x+1}{(x-1)(3x-1)}$, როცა $0 < x < 1$; $\frac{1}{x-1}$, როცა $x > 1$; 3) 2, როცა $x \le -1$; $\frac{2x^2}{2x^2-1}$, როცა $-1 < x < 1$; 0, როცა $x > 1$. 4) $-\frac{x+1}{x}$, როცა $x < -1$; $\frac{x+1}{2-x}$, როცა $-1 \le x < 0$; $\frac{x+1}{x-2}$, როცა $x > 0$. **3.52.** 1) $\frac{x+3}{x^2-x}$, როცა $x < 0$; $\frac{2x^2+x+3}{x^2+x}$, როცა $0 < x < 1$; $\frac{3}{x}$, როცა $x \ge 1$; 2) –1, როცა $x < -1$; $\frac{2+x-x^3}{x^3+x}$, როცა $-1 \le x < 1$; 1, როცა $x \ge 1$; 3) $-x-1$, როცა $x < -1$; $x+1$, როცა $-1 \le x < 1$; $2x^2+x-1$, როცა $x \ge 1$. 4) $x-2$, როცა $x < -1$; $\frac{x^2+4}{x-2}$, როცა $-1 < x < 1$; $-(x+2)$, როცა $1 < x < 2$; $x+2$, როცა $x > 2$.

§4.

4.50. 1) 3; 2) 3; 3) 4; 4) $\sqrt{2}$. **4.51.** 1) $\sqrt{5}$; 2) 7; 3) –2; 4) $\frac{5}{2}$. **4.52.** 1) 1; 2) $-\sqrt{3}$; 3) 2; 4) 5. **4.53.** 1) 2; 2) –2,5; 3) 3; 4) 0,6. **4.54.** 1) 6; 2) 8; 3) –65; 4) $\sqrt{2}$. **4.55.** 1) 6; 2) 4; 3) 144; 4) 64. **4.56.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 188; 3) 1; 4) 2,5. **4.57.** 1) –2; 2) 9; 3) 22; 4) 20. **4.58.** 1) 4; 2) 4; 3) 7; 4) $2\sqrt{5}$. **4.59.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) 2; 3) 31; 4) 1. **4.60.** 1) 7; 2) 8; 3) 3; 4) –2. **4.61.** 1) $\frac{1}{29}$; 2) 6; 3) –2; 4) –3,5. **4.62.** 1) –0,148; 2) 6; 3) –2,2; 4) $-\frac{6}{5}$. **4.63.** 1) -1,5; 2) –0,2; 3) –0,05; 4) –9. **4.64.** 1) 0,4; 2) 0,8; 3) 0,9; 4) 0,08. **4.65.** 1) 3,5; 2) 0,35; 3) 7; 4) $36\sqrt{2}$. **4.66.** 1) $45\sqrt{2}$; 2) 3,9; 3) $\frac{1}{7}$; 4) –2,5. **4.67.** 1) 31; 2) –1; 3) 4; 4) 16. **4.68.** 1) 0,25; 2) 4; 3) 0,25; 4) 6. **4.69.** 1) 6; 2) 25; 3) 8; 4) $\frac{1}{38}$. **4.70.** 1) $2y-10$, როცა $3 \le y < 9$; 8, როცა $y \ge 9$; -4, როცა $y < 3$. 2) $\frac{1+x-x^2}{x+1}$, როცა $x < -1$, $0 < x < 1$;

$\frac{x^2+x-1}{x+1}$, როცა $x \geq 1$; $\frac{1-x-x^2}{x+1}$, როცა $-1 < x < 0$. 3) $-\frac{x+1}{x-1}$, როცა $x < -1$; $\frac{x+1}{x-1}$, როცა $-1 < x < 0$; $\frac{x-1}{x+1}$, როცა $x \geq 0$; 4) $\frac{4-x^2}{x^2+4x-4}$, როცა $x < 1$; $\frac{x+2}{2-x}$, როცა $1 \leq x < 2$; $\frac{x+2}{x-2}$, როცა $x > 2$. **4.71.** 1) 1; 2) 0,3; 3) $-\frac{1}{6}$; 4) $\frac{1}{15}$. **4.72.** 1) 6; 2) 6; 3) 4; 4) 10. **4.73.** 1) 1; 2) 5; 3) 1; 4) 1. **4.74.** 1) 8; 2) 9; 3) 7; 4) 2.

§5

5.1. 1) –7; 2) –4; 3) –3; 4) 6. **5.2.** 1) –5; 2) –4; 3) 18; 4) -50. **5.3.** 1) $1\frac{19}{36}$; 2) –0,9; 3) 30,4; 4) 110. **5.4.** 1) 0,368; 2) $-2\frac{23}{24}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{97}{120}$. **5.5.** 1) 5; 2) 2; 3) $-27\frac{1}{2}$; 4) 1. **5.6.** 1) 28; 2) 0,5; 3) 4; 4) $-4\frac{22}{37}$. **5.7.** 1) 6; 2) 36; 3) 9; 4) 15. **5.8.** 1) 10; 2) 3; 3) –1; 4) –3. **5.9.** 1) 7; 2) 169; 3) 5; 4) 13. **5.10.** 1) 3; 2) 1; 3) 34; 4) 15. **5.11.** 1) $x = \frac{5a+3b}{2}$; 2) $x = 7b - 6a$; 3) როცა $m \neq -2$, მაშინ $x = \frac{n}{m+2}$; როცა $m = -2$, მაშინ $x \in \varnothing$; როცა $m = -2$ და $n = 0$, მაშინ $x \in R$. 4) როცა $n \neq 3$, მაშინ $x = \frac{2n}{n-3}$; როცა $n = 3$, მაშინ $x \in \varnothing$. 5.12. 1) $x = -a$; 2) როცა $m \neq 0$, მაშინ $x = 1$; როცა $m = 0$, მაშინ $x \in R$. 3) როცა $c \neq -d$, მაშინ $x = \frac{ab}{c+d}$; როცა $c = -d$ და $ab \neq 0$, მაშინ $x \in \varnothing$; როცა $c = -d$ და $ab = 0$, მაშინ $x \in R$; 4) როცა $a \neq -c$, მაშინ $x = \frac{bc}{a+c}$; როცა $a = -c$ და $bc \neq 0$, მაშინ $x \in \varnothing$; როცა $a = -c$ და $bc = 0$, მაშინ $x \in R$. **5.15.** 1) 3; 2) 5; 3) –0,6; 4) 3. **5.16.** 1) 4; 2) 5; 3) 1; 4) –1. **5.20.** 1) ± 6; 2) $\pm 2{,}5$; 3) ± 6; 4) ± 2. **5.21.** 1) 0; -3; 2) 0; 5; 3) 0; $\frac{7}{2}$; 4) 0; $\frac{5}{3}$. **5.22.** 1) 0; 4,2; 2) 0; 4; 3) $\varnothing$; 4) ± 1. **5.23.** 1) 1; 2; 2) –2; -3; 3) 1; 3; 4) 7; -1. **5.24.** 1) –2; 10; 2) 5; 6; 3) –4;

5; 4) 3; 4. **5.25.** 1) 2; $1\frac{1}{2}$; 2) 1; $\frac{3}{5}$; 3) $1\frac{1}{3}$; -2; 4) –3; $-\frac{2}{3}$. **5.26.** 1) $-\frac{13}{3}$; 6; 2) 3; $1\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{3}{4}$; $-2\frac{2}{3}$; 4) 4; 1,6. **5.27.** 1) $-\frac{11}{7}$; 2; 2) 2; 3) –0,7; 10; 4) 7; $-\frac{7}{9}$. **5.28.** 1) 3; 2,36; 2) 18; 15,8; 3) $-\frac{45}{7}$; 2; 4) 0; 60. **5.29.** 1) $-\sqrt{6}\pm 2\sqrt{2}$; 2) $1-\sqrt{3}$; $-\left(3+\sqrt{3}\right)$; 3) $\sqrt{5}$; 0; 4) 0; $\sqrt{3}$. **5.31.** 1) $15a$; $-4a$; 2) $2a+b$; $2a-b$; 3) a; $\frac{ab}{a-b}$; 4) b; $-\frac{3}{4}b$. **5.32.** 1) 6; 8; 2) 5; 6; 3) $-\frac{1}{4}$; $-\frac{3}{8}$; 4) $\frac{7}{3}$; $\frac{2}{3}$. **5.33.** 1) 0; $-\frac{25}{4}$; 2) 0; $-\frac{3}{5}$**;** 3) 0; $-\frac{64}{9}$; 4) $\frac{7}{2}$; 0. **5.41.** 1) ა) –5; -2; ბ) –6; -1; არა; 2) $x_1=-5$; $x_2=-1$; $y_1=-4$; $y_2=0$. **5.42.** 1) $a=1$; 2) $a=-2$; 3) $a=0$; $a=3$; 4) $a=0$. **5.43.** 1) $a=1$; 2) $a=-1$; 3) $a=3$; 4) 14; $\pm$ 2. **5.44.** 1) $a=-2$; 2) $a=3$; 3) $a=2$; 4) $a=1$. **5.45.** 1) –8; 2) –5; 3) $\frac{16}{7}$; 4) 15. **5.46.** 1) 9; 2) 4; 3) –8; 4) 1. **5.47.** 1) $\pm$ 6; 2) $\pm$ 12; 3) $\pm$ 12; 4) $\pm$ 4. **5.48.** 1) –7; -1; 2) 0; 3; 3) 0; $-\frac{1}{12}$; 4) 1; $\frac{1}{5}$. **5.49.** 1) –4; 1; 2) –2; -5; 3) –2; -3; 4) 1; $-2\pm\sqrt{3}$. **5.50.** 1) –9; 2) –7; 3) 0; 4) –4. **5.51.** 1) 7; 10; 2) –6; 6; 3) $\frac{53}{72}$; 4) $\frac{23}{8}$. **5.52.** 1) $-\frac{27}{4}$; 2) $\pm$ 7; 3) -16; 4) –2. **5.53.** 1) $x^2-10x+24=0$; 2) $x^2-15x+50=0$; 3) $4x^2+4q-p^2=0$; 4) $qx^2+px+1=0$. **5.54.** 1) $x_1^2+x_2^2=p^2-2q$; $x_1^3+x_2^3=-p\left(p^2-3q\right)$; 2) $x^2+p\left(p^2-3q\right)x+q^3=0$; 3) $x^2=0$ და $x^2+15x-100=0$; 4) $x^2=0$ და $9x^2+6x-8=0$. **5.55.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) 16; 3) 7; 14; 4) 6. **5.56.** 1) $p=q=0$ ან $p=1$, $q=-2$; 2) $p=0$, $q=0$ ან $p=4$, $q=-32$; 3) $m=-2$; 4) $b=-3$. **5.57.** 1) –6; 2) 2; 3) $\left(c_1a_2-a_1c_2\right)^2-\left(a_1b_2-b_1a_2\right)\left(b_1c_2-c_1b_2\right)=0$; 4) $x^2+\left(p_1+p_2+2\frac{q_2-q_1}{p_1-p_2}\right)x+\frac{q_1q_2\left(p_1-p_2\right)^2}{\left(q_1-q_2\right)^2}=0$. **5.58.** 1) $\pm$ 3; $\pm$ 1; 2) $\pm$ 2; $\pm$ 3; 3) $\pm$ 5; $\pm$ 2; 4) $\pm$ 1; $\pm$ 2. **5.59.** 1) $\pm$ 1; $\pm$ 4; 2) $\pm$ 6; $\pm$ 1; 3)

± 1; ± 7; 4) ± 4; ± 3. **5.60.** 1) ± 1; $\pm\frac{1}{2}$; 2) ± 3; $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) ± 3; $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\pm\sqrt{2}$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. **5.61.** 1) 3; -5; -1; 2) $-\frac{1}{3}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{6}$; 1; 3) $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; 4) 1; 2; $\frac{1}{2}$. **5.65.** 1) 1; -5; 2) 0; 3; 3) $-\frac{1}{8}$; -2; 4) $\frac{1}{3}$; $-\sqrt[3]{3}$. **5.66.** 1) 2; -2; 4; -4; 2) ± 2; $\pm\frac{\sqrt[4]{24}}{2}$; 3) 0; 4) 1; $-\sqrt[3]{6}$. **5.67.** 1) 0; -2; $\frac{-2\pm\sqrt{66}}{2}$; 2) 1; 3; 3) 0; 1; 4) 0; -2. **5.68.** 1) 1; -3; 2) 2; 4; $\frac{6\pm 3\sqrt{2}}{2}$; 3) 0; -3; $\frac{-3\pm\sqrt{73}}{2}$; 4) –5; 4; $\frac{-1\pm\sqrt{37}}{2}$. **5.69.** 1) 3; $3\pm 2\sqrt{5}$; 2) 2; -4; 3) 2; 3; 4) $-4\pm\sqrt{28}$; $-4\pm\sqrt{23}$. **5.70.** 1) 2; 3; 2) 1; -5; $-1\pm\sqrt{6}$; 3) 2; $\frac{1}{2}$; 4) 2; $\frac{1}{2}$; $\frac{-11\pm\sqrt{105}}{4}$. **5.71.** 1) –4; -1; -2; -3; 2) –3; 2; $\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$; 3) 1; 2; 4) –2; 2; $\pm\sqrt{2}$.

§6

6.3. 1) 5; 2) 3; 3) ± 2; 4) 5. **6.4.** 1) 10; 2) $\frac{29}{26}$; 3) 53; 4) 61. **6.5.** 1) 100; 2) 4; 3) 16; 4) 1. **6.6.** 1) 3; 2) 4; 3) $x\in\varnothing$; 4) –1. **6.7.** 1) 5; 2) 7; 3) 7; 4) 11. **6.8.** 1) 2; 2) 0; 3) –4; 4) 1; 2. **6.9.** 1) 2; 2) 3; 3) 1; 2; 4) ∅. **6.10.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) 25; 3) 5; $-\frac{5}{4}$; 4) –3. **6.11.** 1) 10; 2) 2; 34; 3) –1; 3; 4) –1. **6.12.** 1) 4; 2) 4; 3) 12; 4) 3. **6.13.** 1) 7; 2) –1; 3) 2; 4) 8; 7. **6.14.** 1) 2; 2) 5; 3) 8; 4) 7. **6.15.** 1) 1; 2) $\pm 0{,}5$; 3) 4; 4) 1. **6.16.** 1) 3; 5; 2) 17; 25; 3) 2; 4) ± 1. **6.17.** 1) 1,5; 2) 6; 3) 5; 4) 1. **6.18.** 1) ± 4; 2) 0; 3) –61; 30; 4) -3; 4. **6.19.** 1) 81; 2) 17; 3) 19; 84; 4) –7; 7. **6.20.** 1) $-\frac{27}{8}$; 1; 2) 64; 3) $\pm 2\sqrt{2}$; 4) $\pm 2\sqrt{2}$. **6.21.** 1) 8; 2) 1024; 3) $\pm 3\sqrt{2}$; 4) ± 4. **6.22.** 1) –1; 4; 2) –2; 9; 3) –2; 6; 4) –5; 0. **6.23.** 1) 0; 2) 1; 3) 1; 4) $-\frac{5}{511}$; 2.

§7

7.1. 1) (3;4); 2) (3;4); 3) (5;-2); 4) (5;-3). **7.2.** 1) (125; -47); 2) (1;-2); 3) (7;5); 4) (5;-2). **7.3.** 1) (4;3); 2) (2;1); 3) $\left(\frac{1}{2};-1\frac{1}{6}\right)$; 4) (3;-2). **7.4.** 1) (0;5); 2) (0,5;-2); 3) (9;2); 4) (-5;-6). **7.5.** 1) (4;2); 2) (-3;1); 3) (-19;-3); 4) (21;1). **7.6.** 1) $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$; 2) (-1;2); 3) (-1;1); 4) (1;-1). **7.7.** 1) (8;9); 2) (36;12); 3) (4;-3); 4) (2;-5). **7.8.** 1) (-1;1); 2) (11;6); 3) (3;1); 4) (9;10). **7.9.** 1) (2;3); 2) (0,1;4); 3) $\left(\frac{1}{5};\frac{1}{4}\right)$; 4) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$. **7.10.** 1) (5;3); 2) (10;-3); 3) (7;3); 4) (5;1). **7.11.** 1) (5;3); 2) (3;2,5); 3) (7;4); 4) (2;-1). **7.12.** 1) (1;0); $\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$; 2) (5;3); $\left(-\frac{3}{2};-10\right)$; 3) (2;-2); 4) (6;2); (2;6). **7.13.** 1) (0,25;7,75); (-2;1); 2) (17;10); (4;-3); 3) (0;0); $\left(-\frac{12}{5};\frac{24}{5}\right)$; 4) (6;9); (-9;-6). **7.14.** 1) (8;4); (4;8); 2) (5;1); (-1;-5); 3) (2;3); (3;2); 4) (3;0); (1;-2). **7.15.** 1) (3;4); $\left(-10;-\frac{14}{3}\right)$; 2) (-2;5); $\left(-7\frac{1}{2};3\frac{5}{8}\right)$; 3) (4;2); (16;-10); 4) (3;2); (2;1). **7.16.** 1) (3;4); (1;2); 2) $\left(-\frac{7}{3};-1\right)$; $\left(\frac{7}{2};\frac{3}{2}\right)$; 3) (4;0); (-0,5;-4,5); 4) $\left(1\frac{6}{7};1\frac{1}{7}\right)$. **7.17.** 1) (4;1); (1;4); 2) (7;1); (1;7); 3) (5;-3); (-3;5); 4) (-9;4); (4;-9). **7.18.** 1) (9;2); (-2;-9); 2) (5;3); (-3;-5); 3) (12;-4); (4;-12); 4) (2;-1); (1;-2). **7.19.** 1) $(\pm 3;\pm 2)$; $(\pm 2;\pm 3)$; 2) (-1;2); (2;-1); 3) (4;1); $\left(\frac{10}{3};\frac{2}{3}\right)$; 4) (1;2); (2;1). **7.20.** 1) $\left(\pm\frac{1}{2};\mp\frac{1}{2}\right)$; $(\pm 2;\mp 1)$; 2) $(\pm 2;\pm 8)$; $(\pm 8,5;\mp 5)$; 3) $(\pm 1;\pm 2)$; $(\pm 2;\pm 1)$; 4) $(\pm 3;\pm 5)$; $\left(\pm 1\frac{2}{3};\pm 4\frac{1}{3}\right)$. **7.21.** 1) $(\pm 3;\pm 1)$; $(\mp\sqrt{2};\pm 2\sqrt{2})$; 2) $\left(\pm 2;\pm\frac{1}{2}\right)$; $\left(\pm\frac{\sqrt{10}}{5};\mp\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$; 3) $(\pm 2;\pm 3)$; $(\pm 3;\pm 2)$; 4) $(\pm 3;\pm 1)$. **7.22.** 1) (1;2); (2;1); 2) (3;1); (1;3); 3) (5;2); (-2;-5); 4) (5;4); (4;5). **7.23.** 1) (3;2); (3;-3); (-4;2); (-4;-3); 2) (0;0); (4;2); (-2;-4); 3) (3;4); (-3;-4);

$\left(\frac{8}{\sqrt{11}};-\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$; $\left(-\frac{8}{\sqrt{11}};\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$; 4) (3;1); $\left(\frac{2}{3};-\frac{4}{3}\right)$. **7.24.** 1) (7;3); $\left(\frac{14}{3};-\frac{5}{3}\right)$; 2) (2;3); (0;1); $\left(\frac{3}{2};1\right)$; 3) $\left(2+\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$; $\left(2-\sqrt{5};-\sqrt{5}\right)$; (0;2); (3;2); 4) (6;3); (-1;-4); (4;5); (-3;-2). **7.25.** 1) (5;3); (-5;-3); (3;5); (-3;-5); 2) (5;4); (-5;-4); 3) (8;2); (2;8); 4) (9;4). **7.26.** 1) (9;4); (4;9); 2) (5;20); (20;5); 3) (2;3); (3;2); $\left(-2+\sqrt{7};-2-\sqrt{7}\right)$; $\left(-2-\sqrt{7};-2+\sqrt{7}\right)$; 4) (2;-4); (-4;2); $\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2};\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)$; $\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2};\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)$. **7.27.** 1) (4;2); (2;4); 2) (7;5); (-5;-7); 3) (5;-2); (2;-5); 4) (-6;-1); (-1;-6). **7.28.** 1) (2;1); (1;2); 2) (12;4); (4;12); $\left(-5+\sqrt{55};-5-\sqrt{55}\right)$; $\left(-5-\sqrt{55};-5+\sqrt{55}\right)$; 3) (1;3); (-1;-3); (3;1); (-3;-1); 4) (2;3); (3;2). **7.29.** 1) $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$; 2) (0;1); 3) (4;2); $\left(\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$; 4) (2;1). **7.30.** 1) ერთი ამონახსნი; 2) უამრავი ამონახსნი; 3) ერთი ამონახსნი; 4) არა აქვს ამონახსნი. **7.31.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) $-\frac{8}{3}$; 3) $\frac{10}{3}$; 4) $-\frac{1}{6}$; 0. **7.32.** 1) $m=10$; $n=6$; 2) $m=-6$; $n=-19$; 3) $m=\frac{2}{3}$; $n=\frac{8}{3}$; 4) $m=-1$; $n=2$; $m=-\frac{37}{3}$; $n=-3$. **7.33.** 1) ა) –1; ბ) –7; 2) ა) 2; ბ) 0; 3) ა) 2; ბ)-1; 4) ა)-1; ბ)-3. **7.34.** 1) (5;6;10); 2) (1;1;1); 3) (1;3;5); 4) (-2;0;3). **7.35.** 1) (2;-1;3); (-3;4;-2); 2) (5;3;4); (4;2;5); 3) (1;2;3); (-1;-2;-3); 4) (2;3;4); (-2;-3;-4).

§8

8.1. 1) $x<4$; 2) $x>1{,}2$; 3) $x>-2{,}2$; 4) $x\geq 1{,}5$. **8.2.** 1) $x\leq -\frac{7}{8}$; 2) $x>9$; 3) $x<-3{,}1$; 4) $x<0{,}8$. **8.3.** 1) $x<-\frac{2}{3}$; 2) $x<3{,}5$; 3) $x\geq 17$; 4) $x\geq -0{,}25$. **8.4.** 1) $x>-115$; 2) $x<15$; 3) $x\geq 0{,}2$; 4) $x\leq 1{,}4$. **8.5.** 1) $x<-\frac{39}{4}$; 2) $x<\frac{9}{4}$; 3) $x>3$; 4) $x<-\frac{5}{3}$; $x=0$. **8.6.** 1) $x>17$; 2) $x\leq 1$; 3) $0\leq x<6$; 4) ø. **8.7.** 1) ø; 2) $2\leq x<3$; 3) $x\geq 1{,}1$; 4) ø. **8.8.**

1) $x>3$; 2) $x\le -3$; 3) $x>4$; 4) $x>\frac{1}{11}$. **8.9.** 1) $x<2$; 2) $1<x<3$; 3) $x>12$; 4) $1<x<2$. **8.10.** 1) $x>9$; 2) $-29<x<3$; 3) $1\frac{1}{9}<x<3$; 4) $x>3\frac{3}{7}$. **8.11.** 1) $x<0$; $x>5$; 2) $x<2$; $x>4$; 3) $\frac{1}{2}<x<4$; 4) $-\frac{3}{2}<x<1$. **8.12.** 1) $1<x<4$; 2) $-3\le x<-1$; 3) ø; 4) $-2<x\le 3$. **8.13.** 1) $x>8$; 2) $x<2$; $2<x<3$; 3) $x>2$; 4) $-1\le x<3$; $x>3$. **8.14.** 1) $-4<x<\frac{10}{3}$; 2) $\frac{3}{2}<x\le 5$; 3) $\frac{1}{4}<x\le\frac{3}{2}$; 4) $x<-1$; $x>0$. **8.15.** 1) $0<x<\frac{1}{8}$; 2) $x<-1$; $x>\frac{3}{4}$; 3) $-1<x\le 1$; 4) $x<7$. **8.16.** 1) $x>3$; 2) $-7<x<-2$; 3) $x<\frac{1}{3}$; $x>1$; 4) $x<\frac{6}{5}$; $x>\frac{5}{3}$. **8.17.** 1) $x<1$; $x>3$; 2) $-\infty<x<\infty$; 3) $-1<x<\frac{2}{5}$; 4) ø. **8.18.** 1) $x\le 5$; $x\ge 9$; 2) $-\infty<x<\infty$; 3) $x\le 5$; $x\ge 6$; 4) $x<1$; $x>3$. **8.19**. 1) $x<-\frac{1}{3}$; $x>2$; 2) $\frac{2}{5}\le x\le 1$; 3) $-\frac{2}{3}<x<3$; 4) $-\infty<x<\infty$. **8.20.** 1) $3\le x\le 7$; 2) $-6<x<8$; 3) $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$; 4) $x\le -1$; $x\ge -0{,}2$. **8.21.** 1) $-\frac{4}{3}<x<0$; 2) $x<-3$; $x>3$; 3) $0\le x\le 10$; 4) $x\le -\sqrt{5}$; $x\ge\sqrt{5}$. **8.22.** 1) $x<\frac{5}{7}$; $\frac{5}{7}<x<3$; 2) $x<\frac{3}{2}$; $\frac{3}{2}<x<4$; 3) $x\le\frac{1}{3}$; $x\ge 4$; $x=\frac{3}{2}$. 4) $-4\le x\le 8$. **8.23.** 1) $x\le 0$; $2{,}5\le x\le 3$; 2) $\frac{1}{5}\le x\le\frac{3}{2}$; $x\ge 3$; 3) $\frac{2}{3}<x<\frac{9}{4}$; $\frac{7}{2}<x<5$; 4) $\frac{5}{6}<x<1$; $x>\frac{4}{3}$. **8.24.** 1) $1<x<2$; $x>3$; 2) $2<x<3$; $x>5$; 3) $x<-3$; $-1<x\le 1$; 4) $x>4$. **8.25.** 1) $x\le -3$; $x\ge 1$; 2) $-4<x<-1$; $-1<x<6$; 3) $x\le -5$; $-1<x\le 3$; 4) $-2<x<2$; $6<x<8$. **8.26.** 1) $3<x<5$; 2) $-2\le x<1$; $x>6$; 3) $1<x<1{,}5$; $x>2$; 4) $-2<x<\frac{3}{2}$; $x>5$. **8.27.** 1) $-4{,}5<x<-2$; $x>3$; 2) $x<-2$; $x>2$; 3) $0\le x\le 8$; 4) $1<x<6$. **8.28.** 1) $-1<x<4$; 2) $x<3$; 3) $-4<x<-3$; $0\le x<1$; $x=2$; 4) $-4<x<-1$; $1\le x<2$. **8.29.** 1) $x>5$; 2) $x\le 0$; 3) $x\ge -4$; 4) $x=-\frac{1}{2}$. **8.30.** 1) $x<-5$; $x>5$;

2) $x \le -4$; $x \ge -1$; 3) $-10 < x \le -6$; $6 \le x < 10$; 4) $1 < x \le 2$; $5 \le x < 6$. **8.31.** 1) $x \ge 3$; 2) $\frac{4}{3} \le x < 5$; 3) ø; 4) $-\frac{7}{2} \le x < -\frac{2}{3}$. **8.32.** 1) $x \ge 5$; 2) $-3 < x \le -\frac{5}{2}$; 3) $-3 < x \le -2$; $5 \le x < 7$; 4) $x < \frac{9}{5}$; $x > 15$. **8.33.** 1) $2\frac{2}{9} \le x < 4$; $x > 5$; 2) $\frac{2}{3} \le x < 1$; 3) $x > \frac{3}{2}$; 4) $x > \frac{2}{3}$. **8.34.** 1) $-3 \le x < 1$; 2) $-14 \le x < 2$; 3) $-46 \le x < 3$; 4) $-27 \le x < 9$. **8.35.** 1) $x \ge 6$; 2) $0 \le x \le 3$; 3) $x \le -2$; $x > 2$; 4) $x \le -4$; $x > 0$. **8.36.** 1) $x > 2$; 2) $x < -2$; $1 < x < 3$; 3) $-2 \le x \le -1$; $x \ge 3$; 4) $-2 \le x \le 1$; $x = 3$. **8.37.** 1) $x < \frac{3}{4}$; $4 < x < 7$; 2) $-3 < x \le 1$; $x = -\frac{17}{2}$; 3) $-3 \le x \le 6$; $x > 8$; 4) $-3 \le x \le 6$. **8.38.** 1) $x > 9$; 2) $-1 < x < 15$; 3) $x < -4 + 2\sqrt{5}$; 4) $-\frac{2}{3} < x \le -\frac{1}{3}$. **8.39.** 1) $-5 \le x < -1$; $x > 1$; 2) $-2\sqrt{13} \le x < -4$; $2 < x \le 2\sqrt{13}$; 3) $-6 \le x < 0$; $3 < x \le 4$; 4) $x < 0$; $1 \le x \le 2$. **8.41.** 1) $a > -4$; 2) $a > -2\frac{2}{3}$; 3) $a < 2\frac{2}{3}$; 4) $a < 2$. **8.42.** 1) $a > 2$; 2) $a < \frac{3}{7}$; 3) $a > 0{,}7$; 4) $a < 1$. **8.43.** 1) $a < -2$; 2) $a < \frac{8}{3}$; 3) $a > -\frac{16}{3}$; 4) $a > -\frac{11}{4}$. **8.44.** 1) $a > -36$; 2) $a > \frac{46}{125}$; 3) $a > \frac{15}{17}$; 4) $a > \frac{3}{16}$. **8.45.** 1) $5 \le a \le 11$; 2) $a \le -2$; $a \ge \frac{1}{2}$; 3) $-5 \le a \le 1$; 4) $-\infty < a < \infty$. **8.46.** 1) -1; 2) -3; 3) -2; 4) 3. **8.47.** 1) $\frac{9-\sqrt{17}}{16} < a < \frac{9+\sqrt{17}}{16}$; $a \ne \frac{1}{3}$; 2) $\frac{-5-\sqrt{17}}{2} \le a \le \frac{\sqrt{17}-5}{2}$; 3) $a = \frac{1}{2}$; $a \le \frac{16-2\sqrt{19}}{15}$; $a \ge \frac{16+2\sqrt{19}}{15}$; 4) $a = -1$; $a = 3$. **8.48.** 1) 3; 2) 2; 3) 1; 4) 3. **8.49.** 1) $-5 < a < 2$; 2) $-1 < a < 5$; 3) $-3 < a < 3$; 4) $-4 < a < -1$. **8.50.** 1) $3 < m < 9\frac{1}{4}$; 2) $m > 2$; 3) $m > \frac{2}{3}$; 4) $2\sqrt{2} < m < 4\frac{1}{2}$. **8.51.** 1) $a > \frac{17}{2}$; 2) $a < -1$; $1 < a < 2{,}6$; 3) $a > 3$; 4) $a > 2\sqrt{2}$. **8.52.** 1) $a > 1$; 2) $a > 11$; 3) $a < -\frac{4}{5}$; $a > 2$; 4) $0 < a < 28$. **8.53.** 1) $a < -\frac{36}{5}$; 2) $a < -\frac{1}{12}$; 3)

$a < \frac{7}{16}$; 4) $-5 < a < 2$. **8.54.** 1) $-6 < a < 2$; 2) $-7 < a < 1$; 3) $-2 < a < 4$; 4) $-3 < a < 6$. **8.55.** 1) $a < \frac{-4\sqrt{3}}{3}$; 2) $1 < a < 2$. **8.56.** 1) $-\frac{3}{2} < m < -1$; 2) $m < -4$; $0 < m < \frac{1}{2}$; 3) $m < -3$; $-2 < m < \frac{1}{2}$; 4) $-1 < m < 1$; $2 < m < 4$. **8.57.** 1) $\frac{23}{24} < m < 2$; $m > 3$; 2) $m < -3$; $-2 < m < -\frac{5}{3}$; 3) $m < -9$; $-9 < m < -\frac{4}{3}$; $m > \frac{5}{2}$; 4) $m > -2$; $m \neq 0$. **8.58.** 1) $a > \frac{11}{9}$; 2) $a < -2$; 3) $a > 1$; 4) $\frac{16}{17} \leq a < 2$. **8.59.** 1) $a \leq -3$; $a \geq 1$; 2) $-2 - \sqrt{11} < a < -2 + \sqrt{11}$; 3) $2\sqrt{2} \leq a < \frac{11}{3}$; 4) $-2 < a \leq \frac{1}{4}$. **8.60.** 1) $\frac{-7-\sqrt{45}}{2} \leq a \leq 2\sqrt{3} - 4$; 2) $a > 1$; 3) $-\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$; 4) $0 < a < \frac{1}{5}$. **8.61.** 1) $\frac{1}{2} < a \leq 1$; 2) $-2 \leq a \leq -0{,}5$; 3) $a < -3$; $a > -1$; 4) $a < \frac{1}{2}$. **8.62.** 1) ø; 2) $28 < a < 30$; 3) $10 < a < 12$; 4) $a > 3$. **8.63.** 1) $a < -4$; 2) $a < 6$; 3) $a < 70$; 4) $a > -3$. **8.64.** 1) არა; 2) არა; 3) არა; 4) არა.

§9

9.1. 1) $\pm 0{,}5$; 2) $\pm 0{,}5$; 3) -1; 3; 4) -4; 0. **9.2.** 1) 2; 2) $-\frac{1}{4}$; 3) $-\frac{1}{3}$; 1; 4) $-\frac{2}{5}$; 1. **9.3.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{5}{6}$; 3) 0; 2; 4) 1; $\frac{7}{5}$. **9.4.** 1) -2; 2; 2) 0; $\frac{8}{5}$; 3) $-\frac{3}{2}$; 7; 4) $\frac{4}{5}$; $3\frac{1}{5}$. **9.5.** 1) $x \leq -3$; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) ø; 4) -2. **9.6.** 1) $-\frac{4}{3}$; -6; 2) 7; 13; 3) $\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{4}$; 4) ø. **9.7.** 1) ± 2; 2) ± 3; ± 1; 3) -3; -1; 4) 2; 3. **9.8.** 1) 2; 2) 3; 3) -2; 4) 4. **9.9.** 1) ± 10; 2) $\pm \frac{4}{3}$; 3) ± 1; $\pm \frac{5}{2}$;

4) ± 1. **9.10.** 1) –1; 7; 2) –1; 3; 3) $\frac{1}{2}$; 2; $\frac{-5\pm\sqrt{41}}{4}$; 4) –1; 2. **9.11.** 1) –1; 5; 2) –10; 4; 3) 2; 4; 4) –5; $3+\sqrt{8}$. **9.12.** 1) 2; 6; 2) 2; 5; 7; 3) –3; 2; 3; 4) 2; ± 3; $\pm\sqrt{7}$. **9.13.** 1) –1; 2) $-\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; 3) $-\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; 4) 1; 4. **9.14.** 1) $1\pm 2\sqrt{2}$; 2) –5; 3; 3) 1; 9; 4) –11; 3. **9.15.** 1) $\frac{4}{3}$; $\frac{1}{4}\left(-1\pm\sqrt{17}\right)$; 2) $x\le -3$; $x\ge 3$; 3) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$; 4) $0\le x\le 289$. **9.16.** 1) 3; $-1-\sqrt{8}$; 2) 1; $\frac{11+\sqrt{33}}{2}$; 3) –5; $\sqrt{3}-2$; 4) $-2-\sqrt{7}$; 5. **9.17.** 1) (1;1); $\left(\frac{3}{5};\frac{11}{5}\right)$; 2) $\left(\frac{8}{5};\frac{1}{5}\right)$; (2;1); 3) (1;2); $\left(4;\frac{1}{2}\right)$; 4) (1;-1); (2;3). **9.18.** 1) (1;1); $\left(-\frac{1}{5};-\frac{7}{5}\right)$; 2) (1;1); $\left(\frac{7}{3};\frac{1}{3}\right)$; 3) (2;1); $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$; 4) (1;3); $\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$; $\left(\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right)$. **9.19.** 1) (1;1); (-1;-1); (1;-1); (-1;1); 2) (2;1); (-2;-1); (2;-1); (-2;1); 3) (0;1); (0;3); (2;1); (2;3); 4) (1;2); (1;0); (-3;2); (-3;0). **9.20.** 1) $-1\le x\le 5$; 2) $x<-9$; $x>11$; 3) $-7\le x\le -1$; 4) $x\le -1\frac{2}{3}$; $x\ge -1$. **9.21.** 1) $x\le 2\frac{1}{4}$; 2) $x>\frac{1}{5}$; 3) $x<\frac{1}{3}$; $x>1\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{3}{5}<x<7$. **9.22.** 1) $x<-5$; $x>-\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{3}{7}<x<1$; 3) $\frac{1}{3}<x<13$; 4) $x<-1$; $x>1$. **9.23.** 1) $-3<x<-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}<x<3$; 2) $-4\le x\le -\sqrt{2}$; $\sqrt{2}\le x\le 4$; 3) $-1<x<2$; $3<x<6$; 4) $1<x<2$; $3<x<4$. **9.24.** 1) $x<-\sqrt{7}$; $-1<x<1$; $x>\sqrt{7}$; 2) $x<-2$; $x>2$; 3) $x<2-2\sqrt{3}$; $x>2+2\sqrt{3}$; 4) $x<-1$; $x>3$. **9.25.** 1) $-\frac{1}{4}<x<\frac{3}{2}$; 2) $x<\frac{4}{3}$; 3) $-\sqrt{10}<x<\sqrt{10}$; 4) $x>0$. **9.26.** 1) $-\frac{3}{5}<x<-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}<x<-\frac{1}{7}$; 2) $\frac{1-\sqrt{29}}{2}\le x\le -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\le x\le \frac{1+\sqrt{29}}{2}$; $x\ne \pm 2$; 3) $1-\sqrt{10}<x<1+\sqrt{10}$; 4) $x<-4$; $-4<x<-1$; $-1<x\le 0$. **9.27.** 1) $-8<x<-4$; $-4<x<0$; 2) $-8<x<-2$; $-2<x<4$; 3) $-2<x<3$; $3<x<8$; 4) $-6<x<-3$; $-3<x<0$. **9.28.** 1) $-1<x<3$; 2) $-2\le x<1$; $5<x<2+\sqrt{12}$; 3)

$-2-\sqrt{13} \le x < -5$; $1 < x \le 3$; 4) $-3 \le x < -1$; $3 < x \le 1+\sqrt{8}$. **9.29.** 1) $-12 < x < -4$; $8 < x < 16$; 2) $-1 < x \le 0$; $2 \le x < 3$; 3) $-29 < x < -20$; $18 < x < 27$; 4) $-18 < x < -6$; $10 < x < 22$.

§10

10.1. 40;36;43. **10.2.** 240 ჰა; 180 ჰა; 300 ჰა. **10.3.** 15;30;20. **10.4.** ჭარხალი 240 კგ. კომბოსტო 360 კგ. კარტოფილი 1200 კგ. **10.5.** 59;60;61. **10.6.** 8. **10.7.** 6;7;8;9. **10.8.** 12. **10.9.** 48;24. **10.10.** 24 სმ. **10.11.** 10 მ; 5 მ. **10.12.** 5 მ; 15 მ. **10.13.** 100 ლ; 50 ლ. **10.14.** 2200 ტ; 1100 ტ. **10.15.** 20 კგ; 60 კგ. **10.16.** 13 ტ; 26 ტ. **10.17.** 4 სთ. **10.18.** 4 სთ. **10.19.** 90 ტ; 30 ტ. **10.20.** 40 ჰა; 10 ჰა. **10.21.** 9. **10.22.** 6. **10.23.** 4. **10.24.** 10. **10.25.** 68 ჰა; 52 ჰა. **10.26.** 100 მუხის; 200 ფიჭვის. **10.27.** 30. **10.28.** 38; 32. **10.29.** 6 ჰა; 2 ჰა; 8 ჰა. **10.30.** 136. **10.31.** 312,5 კგ; 12,5 კგ; 25 კგ. **10.32.** 26 ჰა. **10.33.** 504. **10.34.** 72;45. **10.35.** 72;48. **10.36.** 28;40. **10.37.** $\frac{3}{7}$. **10.38.** $\frac{3}{5}$. **10.39.** $\frac{3}{7}$. **10.40.** $\frac{4}{9}$. **10.41.** 420;35. **10.42.** 672; 12 დღეში. **10.43.** 378 ტ. **10.44.** 40 დღე. **10.45.** 960. **10.46.** 48. **10.47.** 165. **10.48.** 88. **10.49.** 20 კგ. **10.50.** 100. **10.51.** 5. **10.52.** 200 ლარი. **10.53.** 60. **10.54.** 300. **10.55.** 926,1. **10.56.** 75000. **10.57.** 40000. **10.58.** 5000. **10.59.** 5. **10.60.** 40. **10.61.** 20. **10.62.** 60. **10.63.** 120 ლარი. **10.64.** 400. **10.65.** 40. **10.66.** 600. **10.67.** 60. **10.68.** 240. **10.69.** 20 ჰა. **10.70.** 500. **10.71.** 1000. **10.72.** 5 წთ. **10.73.** 400 კმ. **10.74.** 46. **10.75.** 24; 16. **10.76.** 390 ტ; 240 ტ. **10.77.** 12 კმ/სთ; 9 კმ/სთ. **10.78.** 59 კმ/სთ. **10.79.** 12 კმ/სთ; 20 კმ/სთ. **10.80.** 210 კმ. **10.81.** 25,2 კმ/სთ. **10.82.** 640 კმ; 60 კმ/სთ. **10.83.** 120 კმ. **10.84.** 18 კმ/სთ. **10.85.** 60 კმ. **10.86.** 12 კმ/სთ; 30 კმ/სთ. **10.87.** 50 კმ/სთ; 70 კმ/სთ. **10.88.** 40 კმ/სთ; 120 კმ/სთ. **10.89.** 6. **10.90.** 36 კმ/სთ. **10.91.** 240 კმ. **10.92.** 400 კმ/სთ; 1200კმ/სთ. **10.93.** 15 კმ. **10.94.** 30 კმ. **10.95.** 750 კმ. **10.96.** 80 კმ. **10.97.** 150 კმ. **10.98.** 50 კმ/სთ. **10.99.** 600 მ. **10.100.** 72. **10.101.** 119 მ; 17 მ/წმ. **10.102.** 56 კმ/სთ. **10.103.** 50 კმ/სთ. **10.104.** 80 კმ. **10.105.** 1320 კმ; 230 კმ/სთ. **10.106.** 21,6 კმ/სთ. **10.107.** 0,5 კმ/სთ. **10.108.** 7,5 კმ. **10.109.** 10 კმ. **10.110.** 5. **10.111.** 350 კმ; 8 სთ. **10.112.** 12 ვაგონი; 190 ტ. **10.113.** 32. **10.114.** 52. **10.115.** 36 მ/წთ; 9 მ/წთ. **10.116.** 40; 25; 100 მ. **10.117.** 144. **10.118.** 12. **10.119.** 6. **10.120.** 24. **10.121.** 6. **10.122.** 3. **10.123.** 10 წთ. **10.124.** 20; 30. **10.125.** 20. **10.126.** 6 სთ. **10.127.** 4. **10.128.** 26; 39; 52. **10.129.** 20. **10.130.** 10. **10.131.** 400 ლარი. **10.132.** 10.

10.133. 73. **10.134.** 5. **10.135.** 65 კგ. **10.136.** 29 წელი. **10.137.** 200. **10.138.** 2,5 კგ. **10.139.** 300. **10.140.** 4. **10.141.** 70. **10.142.** 10; 16. **10.143.** 8 ლ და 12 ლ. **10.144.** 140 მ. **10.145.** 28 მ. **10.146.** 6400 სმ^2. **10.147.** 80 კმ/სთ; 70 კმ/სთ. **10.148.** 400 კმ/სთ; 320 კმ/სთ. **10.149.** 6. **10.150.** 50 კმ/სთ; 45 კმ/სთ. **10.151.** 80 კმ/სთ. **10.152.** 60 კმ/სთ. **10.153.** 10 სთ. **10.154.** 32 კმ/სთ და 9 კმ/სთ. **10.155.** 30 კმ/სთ. **10.156.** 360 კმ/სთ; 900 კმ/სთ. **10.157.** 15 კმ/სთ. **10.158.** 3,75 სთ. **10.159.** 100 კმ/სთ; 80 კმ/სთ ან 80 კმ/სთ; 60 კმ/სთ. **10.160.** 20 კმ/სთ. **10.161.** 20 კმ/სთ. **10.162.** 3. **10.163.** 12 კმ/სთ. **10.164.** 40 კმ/სთ; 50 კმ/სთ. **10.165.** 16 კმ/სთ; 12 კმ/სთ. **10.166.** 60 კმ/სთ; 120 კმ/სთ. **10.167.** 44 კმ. **10.168.** 48 კმ; 16 კმ/სთ; 20 კმ/სთ. **10.169.** 18 კმ/სთ; 24 კმ/სთ. **10.170.** $100\sqrt{3}$ კმ; $200\sqrt{3}$ კმ. **10.171.** $20\sqrt{3}$ კმ. **10.172.** 6. **10.173.** 8. **10.174.** 8. **10.175.** 2,5. **10.176.** 9. **10.177.** 6 ტ; 5 ტ. **10.178.** 10 ჰა; 12 ჰა ან 8 ჰა; 10 ჰა. **10.179.** 800 მ^2; 500 მ^2 ან 900მ^2; 600მ^2. **10.180.** 22 ან 17. **10.181.** 12; 6. **10.182.** 5 სთ; 7 სთ. **10.183.** 10 დღე; 15 დღე. **10.184.** 14; 11. **10.185.** 0,5. **10.186.** $\frac{1}{6}$. **10.187.** $\frac{1}{24}$. **10.188.** 10 სთ; 15 სთ. **10.189.** 20% ან 80%. **10.190.** 40. **10.191.** 20. **10.192.** 5. **10.193.** 50. **10.194.** გაიაფდა 20%-ით; გაძვირდა 5%-ით. **10.195.** 80. **10.196.** 30. **10.197.** 19. **10.198.** 30. **10.199.** 11. **10.200.** 22. **10.201.** 30. **10.202.** 10. **10.203.** 7. **10.204.** რვაკუთხედს. **10.205.** 5 სმ. **10.206.** 3 სმ. **10.207.** 3 მ. **10.208.** 100 მ. **10.209.** 40 სმ; 20 სმ. **10.210.** 160 გ; 20%. **10.211.** 10 ლ. **10.212.** 2. **10.213.** 15. **10.214.** 9 კგ; 6 კგ. **10.215.** 30. **10.216.** 12; 2. **10.217.** 2; 1. **10.218.** 200 კგ; 150 კგ. **10.219.** 100; 200. **10.220.** 9,6 კგ; 6 კგ. **10.221.** 6; 5. **10.222.** 8 მანქანა; 6სთ. **10.223.** 36 სტრიქონი; 50 ასო. **10.224.** 10. **10.225.** 2. **10.226.** 62. **10.227.** 29. **10.228.** 57. **10.229.** 69. **10.230.** 24. **10.231.** 76. **10.232.** 12. **10.233.** 24. **10.234.** 64. **10.235.** 37. **10.236.** 71. **10.237.** მოკრივე–21; მოჭიდავე–15. **10.238.** პირველში–17; მეორეში–31. **10.239.** 12 სთ; 4სთ. **10.240.** 28 დღე; 21 დღე. **10.241.** 20; 30. **10.242.** 2 სთ; 4 სთ. **10.243.** 10; 15. **10.244.** 12. **10.245.** 2,25 სთ. **10.246.** 30; 20. **10.247.** $\frac{1}{4}$. **10.248.** 1. **10.249.** 18 კმ/სთ; 2 კმ/სთ. **10.250.** 10 კმ/სთ; 2კმ/სთ. **10.251.** 6 კმ/სთ; 4 კმ/სთ. **10.252.** 60 კმ; 12 კმ/სთ; 5 სთ. **10.253.** 5 კმ; 3 კმ. **10.254.** 60 კმ; 70 კმ. **10.255.** 80 კმ/სთ; 60 კმ/სთ. **10.256.** 16 კმ; 10 კმ. **10.257.** 12 კმ/სთ; 18 კმ/სთ; 24 კმ. **10.258.** 15 მ/წმ; 10 მ/წმ. **10.259.** 4 წმ; 6 წმ. **10.260.** 8:15. **10.261.** 12. **10.262.** 3. **10.263.** 6. **10.264.** 1) 4 მ^2; 2) 2,5 მ^2. **10.265.** 1) 5; 2) 50; 3) 60; 4) 67. **10.266.** 40 კგ. **10.267.** 8 ლარი. **10.268.** 38,8%-ით. **10.269.** 20%. **10.270.** 5 ლარი. **10.271.** 20. **10.272.** 3000 ლარი; 2000 ლარი; 8

თვე; 1 წელი. **10.273.** 6400 ლარი; 1600 ლარი; 5 თვე; 15 თვე. **10.274.** 10 წელი. **10.275.** 2. **10.276.** 475 ც; 480 ც; 375 ც. **10.277.** 180; 120; 160. **10.278.** 57 სთ 36 წთ. **10.279.** 32 მუშა; 9 სთ. **10.280.** 16 სთ; $\frac{16}{3}$ სთ. **10.281.** $6\frac{2}{3}$ სთ; $5\frac{1}{3}$ სთ. **10.282.** 15. **10.283.** 9 სთ. **10.284.** 6 დღ. **10.285.** 1) 12 სთ 12 წთ; 2) 12 სთ 16 წთ; 3) 12 სთ 8 წთ; 4) 12 სთ $\frac{2\alpha}{11}$ წთ. **10.286.** 1) 2 სთ 34 წთ; 2) 2 სთ 36 წთ; 3) 2 სთ 16 წთ ან 2 სთ 4 წთ; 4) 2 სთ $10+\frac{2\alpha}{11}$ წთ $\left(\alpha<165^\circ\right)$ ან 2 სთ $10-\frac{2\alpha}{11}$ წთ $\left(\alpha<45^\circ\right)$. **10.287.** 8-ჯერ. **10.288.** ველოსიპედისტი. **10.289.** ველოსიპედისტი. **10.290.** $\frac{18}{13}$-ჯერ. **10.291.** უკან დაბრუნებაზე. **10.292.** მეორესი. **10.293.** 4,5 კმ/სთ; 5,5 კმ/სთ. **10.294.** 12. **10.295.** 20 კმ/სთ. **10.296.** 48 კმ/სთ. **10.297.** 6. **10.298.** 50 კმ/სთ. **10.299.** 3 მ. **10.300.** 3 კმ. **10.301.** 60 კმ/სთ. **10.302.** 8 სთ; 4 სთ. **10.303.** 6 კმ/სთ; 18 კმ/სთ. **10.304.** 16 კმ/სთ. **10.305.** 24 კმ/სთ. **10.306.** 3 სთ. **10.307.** 10 მ/წმ; 6 მ/წმ. **10.308.** 60 კმ/სთ; 100 კმ/სთ. **10.309.** 20 კმ/სთ. **10.310.** 25 კმ/სთ. **10.311.** 10 კმ/სთ. **10.312.** 5 კმ/სთ. **10.313.** 20 კმ/სთ. **10.314.** 60 კმ/სთ. **10.315.** 2,5 კმ/სთ; 1,5 კმ/სთ. **10.316.** 20 კმ/სთ; 12 კმ/სთ. **10.317.** 96 ლ; 60 ლ. **10.318.** $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$. **10.319.** არ შეიძლება. **10.320.** 1 კგ; 2 კგ. **10.321.** 0,5 ლ. 3,5 ლ. **10.322.** 25%. **10.323.** 2 გრ; 22 გრ. **10.324.** 2-ჯერ.

§11

11.2. 1) 405; 2) 10005; 3) k^2-2k+6; 4) 4^k+5. **11.3.** 1) 24; 2) 29; 3) 100; 4) 120. **11.4.** 1) არის, $n=16$; 2) არის, $n=18$; 3) არ არის; 4) არ არის. **11.5.** 1) $a_2=a_{15}=-30$; 2) არ არის. **11.6.** 1) $n\geq 9$; 2) $1\leq n\leq 15$; 3) $n\geq 33$; 4) $26\leq n\leq 59$. **11.7.** 1) $n\neq 1$; 2) $n\geq 5$; 3) $1\leq n\leq 5$; 4) $3\leq n\leq 19$. **11.8.** 1) 11; 2) 32. **11.9.** 1) $x_n=2n-1$; 2) $x_n=2n$; 3) $x_n=3n-1$; 4) $x_n=n^2$; 5) $x_n=n^3$; 6) $x_n=\frac{1}{n}$; 7)

$x_n=\dfrac{n}{n+1}$; 8) $x_n=3(-1)^{n+1}$; 9) $x_n=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{2^{n-1}}$; 10) $x_n=(2n-1)^2$. **11.10.** 1) 1; 2; 3; 4; 5; 2) 7; 4; 1; -2; -5; 3) –5; -10; -20; -40; -80; 4) 75; 7,5; 0,75; 0,075; 0,0075. 5) $\dfrac{1}{6}$; $-\dfrac{1}{6}$; $\dfrac{1}{6}$; $-\dfrac{1}{6}$; $\dfrac{1}{6}$; 6) 3; $\dfrac{1}{3}$; 3; $\dfrac{1}{3}$; 3. **11.11.** 1) $x_n=-4n$; 2) $x_n=\dfrac{4}{3^{n-1}}$; 3) $x_n=2$; 4) $x_n=2n+1$. **11.12.** 1) კი; 2) კი; 3) არა; 4) კი; 5) კი; 6) კი; 7) არა; 8) კი; 9) კი; 10) არა; 11) კი; 12) კი. **11.14.** 1) $n\ge 9$; 2) $n\ge 11$; 3) $n\ge 33$; 4) $n\ge 1001$. **11.15.** 1) $x_3=12$ მიმდევრობის უდიდესი წევრია. უმცირესი წევრი მიმდევრობას არა აქვს; 2) $x_4=-15$ მიმდევრობის უმცირესი წევრია, უდიდესი წევრი მიმდევრობას არა აქვს; 3) $x_3=-2$ მიმდევრობის უმცირესი წევრია, $x_4=2$ კი უდიდესი; 4) $x_1=-7$ მიმდევრობის უმცირესი წევრია, უდიდესი წევრი მიმდევრობას არ გააჩნია. **11.16.** 1) კი; 2) არა. **11.17.** 1) არა; 2) არა; 3) კი; 4) არა; 5) კი; 6) კი; 7) კი; 8) არა; 9) კი; 10) კი. **11.18.** 1) 23; 2) 5; 3) 297; 4) –0,3. **11.19.** 1) 10; 2) 0,6. **11.20.** 1) 240; 2) –100; 3) 92; 4) –40. **11.21.** 1) 155; 2) 100; 3) 70; 4) –65. **11.22.** 1) $a_1=21$; $d=1{,}5$; 2) $a_1=120$; $d=-1$; 3) $a_1=38$; $d=-2$; 4) $a_1=-2{,}5$; $d=0{,}5$. **11.23.** 1) $a_{15}=78$; $S_{15}=645$; 2) $a_{11}=4$; $S_{11}=5{,}5$; 3) $a_{13}=1$; $S_{13}=32{,}5$; 4) $a_{61}=18\dfrac{1}{6}$; $S_{61}=498\dfrac{1}{6}$. **11.24.** 1) $n=11$; $S_{11}=27{,}5$; 2) $n=20$; $S_{20}=955$; 3) $n=22$; $S_{22}=99$; 4) $n=26$; $S_{26}=604{,}5$. **11.25.** 1) $d=4$; $S_{26}=1430$; 2) $d=-2$; $S_6=-90$; 3) $d=\dfrac{1}{8}$; $S_{26}=60\dfrac{1}{8}$; 4) $d=\alpha+\beta$; $S_9=45\alpha+36\beta$. **11.26.** 1) $a_1=19$; $S_{45}=10755$; 2) $a_1=-38$; $S_{15}=-360$; 3) $a_1=4$; $S_{13}=32{,}5$; 4) $a_1=1+54\alpha$; $S_{28}=406+1134\alpha$. **11.27.** 1) $d=1{,}5$; $n=36$; 2) $d=0{,}1$; $n=51$; 3) $d=\dfrac{2}{3}$; $n=100$; 4) $d=\dfrac{3}{4}$; $n=30$. **11.28.** 1) $n=25$, $a_n=3$, $n=12$, $a_n=-3\dfrac{1}{2}$; 2) $n=34$, $a_n=-\dfrac{61}{6}$. **11.29.** 1) $d=7$; $a_9=28$; 2) $d=0{,}2$; $a_{30}=6{,}5$. **11.30.** 1) $a_1=-45$; $a_{31}=45$; 2) $a_1=-\dfrac{1}{3}$; $a_{37}=11\dfrac{2}{3}$. **11.31.** 1) $a_1=10$; $d=10$; 2) $a_1=26$; $d=-7$. **11.32.** 1) $a_1=35$; $n=31$; 2) $a_1=-1$, $n=63$, $a_1=3$, $n=61$. **11.33.** 1) $a_{17}=27$; 2) $a_{15}=25$; 3)

$S_{18}=81$; 4) $S_{13}=182$. **11.34.** 1) 11; 15; 19; 23; 27; 31; 2) $2\frac{2}{3}$; $4\frac{1}{3}$; 6; $7\frac{2}{3}$; $9\frac{1}{3}$; 11; $12\frac{2}{3}$; $14\frac{1}{3}$. **11.35.** 1) $a_{10}=47$; 2) $d=2$; 3) $S_{15}=240$; 4) $a_7=-26{,}5$; 5) $d=-1$; $a_1=n+m-1$; 6) $\frac{(m+n-1)(m+n)}{2}$. **11.36.** 1) $a_1=12$; $d=3$; 2) $a_1=19{,}5$; $d=-2{,}8$; 3) $a_1=-2$; $d=7$; 4) $a_1=3$, $d=2$ ან $a_1=-17$, $d=2$. **11.37.** 1) $a_1=1$; $d=3$; 2) $a_1=8$; $d=-3$; 3) $a_1=8$; $d=-3$; 4) $a_1=0$; $d=3$ ან $a_1=-12$; $d=4\frac{1}{5}$. **11.38.** 1) $a_1=10$, $n=19$, $d=2{,}5$; 2) $a_1=5$, $n=6$, $d=5$. **11.39.** 1) $S_9=90$; 2) $S_{12}=-84$. **11.40.** 1) $S_n=n^2$; 2) $S_n=\frac{3n^2+7n}{2}$; 3) $S_n=\frac{15n-n^2}{4}$; 4) $S_n=n-6n^2$. **11.41.** 1) 5050; 2) $\frac{n^2+n}{2}$; 3) 2550; 4) 1645; 5) 4905; 6) 960. **11.42.** 1) 2387; 2) 2070. **11.43.** 1) $S_{17}=340$; 2) $S_{31}=62$. **11.44.** 1) $S_{22}=528$; 2) $a_9=24{,}5$; 3) $a_{12}=30$; 4) $a_{10}=25$. **11.45.** 1) $-\frac{1}{60}$; 2) $\frac{1}{9}$. **11.46.** 1) $-1\frac{1}{3}$; 2) $-1\frac{1}{4}$. **11.47.** 1) $\frac{2}{5}$; 2) $1\frac{1}{3}$. **11.48.** 1) $834\frac{1}{4}$; 2) 994. **11.49.** 1) –737; 2) $-834\frac{1}{4}$. **11.50.** 1) 204; 2) 104. **11.51.** 1) 300; 2) 384. **11.52.** 1) $S_{40}=1600$; 2) $S_{30}=120$. **11.53.** 1) კი; 2) არა; 3) არა; 4) არა. **11.54.** $c=0$. **11.55.** 1) 41; 2) 25; 3) 49; 4) 36; 5) 19,5; 6) 1. **11.60.** 4. **11.61.** 1900. **11.62.** 15; 465. **11.63.** 8. **11.64.** 5; 8; 11; 14; 17. **11.65.** 3. **11.66.** 6. **11.67.** 5 ან 10. **11.68.** 8. **11.69.** კი. **11.70.** არა. **11.71.** $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; 1. **11.72.** 1; 2; 3; 4. **11.73.** 14. **11.74.** 1785. **11.75.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $-\frac{3}{2}$; 3) 2; 4) $\sqrt{2}$. **11.76.** 1) $b_6=8$; 2) $b_7=\frac{1}{8}$; 3) $b_6=\frac{1}{8}$; 4) $b_4=\frac{4}{27}$. **11.77.** 1) $b_3=16$; 2) $b_3=18$; 3) $b_2=-6$; 4) $b_3=20$. **11.78.** 1) $q=3$; 2) $q=\pm4$; 3) $q=-2$; 4) $q=2$. **11.79.** 1) $\frac{31}{2}$; 2) 171; 3) $\frac{2660}{243}$; 4) $\frac{1023}{512}$. **11.80.** 1) $b_7=\frac{3}{2}$, $S_7=190{,}5$; 2) $b_6=-4$; $S_6=-\frac{21}{8}$. **11.81.** 1)

$n=8$; $S_n=510$; 2) $n=7$; $S_n=1365\frac{1}{4}$. **11.82.** 1) $q=3$; $S_7=2186$; 2) $q=\frac{1}{2}$; $S_5=3\frac{7}{8}$. **11.83.** 1) $b_1=32$; $S_6=5187$; 2) $b_1=3$; $S_6=189$. **11.84.** 1) $q=-2$; $n=10$; 2) $q=\frac{1}{3}$; $n=5$. **11.85.** 1) $b_1=3$; $b_8=384$; 2) $b_1=7$; $b_5=567$. **11.86.** 1) $n=7$; $b_n=2$; 2) $n=4$; $b_n=8$. **11.87.** 1) $b_1=16$; $n=4$; 2) $b_1=3584$; $n=10$. **11.88.** 1) $q=2$; $b_6=48$; $b_7=96$ ან $q=-2$; $b_6=-48$; $b_7=96$; 2) $q=-1$; $b_6=-10$; $b_7=10$; 3) $q=3$; $b_6=-54$; $b_7=-162$ ან $q=-3$; $b_6=54$; $b_7=-162$; 4) $q=\frac{1}{2}$; $b_6=12$; $b_7=6$. **11.89.** 1) $b_{10}=117$; $b_{13}=3159$. **11.90.** 1) $b_7=b_5q^2$; $b_{15}=b_5q^{10}$; $b_{40}=b_5q^{35}$; 2) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. **11.91.** 1) $\frac{93}{128}$; 2) $19\frac{7}{27}$; 3) 40; 4) 30. **11.92.** 1) 27; 81; 2) 80; 40; 20; 10; 3) $\sqrt[7]{7}$; $\sqrt[7]{49}$; $\sqrt[7]{343}$; $\sqrt[7]{2401}$; $\sqrt[7]{7^5}$; $\sqrt[7]{7^6}$; 4) 30; 15; $\frac{15}{2}$; $\frac{15}{4}$; $\frac{15}{8}$ ან -30; 15; $-\frac{15}{2}$; $\frac{15}{4}$; $-\frac{15}{8}$. **11.93.** 1) $b_1=1$; $q=-3$; 2) $b_1=\frac{1}{2}$; $q=-\frac{1}{2}$; 3) $b_1=1$; $q=2$ ან $b_1=-16$; $q=\frac{1}{2}$; 4) $b_1=1$; $q=2$. **11.94.** 1) $b_1=1$; $q=2$; $n=10$; 2) $b_1=1$; $q=3$; $n=4$. **11.95.** 1) $S_3=126$; $S_5=2046$; $S_n=2(4^n-1)$; 2) $S_3=234$; $S_5=2178$; $S_n=9(3^n-1)$. **11.96.** 1) $S_{11}=2^{11}-1$; 2) $S_{10}=\frac{2^{10}-1}{3\cdot 2^{10}}$; 3) $S_{10}=\frac{3^{10}-1}{2\cdot 3^{10}}$; 4) $S_{13}=\frac{2^{13}+1}{3}$; 5) $S_{101}=\frac{1-x^{101}}{1-x}$; 6) $S_7=\frac{x+x^{15}}{1+x^2}$. **11.97.** 1) -1; 2) 1; 3) -1; 4) ø; 5) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; 6) 7. **11.103.** $b_1^n\cdot q^{\frac{n^2-n}{2}}$. **11.106.** $2^{13}-2$. **11.107.** 70. **11.108.** 24; 12; 6; 3. **11.109.** 2; 6; 18. **11.110.** 4,352. **11.111.** -195. **11.112.** 5. **11.113.** 1 ან $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ან $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. **11.114.** $d=4$; $q=\pm3$ ან $d=0$; $q=\pm1$. **11.115.** 3; 7; 11. **11.116.** 2; 5; 8. **11.117.** 5; 15; 45. **11.118.** 12; 16; 20; 25. **11.119.** 5; 12; 19; 26. **11.120.** 7; 14; 28; 56. **11.121.** 5. **11.122.** $d=20$;

$q=3$ ან $d=0$; $q=-1$. **11.123.** 3; 6; 12; 18 ან $18\frac{3}{4}$; $11\frac{1}{4}$; $6\frac{3}{4}$; $2\frac{1}{4}$. **11.124.** 1; 3; 9 ან $\frac{1}{9}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{49}{9}$. **11.125.** 7; -14; 28; -56. **11.126.** 3; -6; 12; -24. **11.127.** 1) 2; 2) $21\frac{1}{3}$; 3) $8\frac{1}{3}$; 4) $2\frac{2}{3}$. **11.128.** 1) $q=0{,}4$; 2) 1,28; 3) 7,5; 4) 10; 2; 0,4… ან 15; -3; 0,6… **11.129.** 1) 8,4; 2) 243 ან 486; 3) 9; 4) 18 ან 54. **11.130.** $\frac{1}{8}$. **11.131.** $\frac{1}{5}$. **11.132.** $\frac{3}{5}$. **11.133.** $b_1=6$; $q=-\frac{1}{2}$. **11.134.** 1) $6a$; 2) $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

§12

12.1. 1) –1; 2) 0; 3) 0; 4) 11; 5) $\sqrt{2}+3$; 6) –2. **12.2.** 1) 2; 2) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{19}{54}$; 5) -1; 6) –8. **12.3.** 1) კენტი; კენტი; ლუწი; არც კენტი და არც ლუწი; ლუწი. 2) კენტი; კენტი; კენტი; არც კენტი და არც ლუწი. 3) ლუწი; ლუწი; ლუწი; კენტი. 4) ლუწი; ლუწი; არც კენტი და არც ლუწი; არც კენტი და არც ლუწი; კენტი. **12.4.** 1) –1; $-\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) 1; -1; $\frac{-3\sqrt{3}}{8}$; 0; 3) 0; 0; 0; $-3\sqrt{3}$. **12.5.** 1) 2; 2) $-\frac{9}{16}+\sqrt{3}$; 3) $\frac{1}{4}+12\sqrt{3}$; 4) 2. **12.6.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 1; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$; 1; 1; 3) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$; -1; $\sqrt{3}$; $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) 1; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 0; $-\sqrt{3}$. **12.7.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) $-\frac{3}{4}$; 3) -2$\sqrt{2}$; 4) $-\frac{1}{8}$. **12.8.** 1) 2π; 2) 2π; 3) 2π; 4) π; 5) π; 6) π. **12.9.** 1) π; 2) 4π; 3) 2π; 4) π; 5) 6π; 6) π; 7) 2π; 8) 2π. **12.10.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 3π; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) 2π; 6) $\frac{\pi}{4}$; 7) π; 8) 2π. **12.11.** 1) π; 2) π; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 3; 5) π; 6) $\frac{\pi}{2}$; 7) π; 8) $\frac{2\pi}{a}$; 9) $\frac{2\pi}{a}$; 10) $\frac{\pi}{a}$. **12.12.** 1) კი; 2) არა; 3) კი; 4) არა; 5) არა; 6) არა. **12.13.** 1) $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{3}$;

$\frac{3}{4}$; 2) $\frac{40}{41}$; $-\frac{9}{40}$; $-4\frac{4}{9}$; 3) $\frac{5}{13}$; $-\frac{5}{12}$; $-\frac{12}{5}$; 4) $-\frac{3}{5}$; $\frac{3}{4}$; $1\frac{1}{3}$. **12.14.** 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; -1; 2) $-\frac{3}{5}$; $-\frac{4}{5}$; $\frac{4}{3}$; 3) $-\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; 1. **12.15.** 1) $-\frac{3}{\sqrt{10}}$; $-\frac{1}{\sqrt{10}}$; $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **12.16.** 1) $2\sin 11^\circ$; 2) 0; 3) 1; 4) 0; 5) 0; 6) 1; 7) $tg\alpha \cdot tg\beta$; 8) $tg\alpha$. **12.17.** 1) 1; 2) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; 3) $-2\cos^2\alpha$; 4) $\cos^2\alpha$; 5) $-\cos^2\alpha - 1$; 6) $1-\cos\beta$; 7) $\cos\alpha - \sin\alpha$; 8) $\frac{2}{\sin\alpha}$. **12.18.** 1) $\frac{1}{\cos\alpha}$; 2) $\frac{ctg\alpha}{1+\sin\alpha}$; 3) -1; 4) $2\sin\alpha\cos\alpha$; 5) $\sin\alpha$; 6) $\sin^2\beta$; 7) $\cos^2\beta$; 8) 1. **12.21.** 1) 1; 2) 0,5; 3) 0; 4) 0; 5) 0; 6) 0; 7) 0,5; 8) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **12.22.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 3; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$. **12.23.** 1) 1; 2) 1; 3) $-\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 5) $-\sqrt{3}$; 6) $\sqrt{3}$; 7) $\sqrt{3}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **12.24.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$; 2) $\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$; 4) $\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}$. **12.25.** 1) $2\sin 26^\circ$; 2) $ctg 25^\circ$; 3) $tg\alpha \cdot ctg\beta$; 4) $-tg\alpha tg\beta$; 5) $tg 6\alpha$; 6) $tg 4\alpha$. **12.29.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{10}$; 2) $\frac{5}{2\sqrt{7}}$; 3) $\frac{63}{65}$; $-\frac{33}{65}$; 4) $\sin(\alpha+\beta) = -\frac{56}{65}$; $\sin(\alpha-\beta) = \frac{16}{65}$; $\cos(\alpha+\beta) = -\frac{33}{65}$; $\cos(\alpha-\beta) = \frac{63}{65}$; 5) $-\frac{7}{\sqrt{170}}$; 6) $\frac{-2+6\sqrt{2}}{3\sqrt{13}}$. **12.30.** 1) $\frac{3\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{5}$; 2) $\frac{2\left(54-25\sqrt{5}\right)}{19}$; 3) $\frac{25\sqrt{2}+36}{23}$; 4) $\frac{2}{5}\sqrt{5}$. **12.31.** 1) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+2\right)}{6}$; 2) 0,5; 3) $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$; 4) $-\frac{13}{14}$. **12.33.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{-\sqrt{3}}{2}$; -1; $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **12.34.** 1) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{5}{6}$; 3) 0; 4) 0. **12.35.** 1) $\cos 4^\circ$; $\sin 35^\circ$; $ctg 17^\circ$; $tg 43^\circ$; 2) $\sin 5^\circ$; $-\sin 13^\circ$; $-tg 21^\circ$; $ctg 8^\circ$; 3) $-\sin 20^\circ$; $\sin 36^\circ$; $tg 38^\circ$;

$-tg10^\circ$; 4) $\cos 40^\circ$; $-\cos 40^\circ$; -1; $tg10^\circ$. **12.36.** 1) $\cos\frac{\pi}{5}$; $-\cos\frac{\pi}{5}$; $-tg\frac{\pi}{5}$; $-ctg\frac{\pi}{10}$; 2) $-\sin\frac{\pi}{10}$; $-\sin\frac{\pi}{10}$; $-tg\frac{\pi}{10}$; $-ctg\frac{\pi}{5}$. **12.37.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $-5\sqrt{3}$; 3) 1; 4) $-4\sqrt{3}$. **12.38.** 1) $2tg\alpha$; 2) $2\cos\alpha$; 3) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; 4) $2\cos^2\alpha$; 5) $2tg20^\circ+3\cos 10^\circ$; 6) 0. **12.39.** 1) $\frac{1+\sin 56^\circ}{tg56^\circ-\cos 56^\circ}$; 2) $-tg^2 50^\circ$; 3) $-2\cos\alpha$; 4) $1+tg\alpha$; 5) $\cos\alpha$; 6) 1. **12.41.** 1) $-\frac{\left(27+64\sqrt{2}\right)\sqrt{7}}{119}$; 2) $-\left(2+\sqrt{3}\right)$. **12.42.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$; 7) 2; 8) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 9) $\frac{\sqrt{2}}{16}$; 10) $\frac{1}{2}$. **12.43.** 1) $\frac{\sin 4\alpha}{4}$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\cos 2\alpha$; 4) $\cos 2\alpha$; 5) 1; 6) $\cos 2\alpha$; 7) $\cos 4\alpha$; 8) $1+\sin 4\alpha$. **12.44.** 1) 1; 2) $-\cos\alpha-\sin\alpha$; 3) $\frac{1}{\cos\alpha}$; 4) $-tg\alpha$. **12.45.** 1) $\cos 2\alpha$; 2) $\frac{2}{\sin 2\alpha}$; 3) $\frac{\sin 4\alpha}{2}$; 4) $\cos 4\alpha$. **12.47.** 1) $\frac{24}{25}$; $\frac{7}{25}$; $3\frac{3}{7}$; 2) $-\frac{120}{169}$; $-\frac{119}{169}$; $\frac{120}{119}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $1\frac{3}{13}$; 5) $\frac{117}{125}$; 6) $\frac{7\left(24+\sqrt{15}\right)}{200}$. **12.48.** 1) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$; $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$; $tg3\alpha=\frac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}$; 2) 0,936; -0,352. **12.49.** 1) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; $2-\sqrt{3}$; 2) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $\sqrt{2}-1$; 3) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$; 4) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$. **12.50.** 1) $2\cos^2\alpha$; 2) $2\cos^2 20^\circ$; 3) $-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$; 4) $-2\sin^2 16^\circ$; 5) $tg25^\circ$; 6) $ctg^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$. **12.51.** 1) 1; 2) $\sin^2\alpha$; 3) 0; 4) $\frac{2}{1+\sin\alpha}$. **12.54.** 1) $\frac{5}{\sqrt{26}}$; $-\frac{1}{\sqrt{26}}$; -5; 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; $-\frac{\sqrt{14}}{4}$; $-\frac{\sqrt{7}}{7}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; $-\frac{1}{\sqrt{5}}$; -2; 4) $\sqrt{0,1}$; -3$\sqrt{0,1}$; $-\frac{1}{3}$.

12.55. 1) 0,8; 2) –2; 3) $-\frac{\sqrt{21}}{6}$; 4) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$. **12.56.** 1) $-\frac{\sqrt{6}}{8}\left(1+\sqrt{5}\right)$; 2) $0{,}1\left(3\sqrt{2}-\sqrt{33}\right)$. **12.57.** 1) $\sqrt{\frac{1-\sqrt{0{,}9}}{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{8+2\sqrt{10}}}{4}$. **12.58.** 1) $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{13}$; $2\frac{2}{5}$; 2) 4; 3) $\frac{4}{225}$; 4) $\frac{4}{3}$. **12.74.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 2; 3) $\sqrt{3}$; 4) 1; 5) $\sqrt{3}$; 6) 0. **12.75.** 1) 2; 2) 1; 3) 4; 4) 8; 5) 1; 6) 1. **12.76.** 1) $\sqrt{3}$; 2) $-\frac{1}{4}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{8}$; 4) $\frac{1}{2}$. **12.77.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $-\frac{1}{8}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{3}{16}$; 6) 3; 7) 3; 8) $\frac{1}{64}$. **12.78.** 1) 2; 2) 1; 3) 4; 4) 8; 5) 2; 6) 1. **12.79.** 1) 3; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{4}$; 5) 2; 6) $\frac{3}{2}$. **12.81.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{5}{4}$; 3) $\frac{4}{3}$; 4) 8. **12.82.** 1) 5; 2) 7; 3) $\frac{3}{2}$; 4) 6. **12.83.** 1) $\frac{1}{16}$; 2) $-\frac{1}{6}$; 3) $2\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{6}$. **12.84.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) 9; 3) –4; 4) 3. **12.85.** 1) –3; 2) 5; 3) $\frac{1}{4}$; 4) 4. **12.86.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $2\frac{1}{4}$; 3) 3; 4) –35. **12.87.** 1) $\frac{1}{25}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 4; 5) $\frac{1}{25}$; 6) 12. **12.88.** 1) 12; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{5}{4}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) 4; 6) $\frac{2}{7}$. **12.89.** 1) $\frac{349}{1024}$; 2) $\frac{287}{512}$; 3) $\frac{4}{5}$; 4) $\frac{3}{2}$; 5) 40; 6) 10. **12.90.** 1) 27; 2) $\frac{4}{3}$; 3) 9; 4) 21. **12.91.** 1) $-\frac{24}{25}$; 2) $\frac{115}{128}$; 3) $-\frac{415}{432}$; 4) $\frac{23}{32}$. **12.92.** 1) 195°; 2) -75°; 3) -90°; 4) 300°; 5) -270°; 6) 135°; 7) 225°; 8) -45°. **12.93.** 1) 0,6; 2) $\sqrt{2\sqrt{6}-4}$; 3) –0,8; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) 0,5; 6) $\sqrt{4\sqrt{2}-5}$; 7) 0,2; 8) $\sqrt{2\sqrt{6}-4}$; 9) $2\pi-6$; 10) 2; 11) 1; 12) $2-\pi$.

§13

13.1. 1) πk; 2) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$; 3) $(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$; 4) $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$; 5) $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k$; 6) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; 7) $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} k$; 8) $\frac{3}{2}\pi + 6\pi k$; 9) $(-1)^k \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} k - \frac{\pi}{30}$; 10) $(-1)^{k+1}\pi - 3\pi k + \frac{\pi}{3}$; 11) $(-1)^{k+1}\pi + 3\pi k + \frac{\pi}{2}$; 12) $\frac{5\pi}{16} - \frac{\pi k}{2}$. **13.2.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; 2) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; 3) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; 4) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; 5) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; 6) $\pi + 2\pi k$; 7) $\pm\frac{3}{20}\pi + \frac{2}{5}\pi k$; 8) $\pm\frac{4}{3}\pi + 8\pi k$; 9) $\frac{\pi}{45} \pm \frac{\pi}{30} - \frac{2\pi k}{5}$; 10) $\frac{13}{18}\pi + \frac{4}{3}\pi k$; 11) $\frac{\pi}{9} + 4\pi k$; 12) $\pm\frac{2\pi}{3} + \pi - 6\pi k$. **13.3.** 1) πk; 2) $\frac{\pi}{3} + \pi k$; 3) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; 4) $\frac{\pi}{6} + \pi k$; 5) $-\frac{\pi}{3} + \pi k$; 6) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; 7) $-\frac{7}{24}\pi + \frac{\pi}{2} k$; 8) $-\frac{\pi}{5} k$; 9) $25^\circ + 60^\circ k$; 10) $-\frac{\pi}{4} + 3\pi k$. **13.4.** 1) πk; 2) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; 3) πk; $(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$; 4) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; 5) πk; $arctg\, 2 + \pi k$; 6) πk; $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k$; 7) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\frac{3\pi}{4} + \pi k$; 8) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\frac{\pi}{6} + \pi k$; 9) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; 10) πk; $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$. **13.5.** 1) $2\pi k - \frac{\pi}{2}$; 2) $2\pi k$; 3) $2\pi k - \frac{\pi}{2}$; $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$; 4) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $arctg\, 5 + \pi k$; 5) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$; 6) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $-\frac{\pi}{3} + \pi k$. **13.6.** 1) πk; 2) $2\pi k \pm \frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{2}(2k+1)$; 4) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $arctg\frac{3}{2} + \pi k$; 5) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $arctg\frac{5}{3} + \pi k$; 6) $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$. **13.7.** 1) πk; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; 2) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$; 3) $(-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} k$; 4) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$; 5) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$; 6) $\frac{2}{3}\pi k$; 7) πk; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$; 8) πk. **13.8.** 1) $(2k+1)\pi$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; 2)

$\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; 3) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$; 4) $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $(-1)^k\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\pi k$; 5) πk; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$; 6) πk; $-\frac{\pi}{4}+\pi k$. **13.9.** 1) $\pi+2\pi k$; $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi k$; 2) $2\pi k$; $\pi+4\pi k$; 3) $\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k$; 4) $\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k$; 5) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; 6) $2\pi k$; $\frac{\pi}{2}+2\pi k$; 7) $\pi+2\pi k$; $\frac{\pi}{3}+2\pi k$; 8) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\frac{\pi}{3}+\pi k$. **13.10.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi k$; 2) $-\frac{\pi}{3}+\pi k$; 3) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$; 4) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$; 5) $\frac{\pi}{6}+\pi k$; $\frac{\pi}{3}+\pi k$; 6) $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $-arctg3+\pi k$; 7) $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $-arctg\frac{2}{5}+\pi k$; 8) $arctg3$; $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; 9) $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $-arctg3+\pi k$; 10) $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\pi k-arctg\frac{5}{2}$; 11) $arctg\frac{\sqrt{6}}{2}+\pi k$; 12) $\frac{\pi}{6}+\pi k$; 13) $\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\pi k$; 14) $\frac{\pi}{3}+\pi k$. **13.11.** 1) πk; $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}k$; 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}$; 3) $\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$; 4) $\frac{2\pi k}{3}$; $2\pi k$; 5) $\frac{\pi k}{3}$; 6) $\frac{\pi k}{3}$. **13.12.** 1) $\frac{\pi k}{3}$; $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$; 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; 3) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$; 4) $\frac{\pi k}{2}$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$; 5) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}$; $(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$; 6) $\frac{\pi k}{4}$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **13.13.** 1) $\frac{\pi k}{8}$; 2) $\frac{\pi k}{3}$; 3) $\frac{\pi k}{3}$; 4) $\frac{\pi k}{8}$; 5) πk; $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$; 6) πk; $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}$. **13.14.** 1) $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$; 2) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k-\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{12}+2\pi k$; $\frac{7\pi}{12}+2\pi k$; 4) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $\frac{7\pi}{6}+2\pi k$; 5) $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$; $\frac{\pi}{2}+2\pi k$; 6) $-\frac{\pi}{3}+\pi k$. **13.15.** 1) $\frac{2\pi k}{5}$; $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\pi+2\pi k$; 2) $\frac{\pi k}{4}$; 3) $\frac{\pi k}{4}$; $\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$; 4) $\frac{\pi k}{5}$. **13.16.** 1) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$; 2) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; $(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$; 4) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$; 5) $2\pi k$; 6) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$; $\frac{\pi}{4}+\pi k$. **13.17.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; 2) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$; 3) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$; 4) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$. **13.18.** 1)

$\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{3}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi k$; 3) $18^\circ 45' + 45^\circ k$; $15^\circ + 180^\circ k$; 4) $\frac{\pi}{4}+2\pi k$; $\frac{3\pi}{20}+\frac{2\pi k}{5}$. **13.19.** 1) $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{8}$; $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{14}+\frac{\pi k}{7}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi k}{5}$; $\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi k}{7}$; 4) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$. **13.20.** 1) πk; $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; 2) $2\pi k-(-1)^k\frac{\pi}{3}$; $4\pi k$; 3) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{12}+\pi k$; 4) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; $arctg\frac{1}{3}+\pi k$. **13.21.** 1) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\frac{\pi}{8}$; $-\frac{3\pi}{8}$; 2) $\frac{\pi}{16}-\frac{\pi k}{4}$; $-\frac{\pi}{12}-\frac{\pi k}{3}$; $\frac{\pi}{16}$; $-\frac{\pi}{12}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $-arctg\frac{4}{3}+\pi k$; $\frac{\pi}{4}$; $-arctg\frac{4}{3}$; 4) $\frac{\pi}{15}+\frac{\pi}{5}k$; $\frac{\pi}{15}$; $-\frac{2\pi}{15}$; 5) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; πk; $\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$; 6) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{4}$. **13.22.** 1) $-arctg 3+\pi k$; $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\frac{5\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi k}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$; 3) $2\pi k$; 0; 4) $60^\circ+180^\circ k$; $arctg\frac{2}{\sqrt{3}}+180^\circ k$; $arctg\frac{2}{\sqrt{3}}+360^\circ$. **13.23.** 1) $-5\le a\le 5$; 2) $-\sqrt{29}\le a\le\sqrt{29}$; 3) $0\le a\le 2$; 4) $2\le a\le 6$; 5) $-3\le a\le -2$; 6) $0\le a\le 1$. **13.24.** 1) $2\pi k\le x\le \pi+2\pi k$; 2) $-\pi+2\pi k<x<2\pi k$; 3) $\frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{5\pi}{6}+2\pi k$; 4) $-\frac{7\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{\pi}{6}+2\pi k$; 5) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{7\pi}{6}+2\pi k$; 6) $\frac{4\pi}{3}+2\pi k<x<\frac{5\pi}{3}+2\pi k$; 7) $\frac{\pi}{4}+2\pi k<x<\frac{3\pi}{4}+2\pi k$; 8) $\left[\frac{5\pi}{4}+2\pi k,\frac{7\pi}{4}+2\pi k\right]$. **13.25.** 1) $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\frac{\pi}{2}+2\pi k\right[$; 2) $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k,\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$; 3) $\left]-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\frac{\pi}{6}+2\pi k\right[$; 4) $\left]\frac{\pi}{6}+2\pi k,\frac{11\pi}{6}+2\pi k\right[$; 5) $\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\frac{4\pi}{3}+2\pi k\right]$; 6) $\left[-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right]$; 7) $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\frac{\pi}{4}+2\pi k\right]$; 8) $\left]-\pi+2\pi k,-\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right[$; $\left]\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\pi+2\pi k\right[$.

13.26. 1) $\left]\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k\right[$; 2) $\left]-\frac{\pi}{2}+\pi k, \pi k\right]$; 3) $\left]-\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{4}+\pi k\right[$; 4) $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k\right[$; 5) $\left[\frac{5\pi}{6}+\pi k, \pi+\pi k\right[$; 6) $\left]\frac{\pi}{6}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k\right[$. **13.27.** 1) $\pi k-\frac{3\pi}{8}<x<-\frac{\pi}{8}+\pi k$; 2) $\pi k-\frac{5\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12}+\pi k$; 3) $-\frac{\pi}{2}+\pi k<x<\frac{\pi}{6}+\pi k$; 4) $\frac{4}{9}\pi+\frac{4}{3}\pi k<x<\frac{13}{9}\pi+\frac{4}{3}\pi k$; 5) $\pi k-\frac{3\pi}{8}\le x\le\frac{\pi}{8}+\pi k$; 6) $\pi k-\frac{\pi}{6}<x<\pi k$. **13.28.** 1) $2\pi k+\frac{\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi k$; 2) $x\in R$, $x\ne\frac{\pi}{4}+2\pi k$; 3) $-\frac{5}{9}\pi+\frac{4}{3}\pi k<x<-\frac{\pi}{9}+\frac{4}{3}\pi k$; 4) $\pi k+\frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12}+\pi k$.

§14

14.1. 1) 2; 2) –3; 3) –2; 4) –2; 5) $-\frac{1}{2}$; 6) –2. **14.2.** 1) –3; 2) 2; 3) –6; 4) 1; 5) 2; 6) 12. **14.5.** 1) 30; 2) $\frac{3}{7}$; 3) 40; 4) 0,9; 5) 9; 6) 8; 7) 4; 8) 7. **14.6.** 1) 6; 2) 7; 3) 5; 4) 13; 5) $3\frac{1}{4}$; 6) $-3\frac{2}{3}$; 7) $-2\frac{3}{4}$; 8) $1\frac{1}{3}$. **14.7.** 1) 26; 2) 13; 3) $20\frac{1}{81}$; 4) 14; 5) 7; 6) 23; 7) 10; 8) 890; 9) 16; 10) 24. **14.8.** 1) 4; 2) 2; 3) 2; 4) 3; 5) –5; 6) 1. **14.9.** 1) 2; 2) –1; 3) 0; 4) –1; 5) $-\frac{1}{2}$; 6) 0. **14.10.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) –2; 3) 2; 4) $\frac{3}{2}$. **14.11.** 1) $\frac{1}{b}$; 2) $\frac{3(1-a)}{1+b}$; 3) $ab+3a$; 4) $\frac{a+1}{2a+b}$; 5) $\frac{3-2a}{2b+a}$; 6) $\frac{17}{6}$; 7) $-2-\frac{1}{a}$; 8) $\frac{4(3-a)}{3+a}$. **14.12.** 1) $\frac{4\log_4 12-4}{(2\log_4 12-1)\log_{20} 9}$; 2) $\frac{3\log_3 15(2\log_9 6-1)}{2\log_9 6}$. **14.13.** 1) 3780; 2) –5304. **14.14.** 1) 4; 2) –4; 3) $\frac{5}{3}$; 4) 0; 5) $-\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{4}$; 7)

$-\frac{1}{9}$; 8) $-\frac{1}{12}$. **14.15.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) –1; 3) 2; 4) 4; 5) –3; 6) $\frac{5}{2}$; 7) $\frac{4}{3}$; 8) 2. **14.16.** 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 2; 3; 4) 0; 5) 0; 6) 5; 7) –1; 8) 1. **14.17.** 1) 11; 2) –2; 3) $-\frac{3}{2}$; 4) 10. **14.18.** 1) 3; 2) 2; 3) 3; 4) 3; 5) 4; 6) $1\frac{1}{2}$. **14.19.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) 2; 3) 0,5; 1; 4) 0,5; 3; 5) $\frac{10}{3}$; 6) 1. **14.20.** 1) 10; 2) –2; 4; 3) 6; 4) 1; 5) 35; 6) 2. **14.21.** 1) 3; 2) 5; 3) 1; 4) 2. **14.22.** 1) 1; 2) 1; 3) 3; 4) 9. **14.23.** 1) 3; 2) 1; 3) 2; 4) 1,5. **14.24.** 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 19; 5) 3; 6) 3. **14.25.** 1) 1; 2) 2; 3) –1; 4) –0,5. **14.26.** 1) 3; 2) 0; $\log_7 5$; 3) 1; $\log_3 2$; 4) 3; 5) 3; 6) 1; 7) 2; 8) –2. **14.27.** 1) 0; $\frac{1}{4}$; 2) 1; 3) 1; 4) 2; 0; $1\pm\sqrt{2}$; 5) 1,5; 6) 2. **14.28.** 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 6; 4) –3; 5) 0; 0,5; 6) 1; 0,5. **14.29.** 1) 1; 2) 8; 3) 32; 4) 0,1; 5) 8; 6) 4; 7) $-\frac{1}{3}$; 8) 9; 9) $\frac{1}{3}$; 10) $\frac{1}{4}$. **14.30.** 1) 10; 2) 7; 3) 1; 4) 2; 5) 64; 6) –8; 7) -4^9-5; 8) 1. **14.31.** 1) 9; 2) 4; 3) 21; 4) 2; 5) 5; 6) 7; 7) 2; 8) 4; 9) 9; 10) 16; 11) $5^{\frac{7}{8}}$; 12) 64. **14.32.** 1) 3; 4; 2) –2; 8; 3) –14; 0; 4) 0,5; 5) 10; 6) 5; 7) 13; 8) -26; 9) 2; 10) 13. **14.33.** 1) 3; 9; 2) 0,5; 4; 3) 100; 1000; 4) 9; $\sqrt{10}-1$. **14.34.** 1) 1; 2) 3; 3) 1; 4) 1; 5) 0; 6) 2. **14.35.** 1) 3; 2) 2; 3) 2; 4) 2. **14.36.** 1) $\frac{1}{3}$; 3; 2) 5; 3) $\frac{1}{9}$; 9; 4) 8. **14.37.** 1) 81; $\frac{1}{81}$; 2) 0,001; 10; 3) 10^{-4}; 10; 4) 10; 100; 5) $\frac{1}{10}$; 10; 100; $\frac{1}{100}$; 6) 0,01; 0,1; 7) 50; 8) 10. **14.38.** 1) 10; 10^5; 2) 10^{-8}; 10; 3) 54; 4) 90. **14.39.** 1) 5; 2) 6; 3) 2; 4) 15; 5) 0,1; 6) 2. **14.40.** 1) 7; 2) 3; 81; 3) 3; 9; 4) 4; $\frac{1}{4}$. **14.41.** 1) –2; -32; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) –4; -2; 4) –1000. **14.42.** 1) 0,5; 2) 1; 3) 3; 4) 0; 5) 99; 6) $\pm\sqrt{3}$. **14.43.** 1) –10; 2) $\sqrt{10^{-9}}$; 10; 3) $\pm 10; \pm\frac{1}{10}$; 4) $\frac{1}{2}$; 2; 5) $2^{\log_6 3}$; 6) 1. **14.44.** 1) 2; 2) 2; 4; 3) –1; -64; 4) –100; 5) 16; 6) 25. **14.45.** 1) 9; 2) 3; 3) ± 5; 4) 2,5. **14.46.** 1) 7; 2) 289; 3) 16; 4) 100; 5)

11; 1,1; 6) 7. **14.47.** 1) ± 2; 2) ± 2; 3) ± 2; 4) $1 \pm \sqrt{1+\log_{2+\sqrt{3}} 10}$. **14.48.** 1) (1;2); (2;1); 2) (3;-2); $\left(-\log_2 9; \log_3 8\right)$; 3) (-2;0); 4) (3;4). **14.49.** 1) (-2;0); 2) (-2;3); 3) $\left(-2; \frac{1}{784}\right)$; 4) (2;3). **14.50.** 1) (3;1); 2) (1;2); 3) (3;2); 4) (8;9); $\left(27\log_5^3 2; 4\log_2^2 5\right)$. **14.51.** 1) (20;5); 2) (18;2); 3) (9;7); (7;9); 4) (18;2); (2;18). **14.52.** 1) (4;16); 2) (6;2); 3) (8;4); 4) (1;0). **14.53.** 1) (5;2); 2) (1;2); 3) (1;1); 4) (16;-28); (1;2). **14.54.** 1) –10; 2) –3; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\log_3 2$. **14.55.** 1) $\lg 91$; 2) $\log_4 14$; 3) $\log_3 74$; 4) $\lg 97$. **14.56.** 1) $a=2$; $a>3$; 2) $a_1=-1$; $a>0$; 3) $a=5$; $a>6$; 4) $a=-\frac{1}{2}$; $a>0$. **14.57.** 1) $0<a<\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{4}<a<0$; 3) $0<a<1$; 4) $-\frac{1}{8}<a<0$. **14.58.** $-2<a\le 2$. **14.59.** 1) $k>-2$; 2) $-\infty<k<0$. **14.60.** 1) $0<a<1$; 2) $-3<a<-2$.

§15

15.1. 1) ნაკლებია 1-ზე; 2) ნაკლებია 1-ზე; 3) ნაკლებია 1-ზე; 4) მეტია 1-ზე. **15.2.** 1) ჭეშმარიტია; 2) ჭეშმარიტია; 3) მცდარია; 4) მცდარია. **15.3.** 1) $a>1$; 2) $0<a<1$; 3) $0<a<1$; 4) $a>1$. **15.4.** 1) $2^{\log_3 5}-0{,}1<5^{\log_3 2}$; 2) $7^{\lg 3}+\log_{0,5}\frac{2}{7}>3^{\lg 7}$; 3) $(0{,}1)^{\log_2 3}+\sqrt{2}<3^{-\log_2 10}+\sqrt[3]{3}$; 4) $3^{\log_2 5}+10^{\frac{1}{3}\lg 2}>5^{\log_2 3+\sqrt[10]{10}}$. **15.5.** 1) $x<\frac{1}{2}$; 2) $x\ge 0$; 3) $x>-1$; 4) $x\ge 0$; 5) $x<2$; 6) $x\ge 2$. **15.6.** 1) $x<2$; 2) $x>4$; 3) $x<3$; 4) $x>1$; 5) $x<2{,}5$; 6) $x\le\frac{1}{2}$. **15.7.** 1) $1\le x\le 2$; 2) $0\le x\le 4$; 3) $x<1$, $x>5$; 4) $x\le -8$; $x\ge 4$; 5) $0\le x\le 0{,}5$. **15.8.** 1) $0<x<\frac{1}{8}$; 2) $x<6$; 3) $x>3$; 4) $x>1$; 5) $1<x<4$; 6) $-\frac{2}{5}<x<1$; 7) $-1<x<0$; $0<x<1$; 8) $x<-9$; $x>5$. **15.9.** 1) $x>3$; 2) $x<2$; 3) $x\ge\frac{3}{2}$; 4) $x>1$; 5) $x>3$; 6) 1; 2; 3; 4; 5;

6; 7. **15.10.** 1) $x>3$; 2) $x<4$; 3) $x<1$; 4) $x>3$; 5) $0\le x<4$; 6) $0\le x<4$. **15.11.** 1) $x\le 1$; 2) $x>0$; 3) $0<x<1$; 4) $x<1$; $x>2$; 5) $-1<x<1$; 6) $x<-1$; 7) $x<0$; $x\ge\frac{1}{2}$; 8) $0<x<1$. **15.12.** 1) $x\ge 3$; 2) $x>0$; 3) $x\le-\frac{3}{2}$; 4) $x\le\frac{3}{2}$. **15.13.** 1) $0<x<\frac{1}{2}$; 2) $0\le x\le 1$; 3) $x\le 0$; $x\ge 1$; 4) $x>1$; 5) $0<x\le\frac{1}{2}$; 6) $x\le -1$; $x>0$; 7) $x<-1$; $x>1$; 8) $-\log_4\frac{7}{5}\le x<0$. **15.14.** 1) $x<-2$; $x>0$; 2) $-1<x\le 1$; 3) $-1<x<1$; 4) $-1<x\le 0$. **15.15.** 1) $0<x<1$; $1<x<2$; 2) $1<x<2$; $2<x<3$; 3) $1\le x\le 3$; 4) $-5\le x\le -3$. **15.16.** 1) $x>2$; 2) $x>1$; 3) $1<x\le 2$; 4) $-\sqrt{7}<x\le-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}\le x<\sqrt{7}$. **15.17.** 1) $x<-2$; $x\ge\frac{5}{8}$; 2) $-\frac{3}{2}<x<-\frac{2}{3}$; 3) $-0{,}25\le x\le 0$; $x\ge 2$; 4) $x<-2$; $0\le x<1$. **15.18.** 1) $1<x<3$; 2) $x\ge 8$; 3) $\left[-\frac{11}{2},-1\right[$; 4) $-7\le x<\frac{1+\sqrt{29}}{2}$. **15.19.** 1) $x>9$; 2) $0<x<\sqrt[10]{7}$; 3) $0<x<0{,}7^5$; 4) $x>25$; 5) $0<x<\frac{1}{3}$; 6) $x>\frac{4}{3}$. **15.20.** 1) $-\frac{3}{2}<x<-1$; 2) $x<1$; 3) $\frac{2}{3}<x<0{,}9$; 4) $x>1$; 5) $2{,}8<x<3$; 6) $0{,}382<x<0{,}4$. **15.21.** 1) $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$; 2) $x\in\varnothing$; 3) $x>5$; 4) $2<x<5$; 5) $x>6$; 6) $-3<x<-2$; $x>3$. **15.22.** 1) $x<-3$; $x>2$; 2) $x<-2$; $x>6$; 3) $-3<x<-2$; $1<x<2$; 4) $-4<x<-3$; $0<x<1$; 5) $2<x<3$; 6) $2<x<4$. **15.23.** 1) $1<x<4$; 2) $x<-\sqrt{11}$; $x>\sqrt{11}$; 3) $x<-3$; $x>4$; 4) $-4<x<2$; 5) $x\le -1$; $x\ge 2$; 6) $x>\frac{5}{2}$. **15.24.** 1) $x>8$; 2) $8<x<10$; 3) $1<x<\sqrt[3]{5}$; 4) $x>69$. **15.25.** 1) $2-\sqrt{2}<x\le\frac{3}{4}$; $\frac{13}{4}\le x<2+\sqrt{2}$; 2) $\frac{1-3\sqrt{3}}{2}\le x<-2$; $3<x\le\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$; 3) $-2\le x<1-\sqrt{5}$; $1+\sqrt{5}<x\le 4$; 4) $\frac{-3-\sqrt{29}}{2}<x<\frac{-3-3\sqrt{3}}{2}$; $\frac{-3+3\sqrt{3}}{2}<x<\frac{-3+\sqrt{29}}{2}$. **15.26.** 1) $0<x<0{,}001$; $x>10$; 2)

$0{,}01 \le x \le 10000$; 3) $0{,}5 \le x \le 4$; 4) $0 < x < \frac{1}{4}$; $x > 64$. **15.27.** 1) $-2 < x < 2$; 2) $\frac{1}{2} < x < 2$; 3) $2 < x < 5$; 4) $2 < x < 5$; 5) $x = 3$. **15.28.** 1) $x > 3$; 2) $4 < x < 6$; 3) $0 < x < 2$; $x > 3$; 4) $x < -5$. **15.29.** 1) $-\frac{7}{2} < x < \frac{3}{2}$; $\frac{3}{2} < x < \frac{13}{2}$; 2) $1 < x < \frac{5}{2}$; $\frac{5}{2} < x < 4$; 3) $x > 2$; 4) $1 < x < 2$. **15.30.** 1) $x > 6$; 2) $x > 5$; 3) $x > 2$; 4) $-7 < x < -2$; 5) $1 \le x < 3$; 6) $2 \le x \le 4$. **15.31.** 1) $0 < x < 0{,}1$; $100 < x < 1000$; $x > 10^5$; 2) $0 < x < 0{,}001$; $1 < x < 100$; 3) $0 < x < \frac{1}{2}$; $x \ge \sqrt{2}$; 4) $0 < x < 1$; $x \ge 2$. **15.32.** 1) $x < 1$; 2) $0 < x < 2$; 3) $x < 2$; 4) $x < 1$; 5) $x > 15$; 6) $x > 2$. **15.33.** 1) $-2 < x < -\sqrt{2}$; $\sqrt{2} < x < 2$; 2) $-\sqrt{3} < x < -1$; $1 < x < \sqrt{3}$; 3) $-2 < x < -1$; $1 < x < 2$; 4) $-3 < x < -\sqrt{5}$; $\sqrt{5} < x < 3$. **15.34.** 1) $x < 0$; $\frac{7}{5} < x < 3$; 2) $x > 1$; 3) $x > \frac{1+\sqrt{7}}{2}$; 4) $2 < x < 5$; $6 < x < 8$.

§16

16.1. 1) II; 2) III; 3) IV; 4) I. **16.2.** 1) I და III; 2) II და IV; 3) I და III; 4) II და IV; 5) I, II და IV; 6) I, II და III. **16.3.** 1) (2,-5), (-3,-1), (-5,3), (7,1); 2) (-2,5), (3,1), (5,-3), (-7,-1); 3) (-2,-5), (3,-1), (5,3), (-7,1); 4) (5,2), (1,-3), (-3,-5), (-1,7); 5) (-5,-2), (-1,3), (3,5), (1,-7); 6) (0,5), (5,1), (6,-3), (-5,1); 7) (2,-9), (-3,-5), (-5,-1), (7,-3). **16.4.** 1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 3; 5) 4; 6) 7; 7) 8; 8) 8; 9) 5; 10) 13. **16.5.** 1) 20; 2) 2; 3) 16; 4) 144. **16.6.** 1) $25x - 6$; 2) $16x - 9$; 3) $x^4 + 2x^2 + 2$; 4) $11 - 2x$. **16.7.** 1) $x \in R$, $x \ne 4$; 2) $x \in R$, $x \ne -3$; 3) $x \le -7$; $x \ge 7$; 4) $-4 \le x \le 4$. **16.8.** 1) $x \ge 1$; 2) $-\frac{1}{3} \le x \le 16$; 3) $1 < x \le 7$; 4) $3 < x \le 5$. **16.9.** 1) $-\frac{1}{5} \le x \le 1$; 2) $x \le -7$; $x \ge 9$; 3) $-6 \le x \le 7$; 4) $x \le -5$, $x \ge -3$. **16.10.** 1) $x < -3$, $x \ge \frac{2}{3}$; 2) $x < 2$, $x \ge 4$; 3) $0 < x \le 1$; 4) $x < 1$, $x \ge 2$. **16.11.** 1) $0 \le x < 10$, $x > 10$; 2) $x < -8$, $-8 < x \le 5$; 3) $x \le -2$, $x > 2$; 4) $-3 < x < 3$. **16.12.** 1) $x > 5$; 2) $x < 7$; 3) $-3 < x < 3$; 4) $-2 < x < 3$; 5) $x < -1$, $x > 3$; 6)

$0 < x < 1$. **16.13.** 1) $-\frac{5}{3} < x < 2$; 2) $x < -1$, $2 < x < 5$; 3) $x \geq 1$; 4) $0 < x \leq 1$, $x \geq 10$; 5) $1 < x \leq 2$; 6) $x > 1$. **16.14.** 1) $-2 \leq x < 0$, $0 < x < 1$; 2) $\frac{3}{2} < x < 2$; $x > 2$; 3) $x < -2$, $-2 < x < 0$, $1 < x < 2$, $x > 2$; 4) $4 < x < 5$, $x > 6$. **16.15.** 1) $0 < x \leq \frac{1}{32}$, $x \geq 2$; 2) $\frac{1}{\sqrt{27}} < x < 3$; 3) $0 < x \leq \frac{1}{27}$, $x \geq 3$; 4) $x \leq -1$, $x \geq 3$; 5) $0 \leq x \leq 2$; 6) $-3 \leq x \leq 1$. **16.16.** 1) $\left[1,+\infty\right[$; 2) $\left[-3,+\infty\right[$; 3) $\left]-\infty,9\right]$; 4) $\left]-\infty,14\right]$. **16.17.** 1) $\left[2,+\infty\right[$; 2) $\left[0,3\right]$; 3) $\left[0,1\right[$; 4) $\left[2,+\infty\right[$. **16.18.** 1) $\left[0,2\right]$; 2) $\left[-1,-\frac{3}{7}\right]$; 3) $\left[-1,1\right]$; 4) $\left[\frac{1}{2},1\right]$. **16.19.** 1) $\left]0,1\right]$; 2) $\left[3,+\infty\right[$, 3) $\left]0,\frac{1}{3}\right]$; 4) $\left[25,+\infty\right[$. **16.20.** 1) $\left[1,+\infty\right[$; 2) $\left[3,+\infty\right[$; 3) $\left]-\infty,-2\right]$; 4) $\left]-\infty,-3\right]$. **16.21.** 1) $\left[1,2\right]$; 2) $\left[\frac{1}{2},1\right]$; 3) $\left[0,+\infty\right[$; 4) $\left]-\infty,1\right]$. **16.22.** 1) $\left[1,+\infty\right[$; 2) $\left]0,+\infty\right[$; 3) $\left]0,+\infty\right[$; 4) $\left]0,20\right]$. **16.23.** 1) $\left[-5,10\right]$; 2) $\left[-12,3\right]$; 3) $\left[-11,-7\right]$; 4) $\left[-22,-2\right]$. **16.24.** 1) $\left[1,3\right]$; 2) $\left[0,1\right]$; 3) $\left[0,\frac{1}{4}\right]$; 4) $\left[0,16\right]$. **16.25.** 1) 4; 2) 28; 3) 2; 4) 27; 5) –2; 6) –1. **16.26.** 1) 2; 2) 1; 3) 2; 4) 2; 5) 0; 6) 2. **16.27.** 1) $-\frac{1}{4}$; 2) $-\frac{1}{8}$; 3) 1; 4) 2; 5) 4; 6) 2. **16.28.** 1) –3; 2) –4; 3) 1; 4) –2; 5) 0; 6) 1. **16.29.** 1) 1; 2) 1; 3) 11; 4) 9. **16.30.** 1) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 2) 6; 3) 1; 4) $\frac{7}{16}$. **16.31.** 1) –4; 2) –39; 3) 6; 4) 0. **16.32.** 1) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{5}{2}$; 3) $-\sqrt{3}$; 4) 1. **16.33.** 1) ზრდადია $x \in R$; 2) ზრდადია $-\infty < x < -1$; $-1 < x < \infty$; 3) ზრდადია $-\infty < x < 2$; $2 < x < \infty$; 4) ზრდადია $2 < x < \infty$; კლებადია $-\infty < x < 2$; 5) ზრდადია $-\infty < x < \frac{5}{4}$; კლებადია $\frac{5}{4} < x < \infty$; 6) ზრდადია $-\infty < x < \frac{5}{2}$; კლებადია $\frac{5}{2} < x < \infty$. **16.34.** 1) [-6,9]; 2) [1,11]; 3) [1,3]; 4) [-9,-5]; 5) $\left[3,\infty\right[$; 6) [-9,-1]; 7) [0,1]; 8) [1,9]. **16.35.** 1) K; 2) F; 3) N; 4) M. **16.36.** 1) –1; 2) 0; 3) 1; 4) 8. **16.37.** 1) 3; 2) –2; 3) 1; 4) 9. **16.38.** 1) $a = 2$; 2) $a = 0$; $a = 4$; 3) $a = 2$; 4) $a = 0$.

16.39. 1) (3,0); 2) (0,0); (5,0); 3) (5,0); 4) (-2,0). **16.40.** 1) (0,6); 2) (0,-3); 3) (0,2); 4) (0,3). **16.41.** 1) 15; 2) 24; 3) 18; 4) 3. **16.42.** 1) (1,2); 2) (2,0); (-1,0); 3) (1,3); (3,5); 4) (0,0); (1,1). **16.43.** 1) (2,-4); 2) (3,5); 3) (-1,7); 4) (2,3). **16.44.** 1) $y=3$; 2) $y=-2x$; 3) $2x-3y=8$; 4) $x+2y=5$. **16.45.** 1) (-2,0); (-4,0); 2) (0,-18); 3) $2\sqrt{5}$; 4) $b=-6$; $c=5$; 5) $b=4$; $c=-3$; 6) $b=-4$; $c=2$; 7) (2,-1); 8) $a=2$; $c=8$; 9) $a=-2$; $c=6$; 10) $b=-4$; $c=-4$; 11) $b=-12$; $c=18$; 12) $b=-2$; $c=3$; 13) 2; $\frac{1}{2}$; 14) 8; 32; 15) 2; 8; 16) $a=\frac{2}{3}$; $b=-\frac{4}{3}$; $c=-2$; 17) $a=1$; $b=-2$; $c=3$; 18) $a=10$; $b=-3$; 19) $a=12$; $b=4$; $c=12$; 20) $a=10$; $b=-2$; $c=11$; 21) $a=4$ ან $a=-8$; $(3{,}12)$; $(-3{,}24)$; 22) $a=6$; $(2{,}8)$.

§17

17.1. 1) კი; 2) არა; 3) კი; 4) არა; 5) კი; 6) კი; 7) არა; 8) არა. **17.2.** 1) $A=\{-12;-11;-10;-9;-8\}$; 2) $A=\{1;2;3;4\}$; 3) $A=\{-1;1\}$; 4) $A=\{1;2;3;4\}$; 5) $A=\{0;1;2\}$; 6) $A=\{1;2;3;4;6;12\}$; 7) $A=\{(1;18)$, $(2;18)$, (3; 18), (6; 9), (2; 9), (6; 18), $(9;18)\}$; 8) $A=\{(6;12)$, (6; 18); $(12;18)\}$. **17.3.** 1) ∅,{*a*}, {*b*}, {*a*; *b*}; 2) ∅,{*a*}, {*b*}, {*c* }, {*a*; *b*}, {*a*; *c*}, {*b*; *c*}, {*a*; *b*; *c*}. **17.4.** 1) {*a*; *b*}, {*a*; *c*}, {*a, d*}, {*b*; *c*}, {*b*; *d*}, {*c*; *d*}. 2) {*a*; *b*; *c*}; {*a*; *b*; *d* }, {*a*; *c*; *d*}, {*b*; *c*; *d*}. **17.5.** {3; 5; 6}; {2; 3; 5; 6}, {3: 4: 5: 6}, {2; 3; 4; 5; 6}. **17.6.** 1) ჭეშმარიტია; 2) არაა ჭეშმარიტი. **17.7.** 1) არა; 2)კი; 3) არა; 4) კი. **17.8.** 1) არა; 2) არა; 3) კი; 4) არა. **17.9.** 1) არა; 2) კი; 3) არა; 4) არა. **17.10.** 1) {1; 2; 3; 4; 5; 6}; 2) {1; 3; 4; 5; 7}; 3) [2; 7]; 4) $(-\infty;10]$. **17.11.** 1) {3; 6}, 2) {4; 8}, 3) [3; 4], 4) კვადრა-ტების სიმრავლე. **17.12.** 1) {3; 7}, 2) {1; 6}, 3) [3; 4[, 4) $[2;3]\cup]5;6]$. **17.13.** 1) {1; 2; 3; 4; 5}, 2) {3}, 3) {1; 4}, 4) {2; 5}, 5) ∅. 6) {1; 4}. 17.14. 1) კი, 2) არა, 3) კი, 4) არა. **17.15.** 1) {–3; –2; –1; 0; 2; 7}; 2) {0; 2; 4; 6; 7; 9}, 3) {0; 2; 7}, 4) {–3; –2; –1}. **17.16.** 1) {–1; 0; 1; 2; 3; 4}, 2) {3; 4; 5; 6; 7; 8}, 3) {2; 8; 9; 10; 11}; 4) {–1; 0; 1; 3; 4}; 5) {2}. **17.17.** {–2; –1; 0; 1; 5; 6; 7}. **17.18.** {–2; 0; 4}. **17.19.** 1) არა, 2) კი, 3) არა, 4) არა. **17.20.** 1) არა, 2)არა, 3) კი, 4) არა. **17.21.** 25. **17.22.** 85. **17.23.** 14. **17.24.** 67. **17.25.** 50. **17.26.** $\frac{11}{20}$.

§18

18.1. 1) 24; 2) 120; 3) 600; 4) 30; 5) 56; 6) 720; 7) 330; 8) 24. **18.2.** 1) $n(n-1)(n-2)$; 2) $n(n+1)$; 3) $\frac{1}{(3n-2)!}$; 4) $\frac{n+1}{(n+2)!}$. **18.3.** 1) 6; 2) 120; 3) 30; 4) 48; 5) 48; 6) 91. **18.4.** 1) 120; 2) 20; 3) 42; 4) 9. **18.5.** 1) 10; 2) 10; 3) 5; 4) 10; 5) 25; 6) 2,5. **18.6.** 6. **18.7.** 24. **18.8.** 6. **18.9.** 40320; **18.10.** 720. **18.11.** 56. **18.12.** 3024. **18.13.** 120. **18.14.** 20. **18.15.** 840. **18.16.** 4. **18.17.** 35. **18.18.** 15. **18.19.** 1365. **18.20.** 84. **18.21.** 10. **18.22.** 600. **18.23.** 20. **18.24.** A_{10}^{6}. **18.25.** 240. **18.26.** 125. **18.27.** 5^5. **18.28.** 192. **18.29.** 240. **18.30.** 1) 300; 2) 1080; 3) 540. **18.31.** 32. **18.32**. A_5^2 =20. **18.33.** $C_7^3=35$. **18.34.** 1800. **18.35.** 120.

§19

19.1. 1) 7; 2) 5; 3) 1,2; 4) 2. **19.2.** 1) 0; 2) 2,75. **19.3.** 1) 3; 2) 4; 3) 1; 4) 3; 5) $\frac{31}{40}$; 6) $\frac{2}{3}$; 7) $\sqrt{13}$; 8) $5\sqrt{3}$. **19.4.** 1) 2; 2) $\frac{2}{3}$. **19.5.** 1) 12; 2) 13; 3) 6; 4) $6\sqrt{5}$.

19.6. 1)

მონაცემები	0	3	4	5	6
სიხშირე	2	3	2	3	2
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

2)

მონაცემები	–2	0	1	3	4
სიხშირე	2	2	2	4	4
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$

19.7. 1) –2; 2) 2 და 5; 3) მოდა არა აქვს; 4) 2; 3; 4. **19.8.** 1) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{370}}{5}$; 3) $\frac{\sqrt{42}}{3}$; 4) $\frac{11\sqrt{14}}{7}$. **19.9.** 1) საშუალოა 5, მედიანაა 4,

დიაპაზონია 10, მოდა არა აქვს, საშუალო კვადრატული გადახრაა $\sqrt{14}$; 2) საშუალოა −1, მედიანაა 4, დიაპაზონია 12, მოდაა 1, საშუალო კვადრატული გადახრაა 4. **19.10.** n=4, საშუალოა 1, მედიანაა – 0, მოდაა 1, დიაპაზონია 4, საშუალო კვადრატული გადახრაა $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. **19.11.** m =3, n =2, მოდაა 0, მედიანაა 0, გაბნევის დიაპაზონია 7. **19.12.** $\frac{1}{15}$. **19.13.** $\frac{1}{4}$. **19.14.** 1) 40; 2) 80; 3) 16; 4) 150.

19.15.

მნიშვნელობა	10	9	8	7	6
სიხშირე	1	3	3	1	2
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$

საშუალოა 8, დიაპაზონია 4, მოდაა 8 და 9, მედიანაა 8, საშუალო კვადრატული გადახრაა $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

19.16.

მონაცემები	1	3	4	5	6
სიხშირე	2	2	2	4	1
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

საშუალოა 4, დიაპაზონია 5, მოდაა 5, მედიანაა 4,5, საშუალო კვადრატული გადახრაა $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

19.17.

მონაცემები	6	8	9	10
სიხშირე	1	3	4	6
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$

საშუალოა 9, დიაპაზონია 4, მედიანაა 9, მოდაა 10, საშუალო კვადრატული გადახრაა $\frac{3\sqrt{7}}{7}$.

19.18. 1) 180; 2) 45; 3) $\frac{1}{6}$. **19.19.** 400 და $\frac{4}{7}$. **19.20.** 140. **19.21.** 1200.

§20

20.1. 1) შეუძლებელია; 2) შემთხვევითია; 3) აუცილებელია; 4) შემთხვევითია. **20.2.** 1) შემთხვევითია; 2) შემთხვევითია; 3) შეუძლებელია; 4)აუცილებელია; 5) შემთხვევითია; 6) აუცილებელია. **20.3.** 1) შემთხვევითია; 2) შეუძლებელია; 3) აუცილებელია; 4) აუცილებელია. **20.4.** 1) შეუძლებელია; 2) შემთხვევითია; 3) შეუძლებელია; 4) შემთხვევითია. **20.5.** 1) 3; 2) 6; 3) 36; 4) 4; 5) 8; 6) C_{36}^2; 7) 12; 8) 25; 9) 20; 10) 36·52. **20.6.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{3}$; 6) $\frac{1}{3}$; 7) $\frac{1}{6}$; 8) $\frac{1}{2}$; 9) $\frac{5}{6}$; 10) $\frac{1}{2}$; 11) $\frac{2}{3}$; 12) $\frac{5}{6}$. **20.7.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{1}{4}$. **20.8.** 1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{3}{5}$. **20.9.** $\frac{8}{11}$. **20.10.** 1) $\frac{3}{10}$; 2) $\frac{1}{5}$; 3) $\frac{4}{5}$; 4) $\frac{1}{2}$. **20.11.** 1) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{11}{24}$; 3) $\frac{11}{24}$; 4) $\frac{13}{24}$; 5) $\frac{1}{56}$; 6) $\frac{33}{112}$; 7) $\frac{5}{16}$; 8)$\frac{11}{16}$. **20.12.** 1) $\frac{3}{38}$; 2) $\frac{3}{95}$; 3) $\frac{9}{38}$; 4) $\frac{33}{95}$; 5) $\frac{6}{19}$; 6) $\frac{9}{38}$; 7) $\frac{1}{57}$; 8)$\frac{12}{95}$. **20.13.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{11}{36}$; 5) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{1}{4}$; 7) $\frac{1}{18}$; 8) $\frac{5}{36}$; 9) $\frac{1}{6}$; 10) $\frac{1}{12}$; 11) $\frac{1}{9}$; 12) $\frac{1}{12}$; 13) 0; 14) 1; 15) $\frac{2}{9}$; 16) $\frac{11}{18}$; 17) $\frac{7}{18}$; 18) $\frac{8}{9}$; 19) $\frac{25}{36}$; 20) $\frac{5}{6}$; 21) $\frac{4}{9}$. **20.14.** 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{3}{8}$; 3) $\frac{7}{8}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{5}{8}$. **20.15.** 1) $\frac{1}{36}$; 2) $\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{4}$; 5) $\frac{2}{9}$; 6) $\frac{8}{9}$; 7) $\frac{3}{4}$; 8) $\frac{7}{9}$; 9) $\frac{4}{36}\cdot\frac{3}{35}$; 10) $\frac{2}{35}$; 11) $\frac{9}{140}$; 12) $\frac{4}{315}$; 13) $\frac{1}{9}\cdot\frac{31}{35}$; 14) $\frac{8}{9}\cdot\frac{31}{35}$. **20.16.** $\frac{3}{5}$. **20.17.** $\frac{3}{5}$. **20.18.** 1)$\frac{3}{10}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{19}{495}$; 4) $\frac{4}{99}=\frac{200}{C_{100}^2}$; 5) $\frac{179}{495}$; 6) $\frac{59}{165}$. **20.19.** $\frac{1}{120}$. **20.20.** $\frac{1}{10\cdot A_5^3}=\frac{1}{600}$. **20.21.** $\frac{1}{120}$. **20.22.** $\frac{1}{120}$. **20.23.** $\frac{1}{24}$. **20.24.** $\frac{1}{720}$. **20.25.** 1) $\frac{C_8^3}{C_{10}^5}=\frac{2}{9}$; 2) $\frac{C_2^1\cdot C_8^4}{C_{10}^5}=\frac{5}{9}$; 3) $\frac{7}{9}$; 4) $\frac{2}{9}$. **20.26.** $\frac{A_{20}^{10}}{20^{10}}$. **20.27.** $\frac{1}{3}$.

20.28. $\frac{1}{3}$. **20.29.** 1) $\frac{C_{20}^2}{C_{100}^2}=\frac{19}{495}$; 2) $\frac{C_{80}^2}{C_{100}^2}=\frac{316}{495}$; 3) $\frac{C_{20}^1\cdot C_{80}^1}{C_{100}^2}=\frac{32}{99}$; 4) $\frac{C_{20}^2+C_{80}^2}{C_{100}^2}=\frac{67}{99}$. **20.30.** 1) $\frac{29}{140}=\frac{C_{30}^3}{C_{50}^3}$; 2) $\frac{C_{20}^3}{C_{50}^3}=\frac{57}{980}$; 3) $\frac{20\cdot C_{30}^2}{C_{50}^3}=\frac{87}{196}$; 4) $\frac{C_{30}^1\cdot C_{80}^2}{C_{50}^3}=\frac{57}{196}$. **20.31.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{2}{3}$. **20.32.** 1) $\frac{1}{64}$; 2) $\frac{1}{64}$; 3) $\frac{3!}{4^3}=\frac{3}{32}$; 4) $\frac{3}{64}$. **20.33.** $\frac{A_4^2}{4^2}=\frac{3}{4}$. **20.34.** $\frac{A_5^3}{5^3}=\frac{12}{25}$. **20.35.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{7}{12}$; 3) $\frac{5}{8}$; 4) $\frac{5}{16}$. **20.36.** 1) $\frac{80}{111}$; 2) $\frac{10}{37}$; 3) $\frac{1}{111}$; 4) $\frac{8}{999}$; 5) $\frac{16}{333}$; 6) $\frac{9}{37}$. **20.37.** 1) $\frac{5}{6}$; 2) 0,4; 3) $\frac{11}{20}$; 4) 0,6. **20.38.** 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{7}$. **20.39.** 1) $\frac{11}{15}$; 2) $\frac{1}{7}$. **20.40.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 0,7; 3) $\frac{13}{25}$; 4) 0,46; 5) $\frac{2}{3}$; 6) 0,2; 7) $\frac{1}{4}$; 8) $\frac{2}{9}$. **20.41.** $\frac{4}{5}$. **20.42.** $\frac{7}{10}$. **20.43.** $\frac{5}{6}$. **20.44.** $\frac{3}{35}$. **20.45.** $\frac{5}{12}$.

§21

21.1. 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{4}{5}$; 3) $\frac{2}{5}$; 4) $\frac{2}{5}$. **21.2.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{11}{18}$. **21.3.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{3}$. **21.4.** $\frac{2}{3}$. **21.5.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **21.6.** $\frac{1}{2}$. **21.7.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **21.8.** $\frac{1}{3}$. **21.9.** $\frac{1}{4}$. **21.10.** $\frac{3}{5}$. **21.11.** $\frac{2}{5}$. **21.12.** $\frac{4}{5}$. **21.13.** $\frac{3}{8}$. **21.14.** $\frac{1}{2}$. **21.15.** $\frac{4}{9}$. **21.16.** $\frac{1}{4}$. **21.17.** $\frac{1}{4}$. **21.18.** $\frac{1}{2}$. **21.19.** $\frac{1}{3}$. **21.20.** $\frac{1}{6}$. **21.21.** 1) $\frac{4}{9}$; 2) $\frac{5}{9}$. **21.22.** $\frac{2}{7}$. **21.23.** 1) $\frac{9}{100}$; 2) $\frac{49}{100}$; $\frac{21}{100}$. **21.24.** $\frac{91}{100}$. **21.25.** $\frac{9}{14}$. **21.26.** $\frac{7}{10}$. **21.27.** $1-\frac{\pi}{4}$. **21.28.** $\frac{2}{\pi}$. **21.29.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$. **21.30.** $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$. **21.31.** $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{12\pi}$. **21.32.** $\frac{3}{8}$. **21.33.** $\frac{7}{12}$. **21.34.** $\frac{1}{2}$. **21.35.** $\frac{1}{4}$.

ს ა ც ნ ო ბ ა რ ო   მ ა ს ა ლ ა

შემოკლებული გამრავლების ფორმულები

1. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;
2. $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$;
3. $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$;
4. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
5. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;
6. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;

პროპორციები

1. თუ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, მაშინ $a \cdot d = b \cdot c$; $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$; $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$; $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$; $\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$; $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$.
2. თუ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{c}{d}$, მაშინ $\frac{a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n}{b_1 \pm b_2 \pm \cdots \pm b_n} = \frac{c}{d}$.

პროცენტი

1. a რიცხვის $k\%$ ტოლია $\frac{ak}{100}$ -ის.
2. რიცხვი, რომლის $k\%$ არის b, ტოლია $b \cdot \frac{100}{k}$ -ის.
3. a რიცხვი არის b რიცხვის $\frac{a}{b}$ ნაწილი, ანუ $\frac{a}{b} \cdot 100$ პროცენტი.
4. a რიცხვის რთული $n\%$-ით გადიდება, რამოდენიმე ეტაპად, ნიშნავს: ყოველ მომდევნო ეტაპის დასაწყისში წინა ეტაპზე მიღებულ რიცხვს დაემატოს მისივე $n\%$. გამომდინარე აქედან A_k რიცხვი, რომელიც წარმოადგენს a რიცხვის მისი რთული $n\%$-ით თანმიმდევრულად k -ეტაპად გადიდებულს, გამოითვლება ფორმულით

$$A_k = a\left(1+\frac{n}{100}\right)^k .$$

ხარისხი

1. $a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n-\text{ჯერ}}$; სადაც $n \in N$; 2. $a^0 = 1$; $a \neq 0$.

3. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $n \in N$, $a \neq 0$.

4. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $m \in Z$ $n \in N$ და $a > 0$.

5. $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, $a > 0,\ b > 0,\ a^2 > b$.

მოქმედებები ხარისხებზე

1. $(ab)^n = a^n b^n$; 2. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, თუ $b \neq 0$;

3. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 4. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; 5. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$.

დამოკიდებულება საშუალო არითმეტიკულსა და საშუალო გეომეტრიულს შორის

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} ,$$

სადაც $a_1 \geq 0,\ a_2 \geq 0, \ldots,\ a_n \geq 0$. ტოლობას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

კვადრატული განტოლების ამონახსნთა ფორმულა

თუ $ax^2 + bx + c = 0$ და $D = b^2 - 4ac \geq 0$, მაშინ

ა) $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; ბ) $x_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$, თუ $b = 2k$.

ვიეტის თეორემა

თუ x_1 და x_2 არის $ax^2+bx+c=0$ განტოლების ამონახსნები, მაშინ

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

კვადრატული სამწევრის დაშლა წრფივ მამრავლებად

თუ x_1 და x_2 არის ax^2+bx+c კვადრატული სამწევრის ამონახსნები, მაშინ

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)\,.$$

არითმეტიკული პროგრესია

$$a_n=a_1+(n-1)d;$$

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n, \quad S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}n, \quad S_n=\frac{2a_n-d(n-1)}{2}n;$$

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\ldots=a_k+a_{n-k+1};$$

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\,.$$

გეომეტრიული პროგრესია

$$b_n=b_1q^{n-1};$$

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}, \quad S_n=\frac{b_nq-b_1}{q-1}, \quad (q\neq 1);$$

$$b_1\cdot b_n=b_2\cdot b_{n-1}=\ldots=b_k\cdot b_{n-k+1};$$

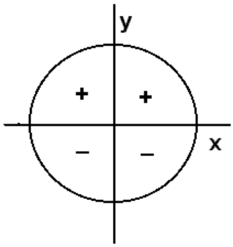
$$b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}.$$

ტრიგონომეტრია

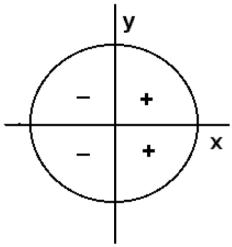
კუთხის გრადუსული ზომის გადაყვანა რადიანებში და პირიქით

$\alpha = \dfrac{a^\circ}{180^\circ}\pi, \quad a^\circ = \dfrac{\alpha}{\pi}180^\circ$ (α - რადიანული ზომაა, a - გრადუსი)

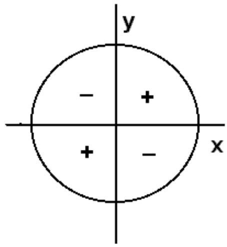
ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ნიშნები



სინუსი



კოსინუსი



ტანგენსი

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობათა ცხრილი ზოგიერთი არგუმენტისათვის

α	$0=0^0$	$\frac{\pi}{6}=30^o$	$\frac{\pi}{4}=45^o$	$\frac{\pi}{3}=60^o$	$\frac{\pi}{2}=90^o$	$\pi=180^0$	$\frac{3\pi}{2}=270^0$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-
$ctg\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0

დამოკიდებულება ერთი და იგივე არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$ 2. $tg\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$

3. $ctg\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$ 4. $tg\alpha\, ctg\alpha=1;$

5. $1+tg^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha};$ 6. $1+ctg^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}.$

ორი არგუმენტის ჯამისა და სხვაობის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

1. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$
2. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$
3. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$
4. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$
5. $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\, tg\beta};$
6. $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\, tg\beta}.$

ორმაგი და სამმაგი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

1. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$ 2. $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$

3. $tg 2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha};$ 4. $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$

5. $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$ 6. $tg 3\alpha=\dfrac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha};$

ნახევარი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

1. $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2};$ 2. $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2};$

3. $tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha};$ 4. $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$

5. $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა გამოსახვა ნახევარი არგუმენტის ტანგენსით

1. $\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}};$ 2. $\cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}};$ 3. $tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}.$

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ნამრავლის გარდაქმნა ჯამად

1. $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];$

2. $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)];$

3. $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ჯამის გარდაქმნა ნამრავლად

1. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$

2. $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$

3. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$

4. $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$

5. $tg\alpha + tg\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; 6. $tg\alpha - tg\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

7. $ctg\alpha + ctg\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$; 8. $ctg\alpha - ctg\beta = \dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ზოგიერთი ჯამის გარდაქმნა

1. $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$; 2. $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$;
3. $1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$;
4. $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha+45°) = \sqrt{2}\cos(\alpha-45°)$;
5. $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha-45°) = -\sqrt{2}\cos(\alpha+45°)$;
6. $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;
7. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

1. $y = \arcsin x$, თუ $x = \sin y$ და $-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$;
2. $y = \arccos x$, თუ $x = \cos y$ და $0 \le y \le \pi$;
3. $y = arctgx$, თუ $x = tgy$ და $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$;
4. $y = arcctgx$, თუ $x = ctgy$ და $0 < y < \pi$;
5. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$; 6. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;
7. $arctg(-x) = -arctgx$; 8. $arcctg(-x) = \pi - arcctgx$;
9. $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$; 10. $arctgx + arcctgx = \dfrac{\pi}{2}$.

უმარტივეს ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ამონახსნები

1. $\sin x = a$; $|a| \le 1$, $x = (-1)^k \arcsin a + \pi\kappa$, $\kappa \in Z$;

კერძოდ: ა) $\sin x = 0$, $x = \pi\kappa$, $\kappa \in Z$;

ბ) $\sin x = 1$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi\kappa$, $\kappa \in Z$;

გ) $\sin x = -1$, $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi\kappa$, $\kappa \in Z$;

2. $\cos x = a$; $|a| \le 1$, $x = \pm \arccos a + 2\pi\kappa$, $\kappa \in Z$;

კერძოდ: ა) $\cos x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi\kappa$, $\kappa \in Z$;

ბ) $\cos x = 1$, $x = 2\pi\kappa$, $\kappa \in Z$;

გ) $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi\kappa$, $\kappa \in Z$.

3. $tgx = a$, $x = arctga + \pi\kappa$, $\kappa \in Z$;

4. $ctgx = a$, $x = arcctga + \pi\kappa$, $\kappa \in Z$.

ლოგარითმები

1. $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, $(a \ne 1,\ a > 0,\ b > 0)$;

2. $a^{\log_a b} = b$; 3. $\log_a 1 = 0$; 4. $\log_a a = 1$;

5. $\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$;

6. $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$; 7. $\log_a x^k = k \log_a x$;

8. $\log_{a^k} x = \dfrac{1}{k} \log_a x$; 9. $\log_{a^k} b^m = \dfrac{m}{k} \log_a b$;

10. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$; 11. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$;

12. $\dfrac{\log_a x}{\log_a y} = \dfrac{\log_b x}{\log_b y}$; 13. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.

კომბინატორიკა

1. $P_n = n!$; $P_0 = 1$; 2. $A_n^m = \dfrac{P_n}{P_{n-m}} = n(n-1)\dots(n-m+1)$;

3. $A_n^1 = n$; $A_n^0 = 1$; 4. $A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m$;

5. $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}$;

6. $C_n^m = C_n^{n-m}$; $C_n^1 = n$; $C_n^0 = 1$.

ნიუტონის ბინომიალური ფორმულა

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^m a^{n-m} b^m + \dots + C_n^n b^n .$$

ლათინური ანბანი

A, *a* – ა
B, *b* – ბე
C, *c* – ცე
D, *d* – დე
E, *e* – ე
F, *f* – ეფ
G, *g* – ჟე
H, *h* – ჰაშ
I, *i* – ი
J, *j* – ჟი
K, *k* – კა
L, *l* – ელ
M, *m* – ემ
N, *n* – ენ
O, *o* – ო
P, *p* – პე
Q, *q* – ქუ
R, *r* – ერ
S, *s* – ეს
T, *t* – ტე
U, *u* – უ
V, *v* – ვ
W, *w* – დუბლ-ვე
X, *x* – იქს
Y, *y* – იგრეკ
Z, *z* – ზეტ

ბერძნული ანბანი

Α, α – ალფა
Β, β – ბეტა
Γ, γ – გამა
Δ, δ – დელტა
Ε, ε – ეფსილონ
Ζ, ς – ძეტა
Η, η – ეტა
Θ, ϑ – თეტა
Ι, ι – იოტა
Κ, κ – კაპა
Λ, λ – ლამბდა
Μ, μ – მიუ
Ν, ν – ნიუ
Ξ, ξ – ქსი
Ο, o – ომიკრონი
Π, π – პი
Ρ, ρ – რო
Σ, σ – სიგმა
Τ, τ – ტაუ
Φ, ϕ – ფი
Χ, χ – ხი
ϒ, υ – იფსილონ
Ψ, ψ – ფსი
Ω, ω – ომეგა

ს ა რ ჩ ე ვ ი

ა მ ო ც ა ნ ა თ ა   კ რ ე ბ უ ლ ი

იბეჭდება ავტორთა მიერ
წარმოდგენილი სახით

გადაეცა წარმოებას 05.11.2008. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 12.11.2008. ქაღალდის ზომა 60×84 1/16. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 27,75. სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 24. ტირაჟი 500 ეგზ. შეკვეთა №

საგამომცემლო სახლი “ტექნიკური უნივერსიტეტი”, თბილისი,
კოსტავას 77